ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ К ФИЛЬТРУ СКВАЖИНЫ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ В ПЛАСТЕ БОЛЬШОЙ МОЩНОСТИ

Г. Б. Пыхачев (Грозный)

§ 1. **Дифференциальное уравнение фильтрации в криволинейных ортогональных координатах, соответствующих данному потоку.** Предположим, что в некоторой области пространства, занятой пористой средой, имеет место потенциальное движение жидкости или газа. Пусть выбрана такая криволинейная ортогональная система координат u, v, w, в которой каждая координатная поверхность одного семейства, например $u = \text{const}$, совпадает в данный момент времени с одной из эквипотенциальных поверхностей $\varphi = \text{const}$, где $\varphi(u, t)$ — потенциал массовой скорости фильтрации, осредненной по площади эквипотенциальной поверхности $F(u)$, т. е. соответствующей некоторым средним значениям координат v_* и w_*.

Рассмотрим элементарный слой пористой среды, заключенный между площадями $F(u)$ и $F(u) + (dF / du)\, du$. Используя прием, обычно применяемый при выводе уравнения неразрывности, найдем массу, накопленную в рассматриваемом слое за промежуток времени dt

$$F(u)\frac{\partial\varphi}{\partial u}dt - \left[F(u) + \frac{dF}{du}du\right]\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}du\right)dt =$$
$$= -\left[\frac{dF}{du}\frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{dF}{du}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}(du)^2 + F(u)\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}du\right]dt$$

Пренебрегая членом наивысшего порядка малости, получим выражение накопленной массы

$$-\left[\frac{dF}{du}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + F(u)\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\right]du\,dt \tag{1.1}$$

С другой стороны, масса, накопленная в слое за время dt, представляется так:

$$F(u)\frac{\partial(m\rho)}{\partial t}du\,dt \tag{1.2}$$

где ρ — плотность жидкости (или газа).

Приравняв между собой (1.1) и (1.2), будем иметь искомое уравнение

$$\frac{dF}{du}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + F(u)\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + F(u)\frac{\partial(m\rho)}{\partial t} = 0 \tag{1.3}$$

Для установившегося потока найдем

$$\frac{dF}{du}\frac{d\varphi}{du} + F(u)\frac{d^2\varphi}{du^2} = 0 \tag{1.4}$$

Массовую скорость фильтрации $\partial\varphi / \partial u$ запишем теперь так:

$$\partial\varphi / \partial u = \rho\partial\Phi / \partial u \tag{1.5}$$

где Φ — потенциал скорости фильтрации, осредненной по площади $F(u)$. Подставляем значение $\partial\varphi / \partial u$ в уравнение (1.3)

$$\left[\rho\frac{dF}{du} + F(u)\frac{\partial\rho}{\partial u}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial u} + \rho F(u)\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + F(u)\frac{\partial(m\rho)}{\partial t} = 0 \tag{1.6}$$

Остановимся на случае упругой жидкости, для которой зависимость между плотностью ρ и давлением p может быть приближенно выражена так:

$$\rho / \rho_0 \approx 1 + \beta_1(p - p_0), \qquad \beta_1(p - p_0) \ll 1 \tag{1.7}$$

Здесь ρ_0 — плотность при атмосферном давлении p_0, β_1— коэффициент объемной упругости жидкости.

Основываясь на последнем неравенстве, считаем, что второй член квадратной скобки уравнения (1.6) пренебрегаемо мал сравнительно с ее первым членом. Уравнение (1.6) будет иметь вид

$$\rho\left[\frac{dF}{du}\frac{\partial\Phi}{\partial u} + F(u)\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\right] + F(u)\frac{\partial(m\rho)}{\partial t} = 0 \tag{1.8}$$

Оно может быть использовано при решении задачи о неплоском движении упругой жидкости в упругом пласте.

§ 2. Установившаяся фильтрация в эллипсоидально-осесимметричном поле. Пусть скважина вскрыла неограниченный пласт. Фильтр скважины цилиндрической формы имеет длину $2h$; он расположен вдоль прямолинейного участка ее оси. Принимаем, что фильтр скважины — вытянутый эллипсоид вращения с фокусным расстоянием $2h$ и что стенка фильтра эквипотенциальная поверхность. Массовый дебит скважины $M = \mathrm{const}$.

При этих условиях эквипотенциальными поверхностями будут софокусные эллипсоиды вращения с полуосями α, β и γ

$$\alpha = h \operatorname{ch} u, \ \beta = \gamma = h \operatorname{sh} u \qquad (2.1)$$

Здесь u — значение той выроженной эллипсоидальной координаты, которая определяет эквипотенциальную поверхность $u = \mathrm{const}$.

