

УДК 539.3

АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИБКОГО ОБОДА РЕФЛЕКТОРОВ КОСМИЧЕСКИХ АНТЕНН

К. Г. Охоткин^{*,**}, А. Ю. Власов^{***}, Ю. В. Захаров^{***}, Б. Д. Аннин^{****}

* АО “Информационные спутниковые системы” им. М. Ф. Решетнева”,
662972 Железногорск, Россия

** Красноярский научный центр СО РАН, 660036 Красноярск, Россия

*** Сибирский государственный университет науки и технологий им. М. Ф. Решетнева,
660014 Красноярск, Россия

**** Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mails: okg2000@mail.ru, vlasov.anton@gmail.com, yuzakharov@mail.ru, annin@hydro.nsc.ru

Представлена аналитическая геометрически нелинейная модель гибкого цилиндрического шпангоута (обода) трансформируемого прецизионного крупногабаритного рефлектора применяемых в космической технике антенн, изготовленного с использованием полимерных композиционных материалов с памятью формы. Сформулирована нелинейная краевая задача для шпангоута в деформированном (свернутом) состоянии и получены точные аналитические решения в эллиптических функциях и интегралах, описывающие формы деформирования обода. С использованием геометрически нелинейной модели получены точные аналитические решения, позволяющие определять предварительные геометрические размеры и оптимальную форму гибкого шпангоута, а также оценивать накопленную энергию.

Ключевые слова: гибкая пластина, геометрическая нелинейность, рефлектор антенны, композиционный материал.

DOI: 10.15372/PMTF20170519

Введение. В связи с активным развитием в настоящее время телекоммуникационных услуг широкополосного доступа космические антенны должны иметь большой диаметр в операционной конфигурации. Во время вывода космического аппарата на орбиту внутренний объем под обтекателем ракеты-носителя ограничен, поэтому антенна должна трансформироваться таким образом, чтобы она помещалась под обтекатель ракеты-носителя и могла быть развернута на орбите с высокой точностью. В силу этого актуальной является разработка методов проектирования и технологий создания новых прецизионных и легких композиционных конструкций (гибких трансформируемых антенн с упругими элементами различных размеров) для новых космических аппаратов связи, телекоммуникации и ретрансляции. В раскрываемых антеннах выгодно сочетаются малые масса и объем в транспортировочном положении и большие размеры при эксплуатации на орбите.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (договор № 02.G25.31.0147).

© Охоткин К. Г., Власов А. Ю., Захаров Ю. В., Аннин Б. Д., 2017

Некоторые структурные модели трансформируемых космических антенн описаны в работах [1–5]. Применение различных полимерных композиционных материалов в конструкции космических антенн является наиболее эффективным [6]. Перспективными являются модели с использованием гибких упругих элементов, а также полимерных материалов с памятью формы.

В настоящей работе представлена модель трансформируемого цилиндрического обода большой космической антенны, изготовленного с использованием гибких композиционных элементов. Концепция такой космической антенны разработана АО “Информационные спутниковые системы” им. М. Ф. Решетнева” (г. Железногорск Красноярского края) совместно с Сибирским государственным университетом науки и технологий им. М. Ф. Решетнева (г. Красноярск) в рамках комплексного проекта по созданию высокотехнологичного производства “Организация импортозамещающего производства крупногабаритных трансформируемых рефлекторов наземных и космических антенн из интеллектуальных полимерных композиционных материалов на основе безавтоклавных технологий”.

При теоретическом моделировании использованы геометрически нелинейная модель [7], а также статические уравнения, описывающие геометрически нелинейную деформацию элемента шпангоута (гибкой s -образной полосы) в процессе разворачивания антенны. Аналитически решена обратная задача, в которой найдены усилия, смещения и потенциальная энергия, возникающие в гибкой полосе (элементе шпангоута) при ее трансформации из прямолинейного состояния в сильнокриволинейное. Полученное аналитическое решение позволяет определить оптимальную форму изогнутой полосы и оценить накопленную энергию упругой деформации.

При моделировании основных элементов шпангоута антенны большое значение имеет исследование устойчивости и поведения гибких элементов конструкций в случае наличия больших перемещений в сильноизогнутом состоянии и малых упругих деформаций растяжения-сжатия. В этом случае необходимы полный учет геометрической нелинейности и использование линейной теории упругости для описания области растяжения-сжатия элемента. Общая классическая теория нелинейного изгиба стержней и некоторые аналитические решения для различных задач плоского изгиба стержней, выраженные через эллиптические интегралы первого и второго рода, приведены в работе [8]. Большой интерес представляет работа [9], в которой представлены аналитические решения для больших прогибов консольно закрепленного стержня при различных нагрузках в одной плоскости, записанные с помощью гипергеометрических функций. В настоящее время наиболее близкий к используемому в настоящей работе подход к описанию изогнутых форм стержней на основе эллиптических функций Якоби применен в работе [10].

