

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 517.511

Ю. Е. Воскобойников, А. Б. Колкер

*(Новосибирск)*АПРОКСИМАЦИЯ ИЗОЛИНИЙ ИЗОБРАЖЕНИЙ
СГЛАЖИВАЮЩИМИ СПЛАЙНАМИ

Предложен новый подход к аппроксимации изолиний изображений сглаживающими сплайнами, исключаяющий этап параметризации исходной изолинии и позволяющий задавать «индивидуальную» гладкость для любого фрагмента изолинии. Выбор параметра сглаживания осуществлен по заданной ширине аппаратной функции сплайна, что не требует задания априорной информации о числовых характеристиках шума и «наполняет» процедуру выбора содержательным смыслом. Приведенные результаты вычислительного эксперимента подтверждают высокую эффективность предложенного подхода.

Введение. Одним из способов описания пространственной структуры сложного изображения является построение карты изолиний сечений параллельными плоскостями. Полученный набор замкнутых кривых достаточно полно характеризует пространственную геометрию изображения. Свойство замкнутости может нарушаться в ситуациях, когда обрабатывается лишь фрагмент пересечения изображения с секущей плоскостью (например, при уменьшении объема вычислений или наличии ограничений по ресурсам). Общей чертой алгоритмов построения изолиний является то, что значения изолиний вычисляются в узлах прямоугольной сетки (как правило, имеющей равный шаг). Для «отрисовки» изолиний или дальнейшей их обработки необходимо вычислить значения изолиний в точках, отличных от узлов сетки, т. е. нужно выполнить двумерную интерполяцию.

Задача существенно усложняется в случаях (достаточно часто встречающихся в практике), когда значения изолиний в узлах сетки искажены случайными погрешностями. Причины, вызывающие эти погрешности, в дальнейшем называемые шумами изолиний, весьма различны: шумы измерения исходного изображения, остаточные шумы после фильтрации изображения, погрешности вычисления значений изолиний в узлах сетки и т. д. В этих случаях вместо алгоритмов интерполяции необходимо использовать аппроксимирующие алгоритмы. Использование последних связано с существенными затруднениями, обусловленными в основном двумя причинами: значительными вычислительными затратами и выбором оптимальных значений параметров алгоритмов аппроксимации. Последняя причина может привес-

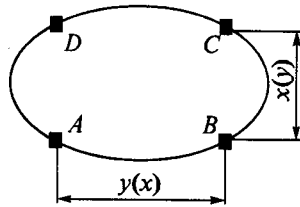


Рис. 1. Пример разбиения кривой на интервалы однозначности

ти уже к принципиальным трудностям, так как числовые характеристики (математическое ожидание, дисперсия) шумов изолиний, как правило, неизвестны из-за сложной статистической природы шумов.

Поэтому в данной работе предлагается новый подход к аппроксимации изолиний сглаживающими сплайнами, исключая этап параметризации исходной изолинии и позволяющий задавать «индивидуальную» гладкость для любого фрагмента изолинии. Выбор параметра сглаживания осуществляется по заданной ширине аппаратной функции сплайна, что не требует задания априорной информации о числовых характеристиках шума и «наполняет» процедуру выбора содержательным смыслом.

Однозначное представление произвольных кривых. Любую непрерывную кривую на плоскости можно разбить на конечные интервалы, на которых свойство однозначности не нарушается. В дальнейшем такие интервалы будем называть интервалами однозначности функции. Так, на рис. 1 изолиния эллиптической формы разбита на четыре интервала, на которых свойство однозначности выполняется. В зависимости от положения интервала однозначности кривую можно описывать прямой функцией $y(x)$ или обратной $x(y)$. Так, разбиение, показанное на рис. 1, предполагает использование прямой функции на участках AB , CD и обратной на участках BC , DA .

Разбив кривую на интервалы однозначности, можно построить сглаживающий сплайн, не прибегая к параметрическому представлению функции. Интервал, на котором будет построен сплайн, назовем интервалом построения сплайна. В некоторых случаях один интервал однозначности может содержать несколько интервалов построения сплайна (например, когда на одном интервале однозначности присутствуют участки изолинии с существенно различающейся гладкостью).

