

УДК 539.3

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО ИЗГИБА КОНСОЛИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКИ

Д. М. Зуев*, Д. Д. Макаров*, К. Г. Охоткин*,**

* Сибирский государственный университет науки и технологий
им. акад. М. Ф. Решетнева, 660037 Красноярск, Россия

** Акционерное общество “Информационные спутниковые системы”
им. акад. М. Ф. Решетнева”, 662972 Железногорск, Россия

E-mails: ZuevDmitriy93@yandex.ru, dima-makarov-98@mail.ru, okg2000@mail.ru

Приведены результаты сравнения точного и приближенного аналитических решений с экспериментальными данными о геометрически нелинейном изгибе тонкой упругой консоли под действием поперечной сосредоточенной нагрузки на ее свободном конце.

Ключевые слова: геометрически нелинейный изгиб, большие деформации, эксперимент, консоль, тонкий упругий стержень.

DOI: 10.15372/PMTF20220221

Введение. Для решения задач проектирования современных сложных трансформируемых стержневых конструкций в аэрокосмической технике, а также микроэлектромеханических систем требуется высокоточное моделирование процесса деформирования тонких гибких упругих стержней. Задача определения равновесного состояния изогнутого стержня, как правило, сводится к решению уравнения Эйлера — Бернулли с начальными или граничными условиями, соответствующими прикладываемой к стержню нагрузке. В декартовых координатах данное уравнение имеет вид [1]

$$\frac{M(x)}{EJ} = \frac{d^2y}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2}, \quad (1)$$

где $M(x)$ — действующий на стержень момент силы; E — модуль упругости; J — момент инерции поперечного сечения стержня; y, x — координаты точек стержня.

Поскольку уравнение (1) нелинейное, получение его точного решения является нетривиальной задачей. При этом требуется рассматривать большие деформации изогнутого стержня, при которых прогиб сравним с длиной стержня. Из уравнения (1) в исходной нелинейной формулировке следует аналитическое решение, выраженное в эллиптических функциях и интегралах [2], а в некоторых случаях и в гипергеометрических функциях [3].

В некоторых классических прикладных задачах механики деформируемого твердого тела рассматриваются малые деформации стержней, что позволяет линеаризовать уравнение (1):

$$\frac{M(x)}{EJ} = \frac{d^2y}{dx^2}. \quad (2)$$

Такой подход лежит в основе теории сопротивления материалов, при этом считается, что он применим в случаях, когда прогиб не превышает 3–5 % длины стержня [4].

В настоящее время существуют приближенные аналитические решения задачи о поперечном изгибе стержня, полученные с использованием различных методов: на основе степенных разложений точных решений [5, 6], на основе степенных разложений исходного уравнения (1) [7], аппроксимации полиномами [8]. Также существуют приближенные решения, полученные с помощью других подходов, например, с помощью модифицированных линейных выражений [9].

Актуальным является сравнение аналитических решений с экспериментальными данными для определения интервалов нагрузки, в пределах которых применимо то или иное приближенное решение. Экспериментальные исследования геометрически нелинейного изгиба консоли поперечной нагрузкой проведены в работах [10–12].

В работе [10] экспериментально изучен изгиб консоли под действием поперечной нагрузки. Полученные данные могут быть использованы для обучения нейросети, определяющей прогиб консоли при различных нагрузках. В эксперименте регистрировались только осевое смещение δx и стрела прогиба f . Рассматривался диапазон нагрузок $\mu < 0,96$ ($\mu = PL^2/(2EJ)$ — безразмерный параметр нагрузки; P — действующая на стержень сила; L — длина стержня). В работе [11] проведен эксперимент с консолью из пружинной стали. Эксперимент проводился в горизонтальной плоскости, чтобы исключить влияние гравитационной нагрузки. В [11] получены стрела прогиба и осевое смещение при безразмерной нагрузке $\mu < 1,47$. В работе [12] проведен лабораторный эксперимент для исследования геометрически нелинейных изгибов. Рассмотрен случай комбинированной нагрузки: поперечной на свободном конце и равномерно распределенной по длине стержня (нагрузки гравитационного типа). В [12] определена стрела прогиба консоли в диапазоне поперечных нагрузок $\mu < 1,75$.

В данной работе проводится сравнение ряда точных [2] и приближенных [9] аналитических решений задачи об изгибе стержня, нагруженного на свободном конце поперечной сосредоточенной силой, с экспериментальными данными, полученными при нагрузках, приводящих к большим деформациям стержня (геометрически нелинейному изгибу).