1. Концепция крупногабаритного рефлектора и модель трансформируемого обода. Крупногабаритный рефлектор — это трансформируемый рефлектор апертуры 4,5 м с отражающей поверхностью, которая представляет собой тонкую оболочку, выполненную из полимерного композиционного материала (ПКМ) на основе углеродных волокон и подкрепленную 16 радиально расположенными жесткими спицами. Рабочее (развернутое) и транспортировочное (свернутое) положения рефлектора космической антенны показаны на рис. 1. По периферии оболочки закреплен шпангоут (обод), состоящий из гибкой упругой цилиндрической пластины диаметром 4,5 м на основе ПКМ. Каждый из 16 элементов обода в развернутом состоянии представляет собой сегмент ($22,5^\circ$) окружности диаметром 4,5 м. Для получения “свернутой” конфигурации обод обжимается поперечной нагрузкой и принимает волнообразную осесимметричную форму, представляющую собой четное число N s -образных сегментов. В свернутом состоянии обод накапливает энергию упругой деформации вследствие структурной деформации. Гибкий композиционный шпангоут необходим для повышения жесткости и точности отражающей поверхности

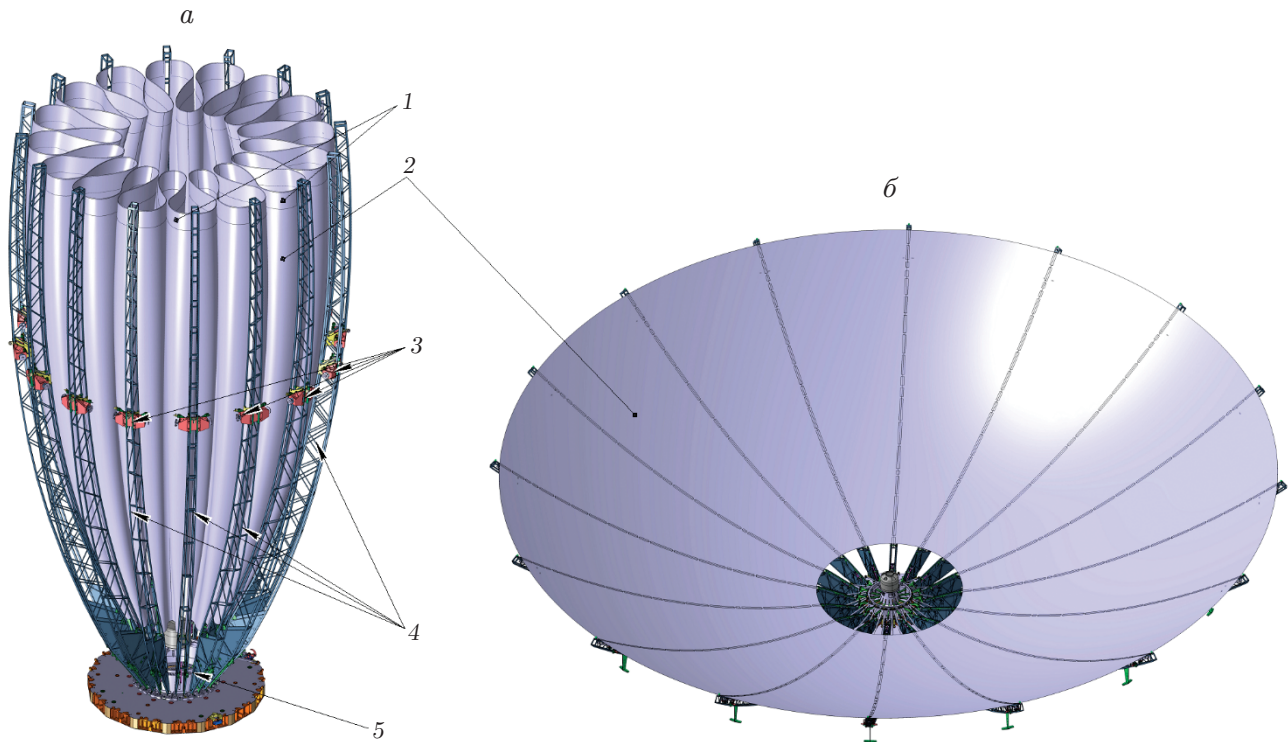


Рис. 1. Транспортировочное (а) и рабочее (б) положения рефлектора космической антенны:

1 — шпангоут из материала с памятью формы, 2 — формообразующая в сборе, 3 — замки зачекочки, 4 — спицы, 5 — механизм раскрытия

в рабочем положении рефлектора. Раскрытие рефлектора происходит с помощью механических приводов, передающих движение спицам.

К периферии формообразующей прикреплен шпангоут из ПКМ на основе полимера и углеткани. В поперечном сечении шпангоут представляет собой сегмент дуги, в транспортировочном положении — углепластиковую упругую s-образную полосу, которая приклеена к формообразующей и не препятствует ее складыванию.

В качестве начальных параметров для проектирования используются радиус обода в развернутом состоянии R , определяющий диаметр апертуры, и внешний радиус обода в свернутой конфигурации R_2 , определяющий диаметр пространства для хранения свернутой антенны под обтекателем ракеты-носителя.