Приведем несложный алгоритм разбиения кривой на интервалы построения, на которых выполняется требование однозначности. Алгоритм включает следующие этапы.

1. В процессе обхода изолинии подсчитываются первые разности координат Δx_k , Δy_k , а также их суммы на текущем интервале монотонности Zx_k , Zy_k :

$$\begin{cases} \Delta x_k = x_k - x_{k-1}; \\ \Delta y_k = y_k - y_{k-1}; \\ Zx_k = \sum_{i=\tilde{K}}^k \Delta x_i; \\ Zy_k = \sum_{i=\tilde{K}}^k \Delta y_i, \end{cases}$$

где \tilde{K} – первая точка текущего интервала построения.

2. Проверяется условие принадлежности очередной точки интервалу однозначности. Если текущий фрагмент кривой отображается прямой функцией $F = y(x)$, то условие имеет вид

$$\begin{cases} \Delta x_k \Delta x_{k-1} > 0; \\ Zx_k > 2Zy_k, \end{cases}$$

если текущий фрагмент кривой отображается обратной функцией $F = x(y)$, то условие имеет вид

$$\begin{cases} \Delta y_k \Delta y_{k-1} > 0; \\ Zy_k > 2Zx_k. \end{cases}$$

3. Если условия принадлежности выполняются, то точка (x_k, y_k) включается в текущий интервал однозначности и проверяется следующая точка. Если условие нарушается, то в качестве краевой точки текущего интервала однозначности берется точка (x_{k-1}, y_{k-1}) , а точка (x_k, y_k) становится первой точкой нового интервала однозначности.

Результатом действия данного алгоритма будет набор интервалов, на которых характер отображения кривой по типу прямой или обратной функции чередуется в шахматном порядке. Описанный алгоритм позволяет разбить изолинию на интервалы однозначности и требует небольшого объема вычислений. Отметим основной недостаток алгоритма: при выборе точек разбиения на интервалы однозначности не учитывается кривизна изолинии.

Поэтому во втором предлагаемом алгоритме точки разбиения выбираются на участках с минимальной кривизной изолинии, что существенно облегчает задачу «гладкой склейки» сглаживающих сплайнов, вычисленных на соседних интервалах построения. Кратко опишем этот алгоритм. Предположим, что исходная изолиния разбита на интервалы однозначности $I_k^{(x)}$, $I_k^{(y)}$ по каждой из координат. Тогда в качестве новой точки разбиения можно выбрать точку ξ_k , удовлетворяющую условию $\xi_k \in I_k^{(x)} \cap I_k^{(y)}$ и доставляющую минимум функционалу, определяющему кривизну исходной изолинии. Алгоритм позволяет выбирать точки разбиения, более удобные для дальнейшего построения сглаживающих сплайнов, хотя и требует в сравнении с предыдущим большего объема вычислений.

Построение сглаживающих сплайнов. Для определенности возьмем интервал построения сплайна, содержащий n узлов, в которых заданы координаты (x_i, y_i) точек изолинии, при этом предположим, что $y_i = y(x_i)$. Напомним, что кубическим сплайном $S_\alpha(x)$ называется полином со следующими свойствами [1, 2]:

1. На каждом интервале $[x_i, x_{i+1})$ $S_\alpha(x)$ можно представить кубическим полиномом, в частности в виде

$$S_\alpha(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3. \quad (1)$$

2. На всем отрезке $[x_1, x_n]$ определения сплайна функция $S_\alpha(x)$ дважды непрерывно дифференцируема.

