



**ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ
ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГО-ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ С ПОЛОСТЬЮ**

Т. Б. Дуйшеналиев¹, Ж. Т. Кожобеков², Г. К. Тугельбаева³

¹Национальный исследовательский университет “МЭИ”, E-mail: duishenaliev@mail.ru,
ул. Красноказарменная 14, г. Москва 111250, Россия,

²Институт механики и машиноведения им. У. А. Джолдасбекова КН МОН РК, E-mail: ein04@yandex.ru,
ул. Курмангазы 29, г. Алматы 050010, Республика Казахстан,

³Военный институт сухопутных войск МО РК, E-mail: Gk0430@mail.ru,
ул. Красногорская 35, г. Алматы 050053, Республика Казахстан

Рассмотрено напряженно-деформируемое состояние среды вокруг полости, расположенный на определенной глубине в четверти упруго-вязкопластического пространства при воздействии динамических нагрузок со стороны дневной поверхности. Предложена механико-математическая модель на основе системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка гиперболического типа, которая решается с помощью численного метода С. К. Годунова — “распада разрыва”. Полученные результаты можно использовать при проектировании и строительстве шахт, подземных сооружений и других объектов для оценки прочности подземных сооружений.

Напряженно-деформированное состояние, упруго-вязкопластичность, четверть пространства, полость, динамическая нагрузка, волна

**MATHEMATICAL MODEL CONSTRUCTION FOR WAVE SPREADING
RESEARCH IN RESILIENT VISCOUS-PLASTIC QUARTER-SPHERE WITH CAVITY**

N. D. Duishenaliev¹, Z. T. Kozhabekov², and G. K. Tugelbayeva³

¹National Research University “Moscow Power Engineering Institute”, E-mail: duishenaliev@mail.ru,
ul. Krasnokazarmennaya 14, г. Moscow 111250, Russia,

²Djoldasbekov Institute of Mechanics and engineering,
Science Committee of the Ministry of Education and Science, Republic of Kazakhstan,
E-mail: ein04@yandex.ru, ul. Kurmangazy 29, Almaty 050010, Republic of Kazakhstan

³Military Institute of Ground Forces, Ministry of Defense, Republic of Kazakhstan,
E-mail: Gk0430@mail.ru, ul. Krasnogorskaya 35, Almaty 050053, Republic of Kazakhstan

The given research paper reviews tensed and deformed condition around the cavity, disposed on definite depth in resilient viscous-plastic quarter space under the dynamic pressure by the daylight surface. To solve the problem, it is necessary to construct mechanic-mathematical model using system in differential equations in private derivative first-order of hyperbolic type, which can be solved by the usage the numerical method of S. K. Godunov, named “gap disintegration”. The received numeric solving of the above mentioned task can be used in projecting and constructing the minefields, underground constructions and other objects.

Tensed and deformed condition, resilient viscous-plastic, quarter space, cavity, dynamic pressure, wave

Исследование распространения волн напряжений в упругих и упруго-вязкопластических средах — одно из актуальных направлений классической механики и имеет большое прикладное значение. Для решения практических задач в инженерной сейсмологии, а также в сейсморазведке большой интерес представляют задачи распространения волн в грунтовых слоях, где основанием служат жесткие коренные породы.

Основным источником для исследования и определения глубинных строений в сейсморазведке и в специальных задачах в инженерной сейсмологии являются волновые движения, которые возникают от взрывов. Взрыв, как источник динамического возбуждения, обладает рядом недостатков, к которым относятся наличие большого набора частот, содержащихся в колебаниях, и ограничения в соответствии с требованиями охраны окружающей среды.

Данная работа посвящена исследованию распространения упруго-вязкопластических волн в четверти пространства с полостью [1]. Поставленная задача решается путем механико-математического моделирования, с применением метода “распада разрыва” С. К. Годунова [2–4], который хорошо зарекомендовал себя для численного интегрирования квазилинейных систем уравнений гиперболического типа, а также для решения широкого круга задач газовой динамики, аэродинамики и других разделов механики сплошной среды, в том числе для механики деформируемого твердого тела. Преимущество метода заключается в том, что решение, найденное по этому методу, более точно описывает реальные процессы, чем расчеты, полученные другими методами.