1.1. *Модель сегмента обода.* В рассматриваемой модели один полусегмент обода будем моделировать как гибкую упругую нерастяжимую полосу с жестко закрепленными краями. В соответствии с осевой симметрией обода рефлектора для описания деформирования сжатого обода используем геометрически нелинейную теорию деформирования криволинейных стержней в плоскости, приведенную в [11], и аналитический подход [7]. Длина полусегмента L в сжатом и развернутом состояниях одинакова. В развернутом состоянии обода полусегмент имеет начальный изгиб по дуге окружности, соответствующей углу φ . Следовательно, $L = R\varphi$. Периметр обода равен $2\pi R = 2N\varphi$ и сохраняется при его деформации (сжатии). При сжатии обода концы сегмента могут свободно смещаться вдоль заданных направляющих по радиусу.

Деформация сегмента имеет место в секторе с центральным углом $\varphi = \pi/N = L/R$ (N — число сегментов обода — гибких упругих элементов, состоящих из изогнутых по-

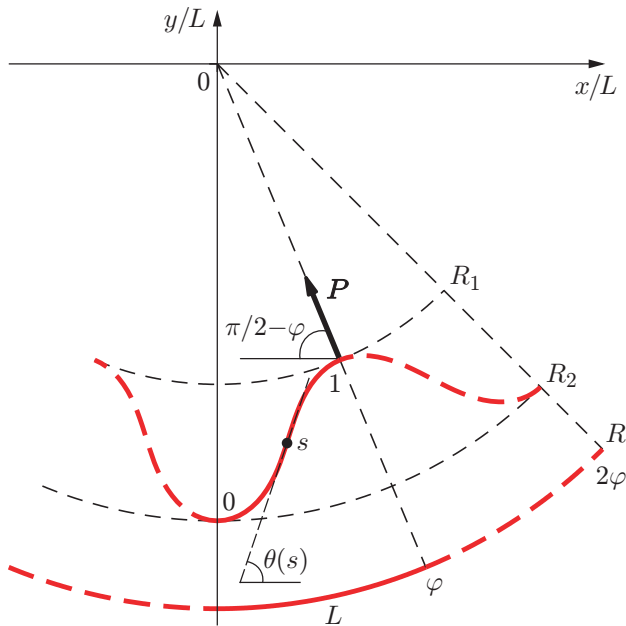


Рис. 2. Фрагмент обода (сплошная линия) с соседними полусегментами (штриховые линии) и система координат

лос; R — заданный внешний радиус развернутого обода антенны). Рассмотрим деформирование обода и его закритические состояния для заданных величин R , N . Параметры упругости обода с прямоугольным поперечным сечением определяются по формулам

$$B = E_x h b, \quad D = E_x I_x = E_x b \frac{h^3}{12}, \quad S = b h, \quad V = 2\pi R b h, \quad (1)$$

где h — толщина обода; b — высота обода; E_x — модуль упругости композиционного материала обода в направлении оси x (далее — E); D — изгибная жесткость; S — площадь сечения обода; V — объем обода.

Определим точные форму и кривизну изогнутого полусегмента как гибкого стержня в различных осесимметричных состояниях сжатого обода после потери им устойчивости при нагружении поперечной нагрузкой. Найдём коэффициент сжатия (трансформации) обода, внутренний и внешние радиусы деформированного обода, накопленную энергию упругой деформации сжатого обода, величину нагрузки, необходимой для максимального сжатия обода, и максимальные напряжения, возникающие в сегменте обода. Осесимметричные формы потери устойчивости сжатого цилиндрического обода в плоскости его поперечного сечения определим, решая плоскую задачу.

Выберем декартову систему координат с началом в центре развернутого обода (рис. 2). На рис. 2 P — внешняя сжимающая нагрузка, направленная вдоль радиуса, приложенная к центру сегмента (к правому концу) и поперечная относительно правого конца сегмента. Угол наклона нагрузки относительно оси x равен $\varphi_0 = \pi/2 - \varphi$, R_1 , R_2 — внутренний и внешний радиусы обода в сжатом состоянии. Начальная форма обода в развернутом состоянии представляет собой круговой цилиндр, в сечении — окружность радиусом R . Рассмотрим один полусегмент обода (моделируемый как гибкий стержень), деформация которого происходит в секторе с углом φ . Стержень, соответствующий полусегменту, имеет длину $L = R\varphi = R\pi/N$. Начальная форма выделенного полусегмента при отсутствии сжимающей нагрузки P — дуга окружности, соответствующая сектору с углом φ . Концы полусегмента могут смещаться вдоль радиальных направляющих.