В отличие от интерполяционного сплайна, проходящего через точки $(x_i, y_i), i=1, \dots, n$, сглаживающий сплайн проходит в определенной близости от этих точек, тем самым сглаживая погрешности задания координат (x_i, y_i) . Для используемых далее краевых условий (задается либо значение первой производной, либо нулевое значение второй производной) сплайн $S_\alpha(x)$ доставляет минимум функционалу [1, 2]:

$$M_\alpha[\varphi] = \alpha \int_{x_1}^{x_n} |\varphi''(x)|^2 dx + \sum_{i=1}^n p_i^{-1} (y_i - \varphi(x_i))^2, \quad (2)$$

где α – параметр сглаживания, $p_i > 0$ – весовые множители. Видно, что первое слагаемое определяет гладкость сплайна, а второе – его адекватность исходным данным. При $\alpha \rightarrow 0$ сглаживающий кубический сплайн (СКС) «вырождается» в интерполяционный сплайн. Для однозначного определения коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i представления (1) в точках x_1, x_n задаются соответствующие краевые условия [1, 2]. Так как алгоритмы вычисления коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i при заданных α и p_i подробно изложены в литературе (например, [1, 2]), то остановимся только на проблеме гладкого сопряжения двух соседних сплайнов. Определим условия гладкого сопряжения следующими требованиями: непрерывностью значений самих сплайнов и их первых производных в точке сопряжения.

Пусть AB, BC – два соседних интервала построения сплайнов (см. рис. 1), и на первом интервале используется прямая функция $y(x)$, а на втором – обратная $x(y)$. Тогда для сплайнов $S_\alpha^{(AB)}(x), x \in [x_A, x_B]$, и $S_\alpha^{(BC)}(y), y \in [y_B, y_C]$, условия гладкого сопряжения примут вид

$$S_\alpha^{(AB)}(x_B) = S_\alpha^{(BC)}(y_B); \quad (3)$$

$$S_\alpha'^{(BC)}(y_B) = C \frac{1}{S_\alpha'^{(AB)}(x_B)}, \quad \begin{cases} C = 1, & \text{если } \Delta y > 0, y \in [B, C], \\ C = -1, & \text{если } \Delta y < 0, y \in [B, C]. \end{cases} \quad (4)$$

Возникает вопрос, как реализовать эти требования при построении сглаживающих сплайнов? Стандартные алгоритмы построения СКС позволяют задать на каждом конце интервала построения сплайна только по одному граничному условию. Для преодоления этого затруднения предлагается выполнение условия (4) гарантировать заданием соответствующих значений первых производных в точке сопряжения, а выполнение условия (3) гарантировать заданием очень маленького значения весового множителя p_1 сплайна $S_\alpha^{(BC)}(y)$ в точке сопряжения.

Тогда алгоритм гладкого сопряжения сплайнов, соответствующих интервалам прямой и обратной функций, можно представить поэтапно:

1) построение сглаживающего сплайна $S_\alpha^{(AB)}(x)$ при следующих краевых условиях: в начале интервала построения (точка x_A) задается первая производная, значения которой определяются через производную сплайна, построенного на предыдущем отрезке; в конце интервала (точка B) задается нулевая вторая производная;

2) замена координат (x_B, y_B) на значения $(x_B, S_\alpha^{(AB)}(x_B))$, вычисленные по сплайну $S_\alpha^{(AB)}(x)$;

3) задание для сплайна $S_\alpha^{(BC)}(y)$ в точке B краевого условия в виде первой производной, определяемой выражением (4); в точке C краевое условие задается нулевой второй производной;

4) задание для сплайна $S_\alpha^{(BC)}(y)$ весовых множителей: $p_1 = 10^{-5}$, $p_i = 1$, $i = 2, \dots, n$, где n – число узлов сплайна $S_\alpha^{(BC)}(y)$. Такое задание обеспечивает прохождение сплайна $S_\alpha^{(BC)}(y)$ через точку $(x_B, S_\alpha^{(AB)}(x_B))$, т. е. непрерывность значений сплайнов $S_\alpha^{(AB)}(x)$, $S_\alpha^{(BC)}(y)$ в точке сопряжения B ;

5) построение сплайна $S_\alpha^{(BC)}(y)$, что и завершает процедуру «гладкого» сопряжения сплайнов $S_\alpha^{(AB)}(x)$, $S_\alpha^{(BC)}(y)$.