Основным структурным элементом метода и главной “массовой операцией” при его практической реализации является решение задачи о распаде разрыва с параметрами распространения волн в соседних ячейках разностной сетки. Эта схема допускает наглядную физическую интерпретацию, соответствующую выбору разностной сетки с усредненными значениями физических величин. Как известно, в результате распространения волн, происходит взаимодействие двух соседних ячеек с различными состояниями, где осуществляются “перетекания” массы, импульса и энергии через общую границу ячеек [2–4].

Распространения упруго-вязкопластических волн в четверти пространства с полостью.

Дано упруго-вязкопластическое волновое поле в четверти пространства с полостью при воздействии динамических нагрузок со стороны дневной поверхности на рис. 1.

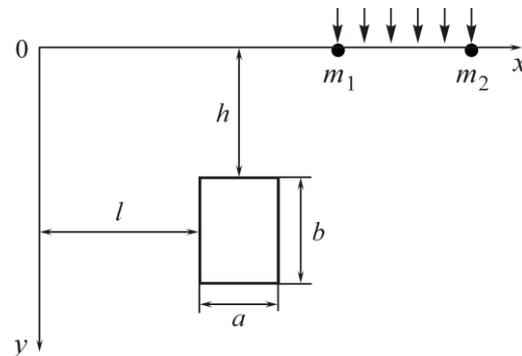


Рис. 1. Упруго-вязкопластическое четверть пространства с полостью

Исследуем плоское волновое поле с полостью. Полость находится на глубине h от дневной поверхности и на расстоянии l от вертикальной свободной от нагрузки поверхности. Со стороны дневной поверхности на участке $m_1 \leq x \leq m_2$ действуют следующие динамические нагрузки [5]:

$$\begin{cases} v = tBe^{-At}, \\ u = 0, \end{cases} \quad \text{при} \quad \begin{cases} m_1 \leq x \leq m_2, \\ y = 0, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

где A, B — постоянные величины.

Уравнения упруго-вязкопластической среды П. Пэнжина [6]:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \frac{1}{2K} \dot{s} \delta_{ij} + \eta [\Phi(F)] \left(\alpha \delta_{ij} + \frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} \right), \quad (1)$$

где α — параметр, характеризующий скорость расширения грунта; $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$ — девиатор тензора напряжения, $[\Phi(F)] = \begin{cases} 0 & \text{при } F \leq 0, \\ F & \text{при } F > 0, \end{cases}$ $F = \frac{\alpha J_1 + \sqrt{J_2}}{k_0} - 1$, $J_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ — первый инвариант тензора напряжений; $J_2 = (1/2)s_{ij}s_{ij}$ — второй инвариант тензора напряжений; k_0 — предел текучести при чистом сдвиге; K — модуль объемного сжатия, μ — постоянные Ляме, η — коэффициент вязкости.

Функция $\Phi(F)$ определяется на основе результатов экспериментальных исследований по динамическим свойствам материала. Соответствующий выбор этой функции позволяет отразить влияние скорости деформации на предел текучести.

Рассмотрим плоскую деформацию упруго-вязкопластической среды со следующими параметрами:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_{zz} = 0, \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{yz} = 0, \end{aligned}$$

где u_x , u_y — смещение по осям x и y , $u = du_x/dt$, $v = du_y/dt$ — скорости по осям x и y .

Объемная деформация имеет вид

$$\dot{\varepsilon}_{ii} = \frac{1}{3k} \dot{\delta}_{ii} + 3\alpha\eta \langle \Phi(F) \rangle. \quad (2)$$

После элементарных математических преобразований в системах уравнений (1) и (2) окончательно получаем полную систему уравнений в частных производных первого порядка гиперболического типа для динамической задачи упруго-вязкопластической среды в виде [7–12]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}, \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \left(1 - \frac{2}{\gamma^2}\right) \frac{\partial v}{\partial y} + \Phi_2, \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} = \left(1 - \frac{2}{\gamma^2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \Phi_1, \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \Phi_3, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= -\frac{1}{\gamma^2} \eta \langle \Phi(F) \rangle \left[(3\gamma^2 - 4)\alpha + \frac{2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}}{3\sqrt{J_2}} \right], \\ \Phi_2 &= -\frac{1}{\gamma^2} \eta \langle \Phi(F) \rangle \left[(3\gamma^2 - 4)\alpha + \frac{2\sigma_{yy} - \sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{3\sqrt{J_2}} \right], \quad \Phi_3 = -\frac{1}{\gamma^2} \eta \langle \Phi(F) \rangle \frac{\tau}{\sqrt{J_2}}. \end{aligned}$$

Для решения системы уравнений (3) применяем численный метод “распада разрыва” С. К. Годунова, для этого исследуемую область разбиваем на равные элементарные ячейки прямоугольной формы со сторонами Δx и Δy (рис. 2) [2–4].