Введем систему координат, связанную с касательной (см. рис. 2). Пусть криволинейная координата l — длина вдоль изогнутой линии сегмента, $s = l/L$ — безразмерная длина, изменяющаяся в диапазоне $0 \div 1$, $\theta(s)$ — угол наклона касательной в текущей точке

к сегменту. Точное геометрически нелинейное выражение $d\theta/ds = 1/\rho$ задает кривизну сегмента обода, ρ — радиус кривизны. Зная зависимость $\theta(s)$, можно определить форму изогнутого обода в параметрическом виде:

$$x(s) = \int_0^s \cos \theta(s) ds, \quad y(s) = \int_0^s \sin \theta(s) ds. \quad (2)$$

Сегмент обода подвергается деформации изгиба под действием внешней сжимающей сосредоточенной нагрузки, направленной вдоль радиуса и приложенной к центру сегмента (к правому концу полусегмента). Эта нагрузка является поперечной относительно правого конца полусегмента. Угол наклона нагрузки относительно оси x равен $\varphi_0 = \pi/2 - \varphi$, величина нагрузки, приложенной к одному полусегменту, — P , соответственно к центру сегмента приложена нагрузка $2P$. Всего на обод действует N нагрузок. В силу симметрии задачи нагрузка имеет постоянное направление вдоль радиуса под углом φ к центру обода. Величины P_x, P_y — компоненты нагрузки P в декартовой системе координат.

Одновременно в N точках обода установим крепления к спицам, концы которых смещаются в радиальном направлении. При превышении порогового значения нагрузки, передаваемой от спиц, обод теряет устойчивость и все N сегментов выпучиваются внутрь. При дальнейшем увеличении нагрузки концы сегмента смещаются внутрь вдоль радиуса и обод трансформируется (сжимается). В деформированном состоянии каждый полусегмент принимает s -образную форму. Обод сжимается вплоть до предельного состояния, когда соседние сегменты соприкасаются. Последовательные равновесные формы при сжатии (трансформировании) одного выделенного сегмента обода приведены на рис. 3. Введем коэффициент сжатия (трансформирования) обода:

$$\kappa = R/R_2. \quad (3)$$

Запишем краевые условия для одного стержня-полусегмента. Для того чтобы выполнялись условия неразрывности сегментов, составляющих единый обод, зададим следующие краевые условия для одного полусегмента. Стержень зашпемлен на левом конце, расположенном в начале координат:

$$\theta(0) = 0 \quad \text{при} \quad s = 0. \quad (4)$$

Правый конец стержня соединен со вторым симметричным полусегментом, составляющим один элемент обода:

$$\theta(1) = \varphi \quad \text{при} \quad s = 1. \quad (5)$$

К условиям (4), (5) необходимо добавить условия сопряжения решений на границе соседних сегментов n и $n + 1$: $x_n(1) = x_{n+1}(0)$, $y_n(1) = y_{n+1}(0)$.

Условие смещения конца полусегмента вдоль радиуса (см. рис. 3) определяет геометрические соотношения для внутреннего и внешнего радиусов сжатого обода

$$R_1^2 = x(1)^2 + y(1)^2, \quad R_2 \operatorname{tg} \varphi - y(1) \operatorname{tg} \varphi = x(1),$$

где $x(1), y(1)$ — координаты правого конца полусегмента при $s = 1$.

Следуя работе [7], приведем систему точных геометрически нелинейных уравнений статического равновесия одного полусегмента для случая нагружения сосредоточенной нагрузкой. Уравнение равновесия элемента обода имеет вид

$$\frac{d\mathbf{F}}{dl} = 0, \quad \mathbf{F} = \text{const}, \quad (6)$$

где \mathbf{F} — упругая сила; $F_x = P \sin \varphi_0$, $F_y = P \cos \varphi_0$ — ее компоненты в декартовой системе координат; F_n, F_τ — компоненты в системе координат, заданной по касательной; P —

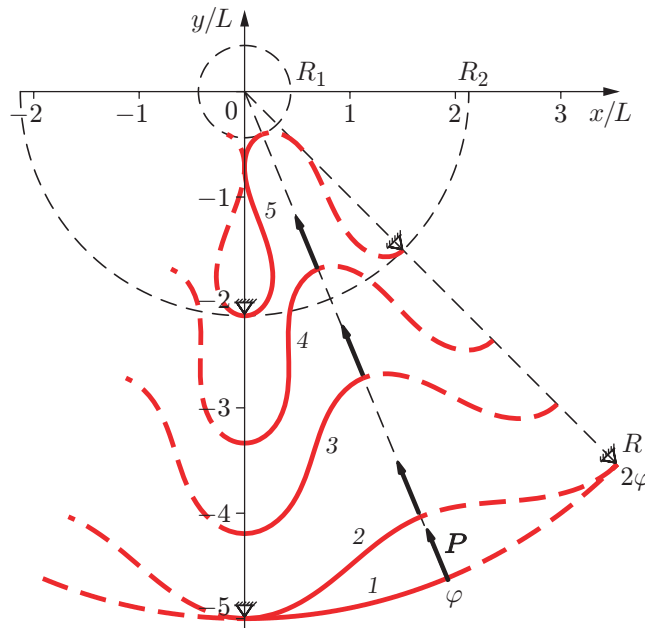


Рис. 3. Последовательные равновесные формы при сжатии (трансформировании) сегмента обода (вид сверху):