Аналитическое исследование динамической устойчивости гибких стержней в геометрически нелинейной постановке проведено в работе [13].

Постановка эксперимента. На рис. 1 представлена схема изгиба стержня длиной L под действием поперечной сосредоточенной силы P на свободном конце. В результате изгиба точки стержня смещаются относительно осей x, y . Конец стержня получает смещение вдоль оси y (стрела прогиба f) и смещение δx вдоль оси x . В эксперименте регистрировались стрела прогиба, осевое смещение при различных приложенных нагрузках и формы изгиба.

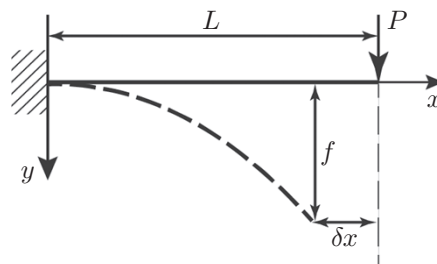


Рис. 1. Схема изгиба стержня:

сплошная линия — равновесное положение стержня (без нагрузки), штриховая — положение стержня, деформированного под действием нагрузки P

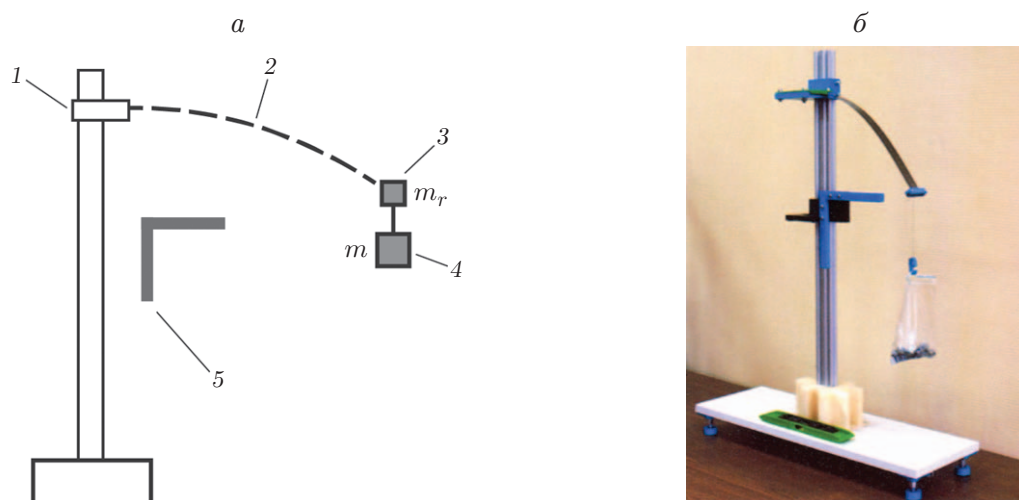


Рис. 2. Схема (а) и общий вид (б) экспериментальной установки:

1 — зажим, 2 — исследуемый образец, 3 — крюк, 4 — груз, 5 — метки-эталон

В качестве экспериментального образца использовалась тонкая прямоугольная стальная полоса, параметры которой имели следующие значения: полная длина — 332 мм, ширина — 28 мм, толщина — 0,8 мм, масса образца — 48,7 г, модуль упругости $E = 200$ ГПа, длина используемого в эксперименте участка $L = 300$ мм.

Схема и общий вид экспериментальной установки представлены на рис. 2.

Исследуемый образец неподвижно закреплялся в зажиме. На свободном конце образца устанавливался крюк массой m_r для подвеса груза. Форма изгиба фиксировалась с помощью цифровой камеры, расположенной на некотором расстоянии от установки. Оцифровка фотографий проводилась с помощью программного обеспечения Graph2Digit. Для определения масштаба при обработке фотографий в плоскости изгиба находилась метка-эталон.

Целью эксперимента являлось определение стрелы прогиба, осевого смещения и форм изгиба при нагрузках, приводящих к геометрически нелинейному изгибу.

В начале эксперимента исследуемый образец помещался в экспериментальную установку. Фиксировалось равновесное положение данной консоли для определения прогиба под действием собственного веса (гравитационной распределенной нагрузки), который составил $f_w = 8,6$ мм. Затем к свободному концу образца крепился крюк массой $m_r = 11,5$ г. Изогнутое состояние консоли под действием данной нагрузки фиксировалось. Далее нагрузка пошагово увеличивалась путем подвешивания к крюку грузов массой $m = 40$ г. Состояние консоли фиксировалось на каждом шаге нагружения. С использованием программного обеспечения Graph2Digit обрабатывались данные, описывающие форму изогнутого профиля консоли: фиксировалось положение точки защемления консоли и метки-эталона, затем вдоль профиля изогнутого стержня наносились точки для оцифровки. Полученный массив данных был представлен в форме электронных таблиц.