Между координатой u и потенциалом φ существует зависимость

$$dM \,/\, dF = \partial\varphi \,/\, \partial u \qquad (2.2)$$

где dM — массовый расход через площадку dF.

Разделяя переменные в (2.2) и интегрируя, найдем массовый расход M через всю площадь эквипотенциальной поверхности $F(u)$

$$M = \iint\limits_{(F)} \frac{\partial\varphi}{\partial u}\, dF = \frac{d\varphi}{du} F(u) = q(u, v_*, w_*) F(u) \qquad (2.3)$$

Здесь $d\varphi \,/\, du = q(u, v_*, w_*)$ — среднее по площади F значение массовой скорости фильтрации, соответствующее некоторым средним значениям координат v_* и w_*. Из (2.3) получаем

$$d\varphi \,/\, du = M \,/\, F(u) \qquad (2.4)$$

Здесь

$$F(u) = 2\pi\alpha\beta \left(\sqrt{1 - \varepsilon^2} + \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon}\right) \left(\varepsilon = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha}\right) \qquad (2.5)$$

$$F(u) = 4\pi h^2 \xi(u), \ \xi(u) = {}^1/_2 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u\, (\operatorname{th} u + \operatorname{ch} u \arcsin (1 : \operatorname{ch} u) \qquad (2.6)$$

Уравнение (2.4) можно рассматривать как первый интеграл уравнения (1.4). Решение этого уравнения представляется так:

$$\varphi = \frac{M}{4\pi h^2} \int \frac{du}{\xi(u)} + C \qquad (C = \mathrm{const}) \qquad (2.7)$$

Введем взамен координаты u новую безразмерную переменную $r \,/\, h$ из условия

$$(r \,/\, h)^j = \xi(u) \qquad (1 \leqslant j = \mathrm{const} \leqslant 2) \qquad (2.8)$$

Здесь r имеет размерность длины. Тогда на основании (2.5) получим

$$F(u) = 4\pi h^{2-j} r^j = F_1(r) \qquad (2.9)$$

При помощи (2.4), (2.6) и (2.8) запишем

$$d\varphi \,/\, du = M \,/\, 4\pi h^{2-j} r^j = d\varphi^* \,/\, dr \qquad (2.10)$$

где φ^* — некоторая функция, соответствующая потенциалу φ.

Пользуясь зависимостями (2.9) и (2.10), видоизменим уравнение (1.4). Имеем

$$\frac{dF(u)}{du}\frac{d\varphi}{du} = 4\pi h^2 \frac{j}{h}\left(\frac{r}{h}\right)^{j-1} \frac{d\varphi^*}{dr}\frac{dr}{du}$$

$$F(u)\frac{d^2\varphi}{du^2} = F_1(r)\frac{d^2\varphi^*}{dr^2}\frac{dr}{du} = 4\pi h^2 \left(\frac{r}{h}\right)^j \frac{d^2\varphi^*}{dr^2}\frac{dr}{du} \qquad (2.11)$$

Подставляя (2.11) в уравнение (1.4), найдем

$$\frac{d^2\varphi^*}{dr^2} + \frac{j}{r}\frac{d\varphi^*}{dr} = 0 \qquad (\text{при } r \neq 0) \qquad (2.12)$$

Решение уравнения (2.12) представляется в виде — (см. 2.10)

$$\varphi^* = \frac{M}{4\pi h (1 - j)} \left(\frac{r}{h}\right)^{1-j} + C^* \qquad (C^* = \mathrm{const}) \qquad (2.13)$$

Как показывают равенства (2.5) и (2.8), в случае $j = 1$ площадь любой эквипотенциальной поверхности $r = \mathrm{const}$ равна площади боковой поверхности цилиндра высотой h и радиусом r, а уравнение (2.12) не что иное, как уравнение плоско-радиального потока в цилиндрических координатах. Другой крайний случай $j = 2$ соответствует сферически-радиальному потоку и сферической системе координат; площадь эквипотенциальной поверхности $r = \text{const}$ в этом случае на основании (2.5) и (2.8) равна $4\pi r^2$.

Если рассматривать случаи, когда длина фильтра скважины достаточно велика сравнительно с радиусом r_c, например $h \geqslant 10 r_c$, можно довольно просто определить значение постоянной j при условии, что $1 < j < 2$. Ограничимся только этими случаями. Заметим, что из (2.5) и (2.8) находятся значения $\xi(u_c)$ на стенке скважины

$$\xi(u_c) = r_c / h \text{ при } j = 1, \ \xi(u_c) = (r_c / h)^2 \text{ при } j = 2$$

Следовательно, при $1 < j < 2$ имеем на стенке скважины

$$\xi(u_c) = \left(\frac{r_c}{h}\right)^j, \quad \text{или } j = \frac{\lg \xi(u_c)}{\lg (r_c/h)} \tag{2.14}$$

Для вычисления $\xi(u_c)$ используется формула (2.6), в которой полагают $\operatorname{sh} u_c \approx \approx r_c / h \leqslant 0.1$.