сплошные линии — полусегмент обода, штриховые — соседние полусегменты; 1 — круговой обод в исходном, развернутом состоянии, 2 — первая деформированная линия обода после потери им устойчивости при превышении критического значения внешней нагрузки, 3, 4 — промежуточные формы деформирования сегмента обода при увеличении нагрузки, 5 — предельная сжатая форма сегмента, когда соседние сегменты соприкасаются

внешняя сосредоточенная нагрузка; $\varphi_0 = \pi/2 - \varphi$ — угол ее наклона. Уравнение моментов имеет вид

$$\frac{dM}{dl} = -F_n = F_x \sin \theta - F_y \cos \theta \tag{7}$$

(M — изгибающий момент), закон Гука —

$$M = D \frac{d\theta}{dl}. \tag{8}$$

Из уравнений (6)–(8) получаем нелинейное уравнение для определения зависимости $\theta(l)$:

$$D \frac{d^2\theta}{dl^2} + P \sin \varphi_0 \sin \theta + P \cos \varphi_0 \cos \theta = 0,$$

или

$$\frac{d^2\theta}{dl^2} + \frac{P}{D} \sin(\theta + \varphi_0) = 0. \tag{9}$$

В исходном ненагруженном (развернутом) состоянии сечение обода имеет форму круга радиусом R . При этом полусегмент обода описывается выражением

$$\theta_0(s) = -\varphi_0 + \varphi s,$$

где $\theta_0(s)$ — угол наклона касательной; M_0 — постоянный изгибающий момент:

$$M_0 = \frac{EI}{L} \frac{d\theta_0}{ds} = \frac{EI}{R} = EI \frac{\pi}{LN} = EI \frac{\varphi}{L}.$$

С учетом исходного состояния сегмента обода, изогнутого по дуге, уравнение (9) имеет вид

$$\frac{d^2(\theta - \theta_0)}{dl^2} + \frac{P}{D} \sin(\theta + \varphi_0) = 0. \quad (10)$$

1.2. *Аналитические решения.* Преобразуем уравнение равновесия (10) к уравнению типа уравнения “нелинейного маятника” в безразмерном виде. Введем обозначение для параметра внешней нагрузки $q^2 = PL^2/D$ и используем безразмерную криволинейную координату $s = l/L$. Точное решение уравнения (10) с учетом начального изгиба по дуге $\theta_0(s)$ известно:

$$\frac{d\theta(s)}{ds} = \varphi + 2kq \operatorname{cn}(qs + F_1, k); \quad (11)$$

$$\theta(s) = -\varphi_0 + \varphi s + 2 \arcsin[k \operatorname{sn}(qs + F_1, k)] \quad (12)$$

($d\theta(s)/ds$ — кривизна стержня; функции sn , cn — эллиптические синус и косинус Якоби). Модуль эллиптических функций k и параметр F_1 являются константами интегрирования, и их связь с параметром q и углом φ_0 определяется далее из краевых условий. Обозначим аргумент эллиптических функций через $u = qs + F_1$. Применяя краевые условия (3), (4) к решению (11):

$$k \operatorname{sn}(0 + F_1, k) = \sin(\varphi_0/2), \quad k \operatorname{sn}(q + F_1, k) = \sin(\varphi_0/2)$$

и используя свойства периодичности эллиптического синуса Якоби, получаем

$$F_1 = F\left(\arcsin \frac{\sin(\varphi_0/2)}{k}, k\right) = F\left(\arcsin \frac{\cos(\varphi/2)}{k}, k\right), \quad q + F_1 = 2nK(k) - F_1,$$

где $K(k)$, $F(\varphi, k)$ — полный и неполный эллиптические интегралы первого рода соответственно. Отсюда находим соотношение для параметра нагрузки и модуля k :

$$q = 2nK(k) - 2F_1, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

Выражение (13) описывает полную систему порогов и ветвей решений нелинейной краевой задачи, каждой из которых соответствует собственная форма сжатого сегмента с различным числом точек перегиба. Заметим, что первый, статический порог для параметра нагрузки q при $k = k_{\min}$, $n = 1$ равен эйлеровой силе. Пороги при $n > 1$ названы М. А. Лаврентьевым и А. Ю. Ишлинским динамическими порогами потери устойчивости, которые могут быть достигнуты при ударном приложении нагрузки, когда время нарастания импульса меньше времени релаксации системы [12]. Механизм потери устойчивости в этом случае и возникающий параметрический резонанс исследованы авторами работы [13]. В настоящей работе данный подход к исследованию динамических стержневых систем дополнен с использованием статического критерия устойчивости механических систем, точного описания геометрической нелинейности и точных аналитических решений, выраженных через специальные эллиптические функции Якоби. В [14] выполнен нелинейный анализ динамики и больших выпучиваний пластин на примере графенового листа и показано, что критические значения перемещений и формы выпучивания существенно зависят от скорости заданных перемещений края листа. При малой скорости заданных перемещений форма выпучивания листа близка к классической эйлеровой форме выпучивания упругого стержня в условиях статического деформирования, а при достаточно большой скорости заданных перемещений на начальной стадии закритического деформирования реализуются формы выпучивания с высшими гармониками, характерными для динамического выпучивания упругого стержня (см., например, [12]). Формы изгиба упругого стержня в геометрически нелинейном случае аналитически исследованы в работе [7]

с использованием статического критерия устойчивости и в работе [15] с использованием численного метода стрельбы.