Координаты точек x, y и нагрузка P пересчитывались в безразмерные значения ξ, η и μ согласно выражениям

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{L}, \quad \mu = \frac{PL^2}{2EJ}.$$

Для минимизации погрешности эксперимент был проведен восемь раз, каждый раз с оцифровкой и обработкой данных. Полученные данные были осреднены. Формы изгиба определены путем осреднения данных с помощью метода наименьших квадратов третьего порядка.

Затем из полученной в эксперименте величины стрелы прогиба была вычтена величина прогиба, возникающего вследствие воздействия собственного веса консоли f_w . Формы изгиба также корректировались для исключения влияния гравитационной нагрузки. Для этого из полученных в эксперименте координат формы изгиба были вычтены теоретически определенные координаты формы изгиба вследствие воздействия гравитационной нагрузки [14]:

$$\eta = \frac{1}{12} \frac{WL^2}{2EJ} (\xi^4 - 4\xi^3 + 6\xi^2)$$

(W — вес консоли).

Аналитические решения. Модифицированные аналитические линейные формулы приведены в работе [9]. В классической линейной теории для определения изгиба консоли поперечной нагрузкой требуется решить уравнение (2) с начальными условиями $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. В данном случае действующий момент равен $M(x) = Px$, форма изгиба в безразмерных координатах определяется формулой

$$\eta = \eta(\xi, \mu) = \mu(3\xi^2 - \xi^3)/3. \quad (3)$$

В классической линейной теории при определении стрелы прогиба применяется допущение об отсутствии осевого смещения δx при малых деформациях, таким образом, стрела прогиба определяется в точке конца стержня в равновесном состоянии:

$$f = f(\mu) = \eta(1, \mu) = 2\mu/3. \quad (4)$$

Однако в действительности при возрастании нагрузки увеличивается осевое смещение δx , которым при больших деформациях нельзя пренебречь. Таким образом, необходимо определять прогиб в точке $L - \delta x$ (абсцисса точки конца стержня). В общем виде зависимость стрелы прогиба от осевого смещения и нагрузки можно записать в безразмерных переменных в виде

$$f = \eta(1 - \delta\xi, \mu), \quad (5)$$

где $\delta\xi = \delta x/L$ — безразмерное осевое смещение. Параметр $\delta\xi$ вычисляется из условия сохранения криволинейной длины в безразмерных переменных:

$$\int_0^{1-\delta\xi} \left[1 + \left(\frac{d\eta(\xi, \mu)}{d\xi} \right)^2 \right]^{1/2} d\xi = 1. \quad (6)$$

С использованием формул (3)–(6) можно получить стрелу прогиба в диапазоне нагрузок, соответствующих геометрически нелинейному изгибу, который значительно превышает интервал применимости классической линейной теории.

В работе [2] получено точное аналитическое решение, описывающее формы деформируемых тонких упругих стержней при различных видах нагружения, а также приведены решения и критические нагрузки, при которых происходит переход к новым формам равновесного состояния изогнутого стержня.

В случае поперечной концевой нагрузки консоли уравнения изогнутой оси стержня имеют параметрический вид:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L} = \frac{2k}{pK - F_1} \left[\left(1 - \frac{1}{(2k)^2} \right)^{1/2} - \operatorname{cn}(u) \right], \\ \eta &= \frac{y}{L} = t - \frac{2}{pK - F_1} [E(\operatorname{am}(u), k) - E_1]. \end{aligned} \quad (7)$$