Задаваясь условиями на границах некоторой области пространства между поверхностью питания и скважиной, можем получить формулу массового дебита скважины.

Пусть $\varphi^* = \varphi_c^*$ при $r = r_c$, $\varphi^* = \varphi_k^*$ при $r = r_k$, где r_k — координата поверхности питания. Из (2.13) получим

$$M = \frac{4\pi h^{2-j}(1-j)(\varphi_k^* - \varphi_c^*)}{r_k^{1-j} - r_c^{1-j}} = \frac{4\pi h^{2-j} r_c^{\,j} (1-j)(\varphi_k^* - \varphi_c^*)}{r_c\,[(r_k/r_c)^{1-j} - 1]} \tag{2.15}$$

Замечая, что на основании (2.5) и (2.9) величина

$$4\pi h^{2-j} r_c^{\,j} = 4\pi h^2 \xi(u_c) = F(u_c)$$

выражает площадь, видоизменим при помощи (2.14) формулу (2.15) так:

$$M = \frac{4\pi h(\varphi_k^* - \varphi_c^*)}{\eta(r_c / h, \ r_k / r_c) \ln (h / r_c)} \tag{2.16}$$

$$\eta\left(\frac{r_c}{h}, \ \frac{r_k}{r_c}\right) = \frac{r_c}{h\xi(u_c)}\left[1 - \left(\frac{r_k}{r_c}\right)^{1-j}\right] : \ln \frac{r_c}{h\xi(u_c)} \tag{2.17}$$

Если r_k столь велико, что можно принимать $(r_k / r_c)^{1-j} = 0$, будем иметь

$$\eta\left(\frac{r_c}{h}, \ \infty\right) = \frac{r_c}{h\xi(u_c)} : \ln \frac{r_c}{h\xi(u_c)}$$

Представим себе пласт, ограниченный сверху непроницаемой горизонтальной кровлей и занимающий нижнее полупространство. Пусть кровля вскрыта вертикальной скважиной, погрузившейся в пласт на глубину h.

Известные формулы дебита M_1 вертикальной скважины в полубесконечном пласте позволяют считать такую скважину эквивалентной гидродинамически совершенной скважине в пласте мощностью h с областью питания, имеющей радиус νh, где $1 < \nu < 2$. Так, например, П. Я. Полубаринова-Кочина предлагает следующую формулу дебита M_1 вертикальной скважины в полубесконечном пласте [1]

$$M_1 = \frac{2\pi h(\varphi_k - \varphi_c)}{\ln(\sqrt{3} h / r_c)} \qquad (\nu = \sqrt{3}) \tag{2.18}$$

В данном случае к вычислению дебита применима и формула (2.16), но коэффициент 4 следует заменить в ней коэффициентом 2 (пласту принадлежит полупространство). Результаты вычислений дебита по формулам (2.16) и (2.18) совпадают при условии, что

$$\eta(r_c / h, \ r_k / r_c) \ln (h / r_c) = \ln(\sqrt{3} h / r_c) \tag{2.19}$$

Равенство (2.19) определяет в этом случае координату r_k поверхности питания той области пласта, в которой действует скважина.

Координата r_k рассчитывается из (2.19) при помощи (2.17). В таблице приведены для сравнения значения величин j, $\eta(r_c / h, \ r_k / r_c)$ и r_k / r_c, соответствующие значениям

$$r_c / h = 0.1, \ 0.01, \ 0.001$$

в случае скважины, вскрывшей бесконечно глубокий пласт на длине h; она эквивалентна гидродинамически совершенной скважине в пласте мощностью h с радиусом области питания, равным $\sqrt{3}h$ (см. условие (2.19)). Кроме того, в таблице приводятся значения $\eta\,(r_c\,/\,h,\ \infty)$, соответствующие случаю бесконечно удаленной области питания. Вычисления производились по формулам (2.14), (2.17) и (2.19).