Алгоритм гладкого сопряжения сплайнов, построенных на интервалах обратной и прямой функций, аналогичен описанному.

Выбор параметра сглаживания по заданной ширине аппаратной функции. Меняя параметр сглаживания α , можно построить параметрическое семейство сглаживающих сплайнов, занимающих промежуточное положение между негладким интерполяционным сплайном ($\alpha = 0$) и гладкой прямой линией ($\alpha \approx \infty$). Очевидно, что при различных значениях α сглаживающий сплайн $S_\alpha(t)$ с различной точностью приближает функцию $f(t)$. Ранее предполагалось, что параметр сглаживания α задан. Однако на практике невозможно априори задать величину параметра сглаживания. Поэтому остановимся на выборе этого параметра. Заметим, что проблема выбора α является основной при использовании сглаживающих сплайнов на практике. Возможны два подхода к выбору параметра сглаживания.

1. *Выбор параметра α из условия минимума среднеквадратической ошибки сглаживания.* Ошибка сглаживания определяется функционалом

$$\Delta(\alpha) = M \left[\sum_{i=1}^n (S_\alpha(t_i) - f(t_i))^2 \right],$$

где $M[\cdot]$ – оператор математического ожидания по распределению случайных погрешностей задания табличных значений. Значение α_{opt} , доставляющее минимум $\Delta(\alpha)$, можно назвать оптимальным параметром сглаживания. Вычисление α_{opt} требует существенной априорной информации о приближаемой функции $f(t)$ [2], которая, как правило, отсутствует. Поэтому используются алгоритмы выбора, вычисляющие некоторые оценки для α_{opt} . Достаточно успешно оценить α_{opt} удается в ситуациях, когда известны первые два момента погрешности задания значений функции [2, 3]. В рассматриваемой задаче сглаживания изолиний эти характеристики неизвестны, а выбор α на основе метода перекрестной значимости (cross-validation method) [2, 4] или из условия максимума кривизны L -кривой [5] в некоторых случаях дает неприемлемые (из-за большой ошибки сглаживания) значения параметра сглаживания [6]. Поэтому для выбора α будем использовать второй подход.

2. *Выбор параметра α по заданным точностным характеристикам сглаживающего сплайна.* Сглаживающий сплайн $S_\alpha(t)$ интерпретируется как выходной сигнал некоторого фильтра (назовем его сплайн-фильтром), на вход которого поступает дискретная последовательность, состоящая из из-

меренных значений функции. В работе [7] получены частотные и пространственные характеристики сплайн-фильтра. В данной работе введем точностную характеристику – ширину аппаратной функции сплайн-фильтра, которая затем будет использоваться при выборе параметра сглаживания.

Предположим: а) шаг сетки, в узлах которой задаются значения функции, одинаков и равен $\Delta_t = t_{i+1} - t_i$; б) весовые множители p_i , входящие в функционал (2), также одинаковы и в дальнейшем обозначаются как p . Тогда частотная характеристика сглаживающего сплайна определяется выражением

$$H_\alpha(\omega) = \frac{2}{\Delta_t \omega^2} \left(\frac{\sin(\Delta_t \omega/2)}{\Delta_t \omega/2} \right)^2 \left[\frac{1 - \cos(\Delta_t \omega)}{\lambda + 2\mu \cos(\Delta_t \omega) + 2\beta \cos(2\Delta_t \omega)} \right], \quad (5)$$

где $\beta = \alpha p / \Delta_t^2$, $\mu = \Delta_t / 6 - 4\alpha p / \Delta_t^2$, $\lambda = 2\Delta_t / 3 + 6\alpha p / \Delta_t^2$. На рис. 2 показаны частотные характеристики, вычисленные при $p=1$, $\Delta_t=1$ и трех значениях параметра сглаживания: $\alpha=0$ (кривая 1), $\alpha=1$ (кривая 2), $\alpha=1000$ (кривая 3). Интересно заметить, что даже интерполяционный сплайн ($\alpha=0$) имеет конечную полосу пропускания.