Рассмотрим первую моду потери устойчивости (с одной точкой перегиба ($n = 1$)) для описания закритического состояния обода. Соотношение для безразмерного параметра нагрузки запишем в виде

$$q(k) = 2K(k) - 2F\left(\arcsin \frac{\cos(\varphi/2)}{k}, k\right). \quad (14)$$

Выражение (14) неявным образом связывает нагрузку и модуль k , изменяющийся в интервале $\cos \varphi \leq k < 1$ и характеризующий условную степень кривизны изогнутой формы сегмента. Минимальному значению модуля k соответствуют случаи отсутствия нагрузки $q = 0$ и полусегмент обода, имеющий начальную форму (по дуге окружности). При $k \rightarrow 1$ имеем максимально искривленную форму сегмента при нагрузке $q \rightarrow \infty$. Соответственно полная величина нагрузки для каждой изогнутой формы (с собственным модулем k) определяется выражением

$$P = \frac{q^2(k)EI}{L^2}.$$

Из решения (12) находим распределение касательных напряжений вдоль изогнутого сегмента

$$\sigma_\tau(s) = \frac{F_\tau}{S} = \frac{P}{bh} \cos(\theta + \varphi_0) = \frac{q^2 EI}{L^2 bh} \cos\{\varphi s + 2 \arcsin[k \operatorname{sn}(qs + F_1, k)]\}.$$

Максимальные растягивающие касательные напряжения имеют место в середине полусегмента:

$$\sigma_\tau = \frac{q^2(k)EI}{L^2 bh}.$$

Определим изогнутую форму сегмента. Используя геометрические соотношения (2) и решение (12), получаем декартовы координаты произвольной точки сегмента, определяющие изогнутую форму в виде квадратур:

$$\begin{aligned} \frac{x(s)}{L} &= \int_0^s \cos \theta ds = \int_0^s \cos\{-\varphi_0 + \varphi s + 2 \arcsin[k \operatorname{sn}(qs + F_1, k)]\} ds, \\ \frac{y(s)}{L} &= \int_0^s \sin \theta ds = \int_0^s \sin\{-\varphi_0 + \varphi s + 2 \arcsin[k \operatorname{sn}(qs + F_1, k)]\} ds. \end{aligned} \quad (15)$$

Выражения (15) задают форму профиля изогнутого полусегмента обода в параметрическом виде с параметром s — безразмерной криволинейной координатой. Предельное сжатое состояние обода (кривая 5 на рис. 3) получаем, когда стенки соседних сегментов начинают соприкасаться. Этому состоянию соответствует геометрическое условие

$$\min\{x(s, k), 0 < s < 1\} = h/2.$$

Определим накопленную потенциальную энергию, зависящую от изгиба полусегмента:

$$U = \frac{1}{2D} \int_0^L M^2 dl = \frac{1}{2} \frac{D}{L} \int_0^1 \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 ds.$$

Введем безразмерный параметр потенциальной энергии изогнутого полусегмента f :

$$U = \frac{3D}{L} f, \quad f = \frac{1}{6} \int_0^1 \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 ds.$$

Таким образом, зная решение (11), можно точно вычислить накопленную энергию:

$$f = \frac{1}{6} \int_0^1 4k^2 q^2 \operatorname{cn}(qt + F_1)^2 ds = \frac{2}{3} q [E(am(qs + F_1)) - (1 - k^2)(qs + F_1)]_{s=0}^{s=1};$$

$$f = \frac{4}{3} (K(k) - F_1)[E(k) - E_1 - (1 - k^2)(K(k) - F_1)]. \quad (16)$$

Здесь $K(k)$, $F_1(\varphi, k)$ — полный и неполный эллиптические интегралы первого рода; $E(k)$, $E_1(\varphi, k)$ — полный и неполный эллиптические интегралы второго рода. Соответственно

$$F_1 = F\left(\arcsin \frac{\cos(\varphi/2)}{k}, k\right), \quad E_1 = E\left(\arcsin \frac{\cos(\varphi/2)}{k}, k\right).$$

Полная накопленная энергия упругой деформации сжатого обода определяется через безразмерный параметр f :

$$U = 2N \frac{3D}{L} f. \quad (17)$$

В центре сегмента (на правом конце изогнутого полусегмента, где $s = 1$) имеет место максимальная кривизна “гиба” и соответственно минимальный радиус кривизны касательной окружности. Определим этот минимальный радиус кривизны с помощью (11):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{L} \frac{d\theta}{ds} \quad \text{при} \quad s = 1, \quad \rho = \frac{L}{\varphi + 2kq} = \frac{L}{\varphi + 4k(K(k) - F_1)}, \quad \varphi = \frac{\pi}{N}.$$