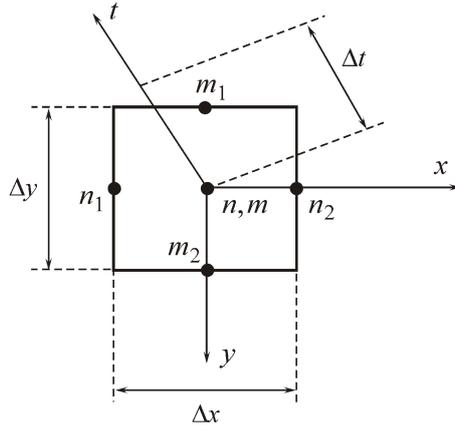


Рис. 2. Схема элементарной ячейки

В результате взаимодействия двух соседних ячеек с различными состояниями происходят “перетекания” массы, импульса и энергии через общую границу ячеек. Используем метод, описанный в работе С. К. Годунова, суть которого заключается в расщеплении системы уравнений на промежуточном слое на одномерные системы уравнений. Исходя из этого систему уравнений (3) разобьем на две системы, одна из которых зависит от y , другая — от x [2–4, 12, 13]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x}, \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \Phi_2, \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} = \left(1 - \frac{2}{\gamma^2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \Phi_1, \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \Phi_3. \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}, \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = \left(1 - \frac{2}{\gamma^2}\right) \frac{\partial v}{\partial y} + \Phi_2, \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} = + \frac{\partial v}{\partial y} + \Phi_1, \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \Phi_3. \end{array} \right. \quad (5)$$

Из системы уравнений (4) и (5) получаем характеристические уравнения и соотношения на них [11]:

$$\left\{ \begin{array}{lll} d(u + \sigma_{xx}) = \Phi_1 dt & \text{на прямой} & x + t = \text{const}, \\ d(u - \sigma_{xx}) = -\Phi_1 dt & \text{на прямой} & x - t = \text{const}, \\ d(v + \gamma\tau) = \gamma\Phi_3 dt & \text{на прямой} & x + \frac{1}{\gamma}t = \text{const}, \\ d(v - \gamma\tau) = -\gamma\Phi_3 dt & \text{на прямой} & x - \frac{1}{\gamma}t = \text{const}. \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} d(u + \gamma\tau) = \gamma\Phi_3 dt & \text{на прямой} & y + \frac{1}{\gamma}t = \text{const}; \\ d(u - \gamma\tau) = -\Phi_3 dt & \text{на прямой} & y - \frac{1}{\gamma}t = \text{const}, \\ d(v + \sigma_{yy}) = \Phi_2 dt & \text{на прямой} & y + t = \text{const}, \\ d(v - \sigma_{yy}) = -\Phi_2 dt & \text{на прямой} & y - t = \text{const}. \end{array} \right. \quad (7)$$

Из системы уравнений (6) и (7) получим характеристические линии (рис. 3) [4, 11].