Аппаратная функция $h_\alpha(t)$ сплайна связана с $H_\alpha(\omega)$ преобразованием Фурье:

$$h_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi} \int H_\alpha(\omega) \exp(i\omega t) d\omega,$$

и эта аппаратная функция характеризует систематическую ошибку сглаживания и дифференцирования: чем меньше «ширина» функции $h_\alpha(t)$, тем меньше систематическая ошибка сглаживания. Действительно, при достаточно большом числе узлов СКС, построенный по «точным» значениям $f(t_i)$, можно представить выражением

$$S_\alpha(t) = \int f(t-\tau) h_\alpha(\tau) d\tau,$$

из которого и следует вышеприведенная закономерность.

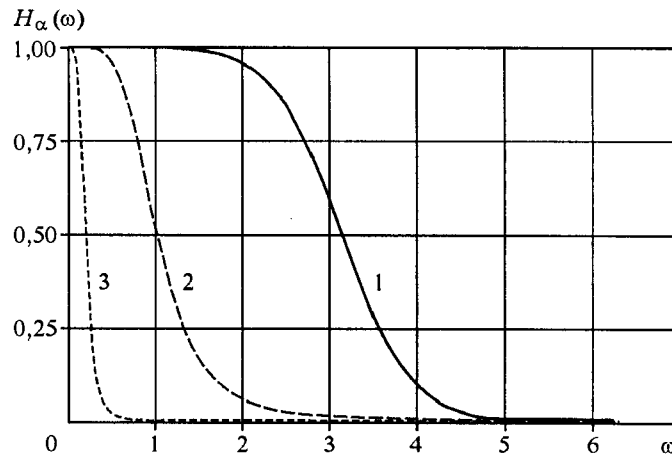


Рис. 2. Частотные характеристики кубического сплайна

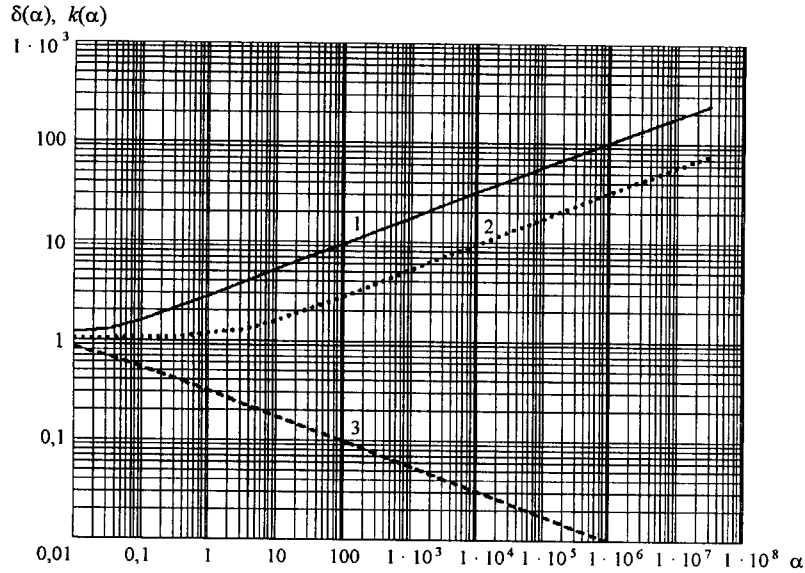


Рис. 3. Точностные характеристики кубического сплайна

В качестве числовой характеристики аппаратной функции примем ее ширину $\delta(\alpha)$, определяемую следующим соотношением:

$$\delta(\alpha) = 2 \frac{\int_0^{\infty} |h_{\alpha}(t)| dt}{h_{\alpha}(0)}. \quad (6)$$

Физическая трактовка этой характеристики достаточно проста: в сглаживающем сплайне сохраняются (с небольшим амплитудным искажением) составляющие функции $f(t)$, если их ширина больше ширины аппаратной функции $\delta(\alpha)$. На рис. 3 показаны графики зависимости $\delta(\alpha)$ от параметра сглаживания при $\Delta_t = 1$ и двух значениях весовых множителей $p = 1$ (кривая 1) и $p = 0,01$ (кривая 2).