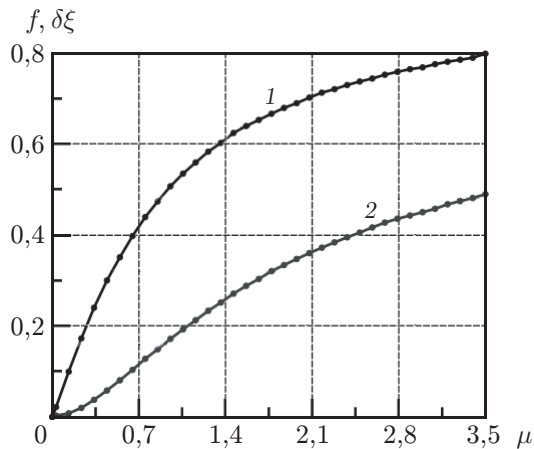


Рис. 3

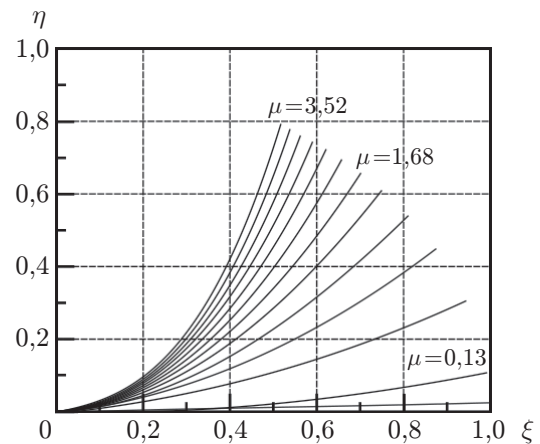


Рис. 4

Рис. 3. Экспериментальные зависимости стрелы прогиба консоли f (1) и безразмерного осевого смещения $\delta\xi$ (2) от безразмерной нагрузки μ

Рис. 4. Экспериментальные формы изгиба при различных значениях безразмерной нагрузки $\mu = 0,13 \div 3,52$

Здесь $F_1 = F[\arcsin(\sqrt{2}/(2k)), k]$; $K(k)$, $F(\varphi, k)$ — полный и неполный эллиптические интегралы первого рода соответственно; $u = [(2n - 1)K - F_1]t + F_1$; n — номер моды; sn — эллиптический косинус Якоби; am — эллиптическая амплитуда Якоби; $E_1 = E[\arcsin(\sqrt{2}/(2k)), k]$; $E(\varphi, k)$ — неполный эллиптический интеграл второго рода. Модуль эллиптического интеграла k является безразмерным параметром нагрузки ($1/2 \leq k^2 \leq 1$). В рассматриваемом случае $n = 1$, поскольку исследуется первая статическая мода равновесного состояния консоли.

В результате эксперимента были определены стрела прогиба f , осевое смещение $\delta\xi$ (рис. 3) и формы изгиба (рис. 4).

Сравнение экспериментальных данных и аналитических решений. Проведено сравнение экспериментальных данных с аналитическим точным решением [2] и приближенным решением с использованием модифицированных линейных формул [9]. На рис. 5 представлены зависимости стрелы прогиба от безразмерного параметра нагрузки μ . Разности теоретических и экспериментальных стрел прогиба приведены на рис. 6.

На рис. 5 видно, что результаты расчета по модифицированным линейным формулам и точное решение согласуются с экспериментальными данными на всем интервале нагрузок. Из рис. 6 следует, что на большей части интервала нагрузок точное решение отклоняется от экспериментальных данных менее чем на 1–2 %, в случае расчета по модифицированным линейным формулам этот показатель больше и составляет 3–4 %.

На рис. 7 показано отклонение величины осевого смещения в аналитических решениях от экспериментальных данных. Результаты сравнения с осевым смещением в линейном решении не приведены, так как осевое смещение в этом случае всегда равно нулю. Расчет по модифицированным линейным формулам и точное решение дают близкие результаты, их отклонение от экспериментальных данных не превышает 4 %.

Существенное отличие результатов, приведенных на рис. 6, 7, от экспериментальных данных при малых нагрузках объясняется малыми значениями прогибов и осевых смещений при данных нагрузках, что приводит к большим погрешностям при обработке экспериментальных данных.

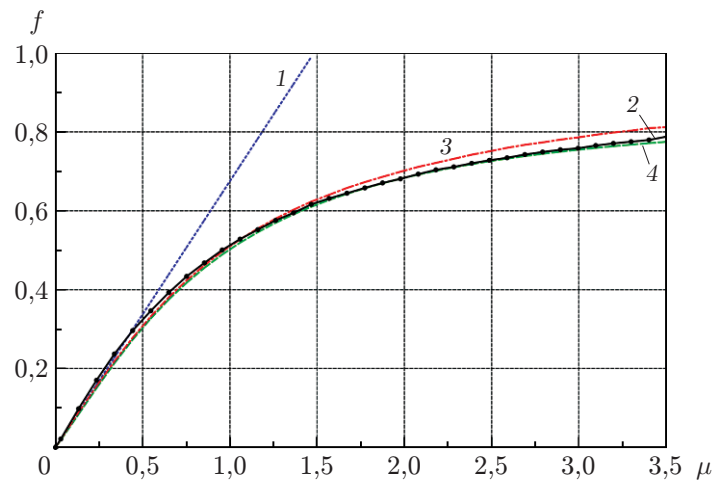


Рис. 5. Теоретические и экспериментальные зависимости стрелы прогиба от безразмерного параметра нагрузки μ :