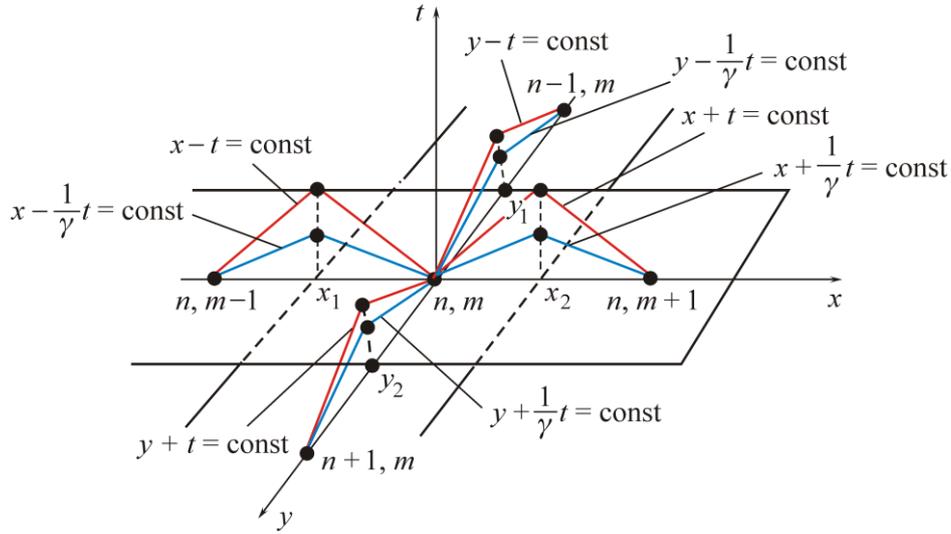


Рис. 3. Схема характеристик в графическом виде

Характеристические соотношения используются для вывода конечно-разностных систем уравнений при вычислении параметров среды в точках, расположенных на границах ячеек (рис. 3) [4].

Конечно-разностные уравнения волнового поля упруго-вязкопластического пространства с полостью при воздействии динамической нагрузки. Для численного решения сформулированной задачи примем разностную схему, использованную в работе С. К. Годунова. Учитывая характеристические соотношения (6), (7) и систему уравнений (3), составляем систему конечно-разностных уравнений для решения поставленной задачи [4, 12, 13]:

$$\begin{cases} u^{n,m} = u_{n,m} + \Delta t \frac{\sigma_{xx,n2} - \sigma_{xxn1}}{\Delta x} + \Delta t \frac{\tau_{m2} - \tau_{m1}}{\Delta y}, \\ v^{n,m} = v_{n,m} + \Delta t \frac{\tau_{n2} - \tau_{n1}}{\Delta x} + \Delta t \frac{\sigma_{yy,m2} - \sigma_{yy,m1}}{\Delta y}, \\ \sigma_{xx}^{n,m} = \sigma_{n,m} + \Delta t \frac{u_{n2} - u_{n1}}{\Delta x} + \Delta t \left(1 + \frac{2}{\gamma^2}\right) \frac{v_{m2} - v_{m1}}{\Delta y} + \Delta t \Phi_{1n,m}, \\ \sigma_{yy}^{n,m} = \sigma_{n,m} + \Delta t \left(1 + \frac{2}{\gamma^2}\right) \frac{u_{n2} - u_{n1}}{\Delta x} + \Delta t \frac{v_{m2} - v_{m1}}{\Delta y} + \Delta t \Phi_{2n,m}, \\ \tau^{n,m} = \tau_{n,m} + \Delta t \frac{u_{m2} - u_{m1}}{\gamma^2 \Delta y} + \Delta t \frac{v_{n2} - v_{n1}}{\gamma^2 \Delta x} + \Delta t \Phi_{3n,m}. \end{cases} \quad (8)$$

На основе уравнений (8) можно вычислить величины $u^{n,m}$, $v^{n,m}$, $\sigma^{n,m}$, $\tau^{n,m}$ в слое для следующего шага по времени.

Для получения численных решений поставленной задачи в качестве объекта исследования использовались параметры суглинки: $\Delta t = dt = 0.0024888$, $\Delta x = dx = 0.005$, $\Delta y = dy = 0.005$, $\gamma = a/b = 1.6$, $a = 320$ м/с, $b = 200$ м/с; $\alpha = -0.02$; $\eta = 350$ с⁻¹, $\rho = 0.0018$ кг/м³, $k_0 = 0.6$ кг/см², $v = kdtB \exp(-Akt)$, где $A = 133.93335$; $B = 0.1193379$; $t = kdt$; $k = 1, 2, 3, \dots$, размеры исследуемой области и полости $N_x = 200$, $M_y = 200$, $n_1 = 20$, $n_2 = 24$, $m_1 = 10$, $m_2 = 16$.

Результаты численного решения конечно-разностных уравнений (8) показаны на рис. 4.