Погрешности задания значений функции $f(t)$ (случайные величины η_i) также проходят через сплайн-фильтр и обуславливают случайную составляющую ошибки сглаживания. Передачу величины η_i в сплайн $S_{n,\alpha}(t)$ также определяет частотная характеристика $\alpha(\omega)$. Введем новую характеристику

$$K(\alpha) = \int [H_{\alpha}(\omega)]^2 d\omega, \quad (7)$$

которую можно интерпретировать как коэффициент передачи дисперсии погрешности η_i в дисперсию случайной составляющей ошибки сглаживания. На рис. 3 показана зависимость $K(\alpha)$ от параметра сглаживания ($\Delta_t = 1, p = 1$) (кривая 3).

Проанализируем поведение $H_{\alpha}(\omega)$ при изменении α . Имеет место следующее

Свойство 1. Частотная характеристика $H_{\alpha}(\omega)$ является невозрастающей функцией параметра α , т. е.

$$H_{\alpha_1}(\omega) > H_{\alpha_2}(\omega), \quad k = 0, 1, 2, \quad \text{если } \alpha_1 < \alpha_2. \quad (8)$$

Опираясь на это свойство и на определения $\delta(\alpha)$ и $K(\alpha)$, имеем
Свойство 2. Ширина $\delta(\alpha)$ аппаратной функции является монотонно возрастающей функцией α , а коэффициент передачи дисперсии $K(\alpha)$ монотонно убывающей функцией α , т. е.

$$\delta(\alpha_1) < \delta(\alpha_2); \quad K(\alpha_1) > K(\alpha_2), \quad \text{если } \alpha_1 < \alpha_2. \quad (9)$$

Эти свойства хорошо иллюстрирует рис. 3.

Величины $\delta(\alpha)$, $K(\alpha)$, достаточно полно описывающие фильтрующие свойства сплайна, в дальнейшем будем называть точностными характеристиками сплайна.

Учитывая противоречивое влияние параметра α на величины систематической и случайной ошибок, предлагается подойти к выбору параметра α как к задаче построения (синтеза) сплайна с заданными точностными характеристиками. Сформулируем задачу синтеза сглаживающего сплайна в виде следующей вариационной задачи:

$$\inf_{\alpha > 0} K(\alpha) \quad \text{при ограничении } \delta(\alpha) \leq \delta_{\text{пр}}. \quad (10)$$

Решение этой задачи минимизирует коэффициент передачи дисперсии $K(\alpha)$ при гарантированном значении $\delta_{\text{пр}}$ ширины аппаратной функции. Опираясь на свойство 2 (соотношение (9)), можно показать, что решение задачи (10) есть корень нелинейного уравнения

$$\delta(\alpha) = \delta_{\text{пр}}. \quad (11)$$

Корень этого уравнения существует и единственен.

Возвращаясь к проблеме выбора параметра сглаживания при аппроксимации изолиний, следует заметить, что изложенный подход позволяет выбрать для каждого интервала построения сплайна свой, индивидуальный, параметр сглаживания, задавая в качестве $\delta_{\text{пр}}$ наименьший размер структуры изолинии, которую необходимо «сохранить» в построенном СКС.

З а м е ч а н и е. Иногда шаг сетки, на которой задаются значения изолиний, неодинаков. В этих случаях рекомендуется в качестве Δ , принять