Критическое значение минимального радиуса кривизны можно оценить по формуле $\rho_{cr} = hE/(2\sigma_{cr})$, $\rho \geq \rho_{cr}$, где σ_{cr} — предельная разрушающая нагрузка; E — модуль упругости; h — толщина. Если в некоторой точке изогнутого сегмента радиус кривизны меньше критического, то эта точка является точкой перелома. В частности, для обода из волокон кевлара имеем $\sigma_{cr} = 3 \cdot 10^9$ Па, $E = 1,124 \cdot 10^{11}$ Па, $h = 0,0002$ м, $\rho_{cr} \approx 0,4$ см; для обода из титана $\sigma_{cr} = 0,5 \cdot 10^9$ Па, $E = 1,1 \cdot 10^{11}$ Па, $h = 0,0002$ м, $\rho_{cr} \approx 2,2$ см.

2. Вычисление деформированных форм обода. Рассмотрим примеры аналитических вычислений и визуализаций (в пакете Maple) для деформированных сжатых форм обода различных размеров (при различных заданных значениях R и N) с помощью выражений (15).

На рис. 4 приведены последовательные формы трансформированных состояний обода с числом сегментов $N = 16$, углом сектора одного сегмента $\varphi = 360^\circ/N = 22,5^\circ$. Обод имеет следующие исходные параметры: радиус $R = 2,25$ м, высоту $b = 0,077$ м, толщину $h = 0,0006$ м, плотность материала 1450 кг/м³, модуль упругости $E = 50$ ГПа, момент инерции $I \approx 1,38 \cdot 10^{-12}$ м⁴, изгибную жесткость $D = EI \approx 0,069$ Н·м². Длина одного полусегмента $L = 2\pi R/(2N) \approx 0,4418$ м, масса обода приблизительно равна $0,95$ кг.

Для предельно сжатого состояния обода (кривая 5 на рис. 4) получены следующие значения параметров: модуль $k \approx 0,99978$, нагрузка, приходящаяся на один сегмент (реакция), $P \approx 28,8$ Н, безразмерный параметр нагрузки $q^2 \approx 81,081$, предельный радиус кривизны $\rho \approx 0,024$ м, максимальные напряжения $\sigma_\tau = 0,6$ МПа, внутренний и внешний радиусы обода в сжатом состоянии $R_1 \approx 0,192$ м, $R_2 \approx 0,586$ м, коэффициент сжатия (трансформации) $\varkappa = R/R_2 \approx 3,84$.

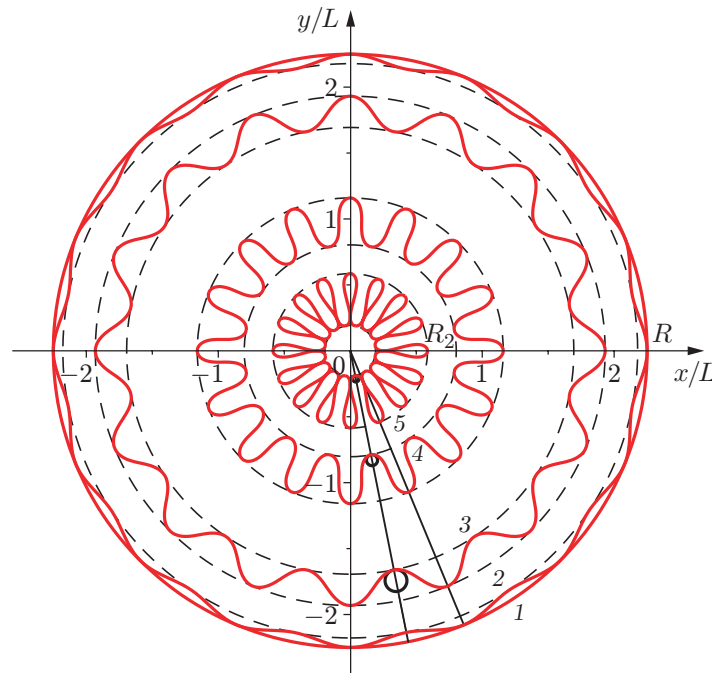


Рис. 4. Равновесные формы при сжатии (трансформировании) обода при $N = 16$, $\varphi = \pi/16$:

1 — окружность (развернутое состояние обода), 2 — первая деформированная линия обода после потери им устойчивости при превышении критического значения внешней нагрузки ($k \approx 0,724185$), 3, 4 — промежуточные формы деформации обода (3 — $k \approx 0,9$, 4 — $k \approx 0,99$), 5 — предельное теоретическое сжатое состояние обода ($k \approx 0,99978$)