$\frac{r_c}{h}$	j	$\eta\left(\frac{r_c}{h}, \frac{r_k}{r_c}\right)$	$\frac{r_k}{r_c}$	$\eta\left(\frac{r_c}{h}, \infty\right)$
0.1	1.103	1.24	12.95	5.300
0.01	1.053	1.12	93	5.225
0.001	1.035	1.08	750	5.225

Как видно из таблицы, только при $r_c\,/\,h = 0{,}1$ координата r_k превышает длину фильтра h, в остальных случаях $r_k < h$. При $r_k \to \infty$ дебит M, как следует из формулы (2.16) и из таблицы, может уменьшаться более чем в 4.8 раза.

§ 3. Скважина конечной длины в неограниченном пласте с упругим режимом. Рассмотрим движение жидкой упругой массы в неограниченном упругом пласте, в котором скважина, как предполагалось в предыдущем параграфе, имеет фильтр длиной $2h$. Допуская, что коэффициент проницаемости пласта k и динамическая вязкость жидкости μ постоянны, получим значение потенциала осредненной скорости фильтрации $d\Phi^*\,/\,dr$

$$\Phi^* = kp\,/\,\mu + C \tag{3.1}$$

Здесь p — приведенное давление, C — некоторая постоянная. Пусть упругие свойства выражаются зависимостью

$$\partial m\,/\,\partial t = \beta_c \partial p\,/\,\partial t \tag{3.2}$$

Здесь m — коэффициент пористости пласта, β_c — коэффициент объемной упругости пласта.

Упругие свойства жидкости представим зависимостью

$$\partial \rho\,/\,\partial t = \rho\beta_1\,\partial p\,/\,dt \tag{3.3}$$

где β_1 — коэффициент объемной упругости жидкости. При помощи (3.2) и (3.3) можно записать

$$\partial\,(m\rho)\,/\,dt = \rho\,(m\beta_1 + \beta_c)\,\partial p\,/\,\partial t \tag{3.4}$$

Уравнение (1.8), в котором основной координатой служит r, в соответствии с (2.9) и (3.1) примет вид

$$\varkappa\left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{j}{r}\frac{\partial p}{\partial r}\right) = \frac{\partial p}{\partial t} \qquad \left(\varkappa = \frac{k}{\mu\beta^*}, \qquad \beta^* = m\beta_1 + \beta_c\right) \tag{3.5}$$

Здесь $\varkappa$ — коэффициент пьезопроводности пласта, β^* — коэффициент упругоемкости.

Уравнение (3.5) можно трактовать как уравнение теплопроводности в пространстве $j + 1$ измерений. Решение этого уравнения можно построить по аналогии с мгновенным стоком в пространстве $j + 1$ измерений [2]. Подобная аналогия использовалась для решения уравнения, отвечающего вырождающейся изотропной турбулентности при очень малых скоростях пульсации [3-5]. В случае мгновенного стока решение уравнения (3.5) представим так

$$p\,(r,\,t) = C_1 - C_2 t^{-1/2\,(j+1)} \exp\left(-r^2\,/\,4\varkappa t\right) \tag{3.6}$$

Найдем значения постоянных C_1 и C_2. Пусть $p = p_0$ при $t = 0$. Но при $r > 0$,

$$\lim_{t \to 0}\left[t^{-1/2\,(j+1)} \exp\left(-\frac{r^2}{4\varkappa t}\right)\right] = 0 \tag{3.7}$$

Следовательно $C_1 = p_0$.

Итак,

$$\Delta p = p_0 - p\,(r,\ t) = C_2 t^{-1/2\,(j+1)} \quad \exp\left(-r^2\,/\,4\,\varkappa t\right) \tag{3.8}$$

Объем жидкости $d\tau_1$, выделившейся из элементарного эллипсоидального слоя $d\tau = 4\pi h^{2-j}\,r^j dr$ равен

$$d\tau_1 = \beta^* \Delta p\ d\tau = 4\pi h^{2-j} \beta^* C_2 t^{-1/2(j+1)} \ \exp\left(-\frac{r^2}{4\varkappa t}\right) r^j dr \tag{3.9}$$

Объем жидкости τ_1, выделившейся из всего пласта, получим, проинтегрировав (3.9) [6]

$$\tau_1 = 4\pi h^{2-j}\beta^* C_2 t^{-1/2(j+1)} \int_0^\infty r^j \exp\left(-\frac{r^2}{4\varkappa t}\right) dr = 2\pi h^{2-j}\beta^* C_2 (4\varkappa)^{1/2(j+1)}\, \Gamma\left(1/2\,(j+1)\right) \quad (3.10)$$

Здесь Γ — гамма-функция.