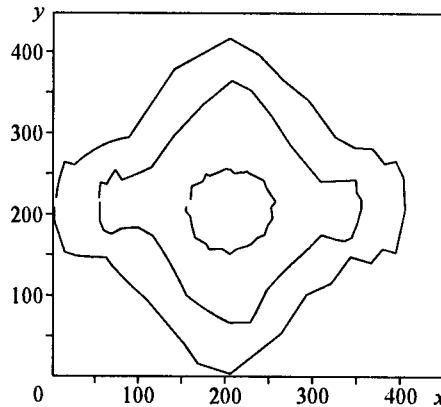


Рис. 4. Искаженные погрешностями изолинии изображения

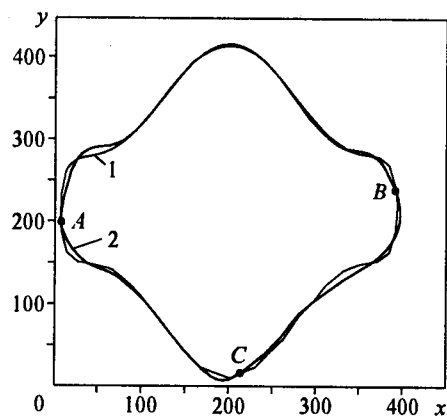


Рис. 5. Сглаженная изолиния

среднее значение шагов сетки. Этот прием использовался при сглаживании изолиний в приводимом далее эксперименте.

Результаты вычислительного эксперимента. В качестве иллюстрации эффективности предлагаемого подхода к сглаживанию изолиний приведем результаты одного из выполненных вычислительных экспериментов.

Координаты (x_i, y_i) , $i=1, \dots, n$, «точных» изолиний искажались равномерно распределенными погрешностями (для координаты x уровень погрешностей $\sim 8\%$, для координаты y $\sim 16\%$). Некоторые из зашумленных изолиний показаны на рис. 4. Затем по искаженным координатам $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$ строились СКС. На рис. 5 приведена сглаженная изолиния (кривая 2), составленная из трех сглаживающих кубических сплайнов. Точки сопряжения сплайнов обозначены A, B, C , при этом для фрагмента AC использовалась прямая функция $y(x)$, для фрагмента CB – обратная $x(y)$, для фрагмента BA – прямая $y(x)$. Выбор параметра сглаживания осуществлялся на основе решения уравнения (11), где $\delta_{\text{пр}}$ задавалась по формуле $\delta_{\text{пр}} = 0,1d$ (здесь d – длина интервала построения соответствующего сплайна). Очевидно, что возможны и другие варианты задания $\delta_{\text{пр}}$. На рис. 5 показана точная изолиния (кривая 1). Видно, что построенные СКС достаточно хорошо аппроксимируют точную изолинию несмотря на высокий уровень шума в исходных изолиниях.

Заключение. Предложенный подход к аппроксимации изолиний с использованием сглаживающих кубических сплайнов требует небольших вычислительных затрат и при определении интервалов построения сплайнов позволяет учитывать особенности различных фрагментов изолиний. Эта возможность весьма привлекательна при обработке изолиний сложных изображений, в которых присутствуют фрагменты изображений с большими и малыми значениями градиента. Выбор параметра сглаживания путем задания размера структуры изолинии, которую нужно сохранить в построенном СКС, также полезен при обработке изолиний сложных изображений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. Новосибирск: Наука, 1980.

2. **Воскобойников Ю. Е., Преображенский Н. Г., Седельников А. И.** Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. Новосибирск: Наука, 1984.
3. **Воскобойников Ю. Е.** Оценивание оптимального параметра регуляризирующих алгоритмов восстановления изображения // Автометрия. 1995. № 3. С. 68.
4. **Craven P., Wahba G.** Smoothing noisy data with spline function: estimating the correct degree of smoothing by the method of generalized cross-validation // Numer. Math. 1979. N 3. P. 377.
5. **Hansen P. C.** The use of L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems // SIAM Journ. on Sci. Comput. 1993. 14. P. 1487.
6. **Воскобойников Ю. Е.** Выбор параметра регуляризации при неизвестном уровне погрешности исходных данных // Тр. XII Байкальской междунар. shk.-сем. Иркутск: Изд-во ИСЭМ СО РАН, 2001. Т. 4. С. 137.
7. **Воскобойников Ю. Е.** Частотный подход к оценке точности сглаживания и дифференцирования экспериментальных данных на основе сглаживающих сплайнов // Автометрия. 1986. № 1. С. 38.

*Новосибирский государственный
архитектурно-строительный университет,
E-mail: voscob@ngasu.nsk.ru*

*Поступила в редакцию
8 апреля 2003 г.*