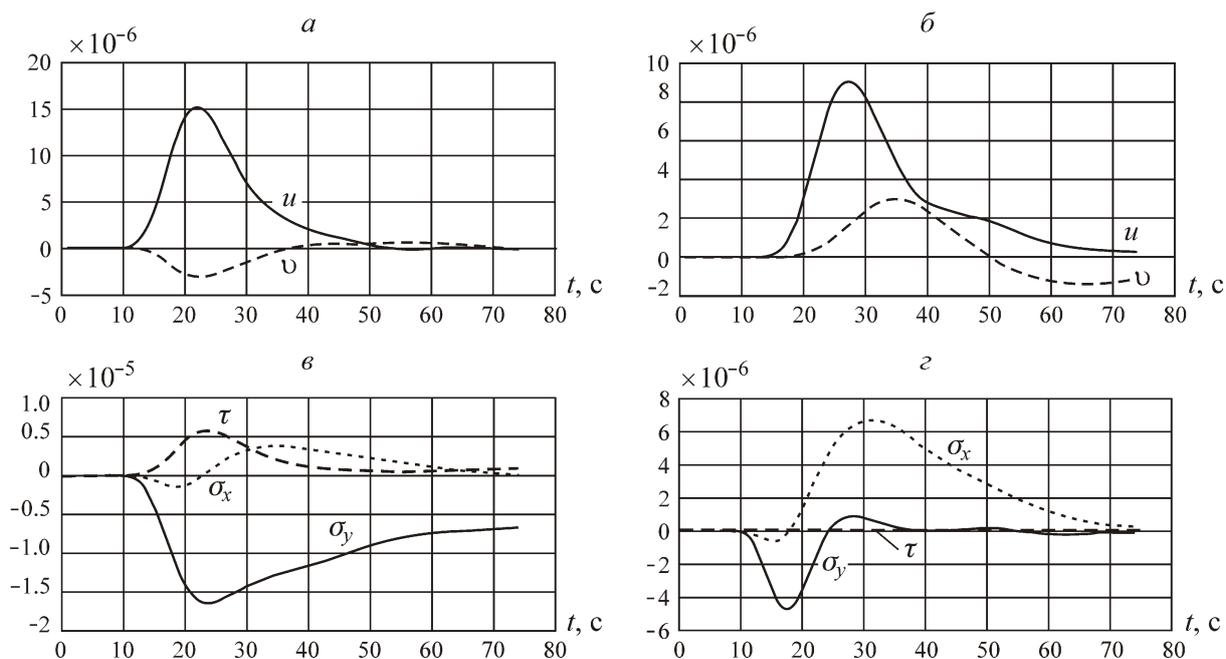


Рис. 4. Изменение напряжений: *a* — в верхней левой угловой точке полости; *б* — в средней точке правой боковой стенки полости; *в* — в верхней левой угловой точке полости; *г* — в средней точке верхней стенке полости

ВЫВОДЫ

Исследованы волновые процессы в упруго-вязкопластической среде с полостью при воздействии динамической нагрузки со стороны дневной поверхности. На основе математических моделей и пакета прикладных программ получены зависимости нормальных, касательных напряжений и скоростей от координат и времени в среде и вокруг прямоугольной полости.

Установлено, что усиление напряженно-деформированного состояния наблюдается над полостью. Это связано с тем, что в указанной области падающая волна, с течением времени доходя до верхней стенки полости, отражается от нее, т. е. происходит наложение падающей и отраженной волн. В результате напряжение в этой области превосходит напряжение в остальных областях и фронт отраженной волны, распространяясь в обратном направлении, усиливает ее напряженно-деформированное состояние

Представленная работа является составной частью НИР института Механики и машиноведения КН МОН РК по теме “Математические модели динамики и устойчивости однородных и неоднородных анизотропных массивов с полостями при упруго-вязкопластических и нелинейных деформациях”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. **Popov G. Ya.** The precise solution of combined task theory of rigidity for the quarter surface, *Mechanics of Solids*, 2003, no. 6, pp. 31–39. [**Попов Г. Я.** Точное решение смешанной задачи теории упругости для четверть пространства // *Изв. РАН. МТТ.* — 2003. — № 6. — С. 31–39.]
2. **Godunov S. K., Zabrodin A. V., and Prokopov G. P.** Differentiate scheme for binary nonstandard tasks of gas dynamics and calculation of by-pass with diverged blast wave, *Moscow, Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1961, no. 6, pp. 1020–1059. [**Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П.** Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной. — М.: ЖВМиМФ, 1961. — № 6. — С. 1020–1059.]