Из (3.10), принимая во внимание зависимость между $\varkappa$ и β^*, определим

$$C_2 = \frac{\tau_1 \mu}{2^{2+j}\pi k \varkappa^{1/2(j-1)} h^{2-j}\, \Gamma\left(1/2\,(j+1)\right)} \quad (3.11)$$

Перейдем к случаю скважины с фильтром длиной $2h$, введенной в неограниченный пласт в начальный момент времени и действующей непрерывно с постоянным объемным дебитом Q. Если мгновенный сток существовал в некоторый момент времени t, формула (3.8) запишется так:

$$\Delta p = \frac{\tau_1 \mu}{2^{2+j}\pi \varkappa^{1/2(j-1)}\, k h^{2-j}\, \Gamma\left(1/2\,(j+1)\right)} (t-t')^{-1/2(j+1)} \exp\left(-\frac{r^2}{4\varkappa(t-t')}\right) \quad (3.12)$$

Пусть сток существует в течение промежутка времени dt'.

За время существования стока из пласта выделится объем жидкости

$$d\tau_1 = Q\, dt' \quad (3.13)$$

Учитывая (3.12) и (3.13), получим формулу для снижения давления в пласте Δp за время непрерывной работы скважины от $t' = 0$ до $t' = t$

$$\Delta p = \frac{Q\mu}{2^{2+j}\pi h^{2-j} k\, \Gamma\left(1/2\,(j+1)\right) \varkappa^{1/2(j-1)}} \int_0^t (t-t')^{-1/2(j+1)} \exp\left[-\frac{r^2}{4\varkappa(t-t')}\right] dt' \quad (3.14)$$

При помощи подстановки $1/(t-t') = \theta$ формула (3.14) запишется так:

$$\Delta p = \frac{Q\mu}{2^{2+j}\pi h^{2-j} k \varkappa^{1/2(j-1)}\, \Gamma\left(1/2\,(j+1)\right)} \int_{\theta_0}^\infty \theta^{1/2(j-3)} \exp\left(-\frac{r^2}{4\varkappa}\theta\right) d\theta =$$

$$= \frac{Q\mu}{8\pi k h\, \Gamma\left(1/2\,(j+1)\right)} \left(\frac{r}{h}\right)^{1-j} \Gamma\left(\frac{j-1}{2}, \frac{r^2}{4\varkappa t}\right) \quad (3.15)$$

$$\theta_0 = \frac{1}{t}, \quad \Gamma\left(\frac{j-1}{2}, \frac{r^2}{4\varkappa t}\right) = \int_R^\infty x^{1/2(j-3)} e^{-x}\, dx \qquad \left(R = \frac{r^2}{4\varkappa t}\right)$$

Здесь $\Gamma\left(1/2\,(j-1),\ r^2/4\varkappa t\right)$ неполная гамма-функция [6]

$$\frac{\Gamma\left(1/2\,(j-1),\ r^2/4\varkappa t\right)}{\Gamma\left(1/2\,(j+2)\right)} = \frac{2}{j-1} - \frac{\gamma\left(1/2\,(j-1),\ r^2/4\varkappa t\right)}{\Gamma\left(1/2\,(j+1)\right)} \quad (3.16)$$

где

$$\gamma = \left(\frac{j-1}{2}, \frac{r^2}{4\varkappa t}\right) = \int_0^R x^{\frac{1}{2}(j-3)} e^{-x} dx \qquad \left(R = \frac{r^2}{4\varkappa t}\right)$$

При помощи известной рекуррентной формулы для гамма-функции найдем, что [7]

$$\frac{\gamma\left(1/2\,(j-1),\ r^2/4\varkappa t\right)}{\Gamma\left(1/2\,(j+1)\right)} = \frac{2}{j-1}\left[1 - P\left(\frac{r^2}{2\varkappa t}, j-1\right)\right] \quad (3.17)$$

$$P\left(\frac{r^2}{2\varkappa t}, j-1\right) = \frac{1}{2\left(1/2\,(j-3)\right)\, \Gamma\left(1/2\,(j-1)\right)} \int_{R^*}^\infty x^{j-2} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \quad \left(R^* = \frac{r^2}{\sqrt{2\varkappa t}}\right)$$

На основании (3.17) из (3.15) и (3.16) получим

$$\Delta p = \frac{Q\mu}{4\pi k h}\left(\frac{r}{h}\right)^{1-j} \frac{P\left(r^2/2\varkappa t,\ j-1\right)}{j-1} = \frac{Q\mu}{8\pi k h} f\left(\frac{r}{h}, \frac{r^2}{2\varkappa t}\right)$$

$$f\left(\frac{r}{h}, \frac{r^2}{2\varkappa t}\right) = \frac{2}{j-1}\left(\frac{r}{h}\right)^{1-j} P\left(\frac{r^2}{2\varkappa t}, j-1\right) \quad (3.18)$$