Таким образом, в работе выполнено моделирование обода космической антенны, изготовленного из гибких упругих материалов. Вторым перспективным вариантом построения такого обода может быть использование полимерных композиционных материалов с памятью формы. В этом случае управлять трансформацией обода можно путем изменения температуры. Построенная аналитическая модель не учитывает температурные деформации и остаточные напряжения, однако позволяет описать криволинейные формы трансформации обода на основе ПКМ с памятью формы. В случае использования ПКМ с памятью формы криволинейные промежуточные формы трансформации гибкого упругого обода (см. рис. 4) геометрически эквивалентны. Полученные выражения для энергии упругой деформации (16), (17) можно использовать при оценке работы, необходимой для нагрева и трансформации обода из ПКМ с памятью формы. Для более точного моделирования трансформации обода с учетом эффектов, связанных с памятью формы, необходимо проводить конечно-элементное моделирование.

Заключение. В работе представлена новая геометрически нелинейная модель гибкого трансформируемого обода большой космической антенны, изготовленного с использованием композиционного материала. Модель может применяться, в частности, для оценки использования ПКМ с памятью формы. Рассмотрена конструкция кругового цилиндрического обода для рефлектора антенны, который представляет собой сегмент пластины углепластика прямоугольного сечения. Показано, что в “свернутой” конфигурации обод обжимается, принимает волнообразную осесимметричную форму из четного числа s-образных сегментов и накапливает энергию вследствие структурной деформации.

Сформулирована нелинейная краевая задача для трансформированного состояния обода и получены аналитические решения в эллиптических функциях Якоби и интегралах,

описывающие закритические формы сжатого обода после потери им устойчивости. Полученные аналитические решения легко реализуются в пакете Maple. Выполненный анализ с полным учетом геометрической нелинейности позволяет определять форму сжатого обода, его кривизну, основные геометрические параметры сжатого обода, распределение напряжений, накопленную энергию упругой деформации и нагрузку, необходимую для его сжатия. Такой анализ необходим на ранней стадии проектирования обода антенны.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Shintate K., Terada K., Usui M., et al.** Large deployable reflector (LDR) // J. Nat. Inst. Inform. Comm. Technol. 2003. V. 50, N 3/4. P. 33–39.
2. **Murata Y., Hirabayashi H., Natori M. C., et al.** Development of the large and high accuracy deployable antenna for the VSOP-2 mission. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: [http://www.ursi.org/Proceedings/ProcGA05/pdf/VP.11\(01277\).pdf](http://www.ursi.org/Proceedings/ProcGA05/pdf/VP.11(01277).pdf).
3. **Tibert G.** Deployable tensegrity structures for space applications: Ph. D. Thesis. Stockholm: Roy. Inst. Technol., 2002. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: <http://www2.mech.kth.se/~gunnart/TibertDocThesis.pdf>.
4. **Lopatin A. V., Rutkovskaya M. A.** Design of large space antenna composite rim // Composite Structures. 2006. V. 76. P. 99–105.
5. **Лопатин А. В., Захаров Ю. В., Охоткин К. Г. и др.** Геометрически нелинейная модель трансформируемого обода большой космической антенны с гибкими композитными элементами // Вестн. Сиб. гос. аэрокосм. ун-та. 2012. № 5. С. 75–80.
6. **Власов А. Ю., Пасечник К. А., Мартынов В. А.** Конструкторско-технологические аспекты создания прецизионных изделий сложной формы из полимерных композиционных материалов // Вестн. Сиб. гос. аэрокосм. ун-та. 2016. Т. 17, № 2. С. 460–465.
7. **Захаров Ю. В., Охоткин К. Г.** Нелинейный изгиб тонких упругих стержней // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 5. С. 124–131.
8. **Antman S. S.** Nonlinear problems of elasticity. N. Y.: Springer, 1995.
9. **Panayotounakos D. E., Sotiropoulos A. B.** Exact parametric analytic solutions of the elastic ODEs for bars including effects of the transverse deformation // Intern. J. Non-Linear Mech. 2004. V. 39, N 10. P. 1555–1570.
10. **Batista M.** Analytical treatment of equilibrium configurations of cantilever under terminal loads using Jacobi elliptical functions // Intern. J. Solids Structures. 2014. V. 51, iss. 13. P. 2308–2326.
11. **Попов Е. П.** Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986.
12. **Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю.** Динамические формы потери устойчивости упругих систем // Докл. АН СССР. 1949. Т. 64, № 6. С. 779–782.
13. **Морозов Н. Ф., Беляев А. К., Товстик П. Е., Товстик Т. П.** Задача Ишлинского — Лаврентьева на начальном этапе движения // Докл. АН. 2015. Т. 463, № 5. С. 543–546.
14. **Алехин В. В., Аннин Б. Д., Бабичев А. В., Коробейников С. Н.** Собственные колебания и выпучивание графеновых листов // Докл. АН. 2013. Т. 453, № 1. С. 37–40.
15. **Шкутин Л. И.** Численный анализ разветвленных форм изгиба стержней // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 2. С. 141–147.

Поступила в редакцию 1/VI 2017 г.