3. **Cheban V. G., Nakhval I. K., Sabodash P. F., and Cherednichenko R. A.**, Numeral methods of dynamic resilient theory tasks solving, Kishinev, Shtiinca, 1976, 288 pp. [**Чебан В. Г., Нахвал И. К., Сабодаш П. Ф., Чередниченко Р. А.** Численные методы решения задач динамической теории упругости. — Кишинев: Штиинца, 1976. — 288 с.]
4. **Godunov S. K., Zabrodin A. V., Ivanov M. Ya., Kraiko A. I., and Prokopov G. P.** Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics, Moscow, Nauka, 1976, 400 pp. [**Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. И., Прокопов Г. П.** Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1976. — 400 с.]
5. **Masanov Zh. K., Kozhabekov Zh. T., Tugelbayeva G. K., and Sarsenov B. Sh.** Resilient and resilient viscous-plastic wave spreading in layered semi-sphere with cavity, Monography, Almaty, 2017, 292 pp. [**Масанов Ж. К., Кожабеков Ж. Т., Тугельбаева Г. К. Сарсенов Б. Ш.** Распространение упругих и упруго-вязкопластических волн в слоистых полупространствах с полостью. Монография. — Алматы, 2017. — 292 с.]
6. **Pezhina P.** Basic issues of viscoplasticity, Moscow, Mir, 1968, pp. 180. [**Пэжина П.** Основные вопросы вязкопластичности. — М.: Мир, 1968. — 180 с.]
7. **Turekulova A. N.** Investigation of the elastic-viscoplastic wave process in rods by the Godunov method, Bulletin of the Academy of Sciences of the Kazakh SSR, Dep. at VINITI, no. 8254-B85, 12 pp. [**Турекулова А. Н.** Исследование упруго-вязкопластического волнового процесса в стержнях методом Годунова // Вестник АН КазССР. — Деп. в ВИНТИ. № 8254-B85. — 12 с.]
8. **Sarsenov B. Sh.** On the propagation of stress waves in the elastic-viscoplastic layer, Bulletin of the Academy of Sciences of the Kazakh SSR, Dep. in VINITI 1985, no. 7783-B85, 15 pp. [**Сарсенов Б. Ш.** К распространению волн напряжений в упруго-вязкопластическом слое // Вестник АН КазССР. — Деп. в ВИНТИ. — 1985. — № 7783-B85. — 15 с.]
9. **Utebayev M. N.** Determination of the stress field of an elastic half-space under the action of a piston with a rigid flange by a numerical method, Bulletin of the Academy of Sciences of the Kazakh SSR, Dep. at VINITI, 1986, no. 5789-B86, 8 pp. [**Утебаев М. Н.** Определение поля напряжений упругого полупространства при действии поршня с жестким фланцем численным методом. // Вестник АН КазССР. — Деп. в ВИНТИ. — 1986. — № 5789-B86. — 8 с.]
10. **Utebayev M. N.** Propagation of two-dimensional waves in an elastic-viscoplastic layer on a rigid foundation, Bulletin of Kazakh National University, 2004, no. 2, pp. 141–151. [**Утебаев М. Н.** Распространение двумерных волн в упруговязкопластическом слое на жестком основании // Вестник КазНУ. — 2004. — № 2. — С. 141–151.]
11. **Utebayev M. N.** Propagation of two-dimensional waves in an elastic-viscoplastic half-space, Modern problems of continuum mechanics, Hydrogasdynamics and exogenous geological processes of nature, Bishkek, 2004, issue 3, pp. 152–159. [**Утебаев М. Н.** Распространение двумерных волн в упруговязкопластическом полупространстве // Современные проблемы механики сплошных сред. Гидрогазодинамика и экзогенно-геологические процессы природы. — Бишкек, 2004. — Вып. 3. — С. 152–159.]
12. **Massanov Zh. K., Vaimakhan R. B., Kozhabekov Zh. T., Tugelbayeva G. K., Madaliyev T. B., and Abdraimov E. S.** Wave spreading in resilient viscous-plastic layer with cavity on the rigid base, News of National Academy of science of RK. Series of geology and technical science, Almaty, 2020, vol. 4, no. 436, pp. 56–64. [**Масанов Ж. К., Кожабеков Ж. Т., Баймахан Р. Б., Тугельбаева Г. К., Мадалиев Т. Б., Абдраимов Э. С.** Распространения волны на упруго-вязкопластическом слое с полостью на упругом основании // Изв. НАН РК. Сер. Геология и технические науки. — 2020. — № 1. — С. 56–64.]
13. **Tugelbayeva G. K.** Mathematical models for numerical solution of no stationary problems of geomechanics, AIP Conference Proceedings 2312. 050024, 2020. <https://doi.org/19.1063/5/0035683>.