1 — линейное решение (3), (4), 2 — экспериментальные данные, 3 — расчет по модифицированным формулам (5), (6), 4 — точное аналитическое решение (7)

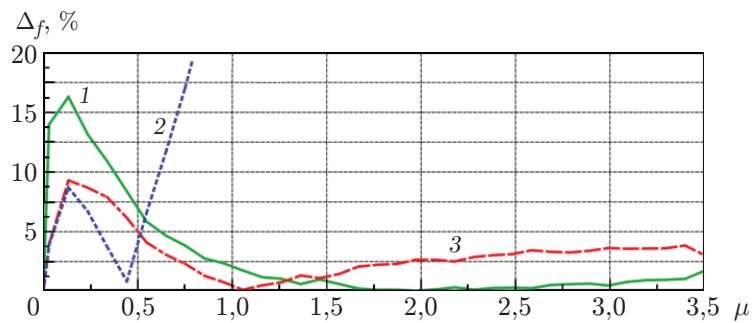


Рис. 6. Разности теоретических и экспериментальных стрел прогиба Δ_f :

1 — точное аналитическое решение (7), 2 — линейное решение (3), (4), 3 — расчет по модифицированным формулам (5), (6)

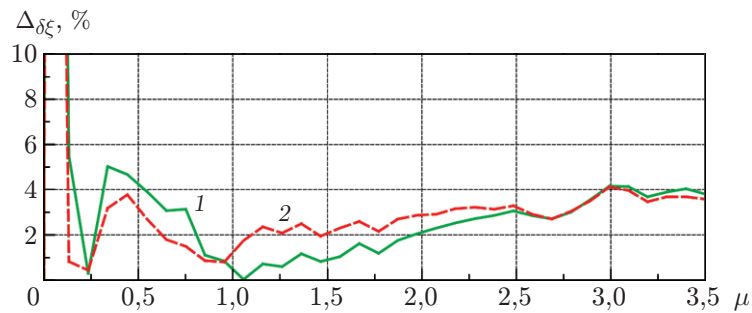


Рис. 7. Разность теоретического и экспериментального осевых смещений $\Delta_{\delta\xi}$:

1 — точное аналитическое решение (7), 2 — расчет по модифицированным формулам (5), (6)

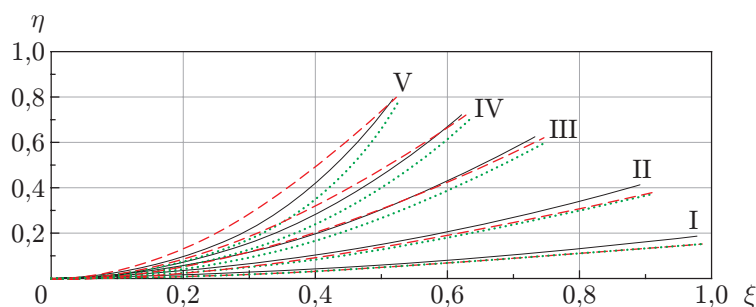


Рис. 8. Теоретические и экспериментально полученные формы изгиба: сплошные линии — экспериментальные данные, штриховые — расчет по модифицированным формулам (3), (5), (6), пунктирные — точное аналитическое решение (7); I — $\mu = 0,24$, II — $\mu = 0,66$, III — $\mu = 1,49$, IV — $\mu = 2,32$, V — $\mu = 3,56$

На рис. 8 показаны формы изгиба при различных значениях нагрузки. Видно, что аналитические решения согласуются с экспериментальными данными, однако при увеличении нагрузки форма изгиба изменяется.

Следует отметить, что в отличие от работ [10–12] в настоящей работе получены экспериментальные данные, характеризующие геометрически нелинейный изгиб тонких упругих стержней под действием поперечной сосредоточенной нагрузки на свободном конце, на большем интервале безразмерной нагрузки $\mu < 3,5$. Определены стрела прогиба, осевое смещение, а также построены формы изгиба в результате обработки большого количества экспериментальных точек с небольшим шагом по безразмерной нагрузке $0,1\mu$.

Заключение. Проведен эксперимент, в результате которого получены данные для стрелы прогиба и осевого смещения тонкого упругого стержня под действием поперечной сосредоточенной нагрузки на его свободном конце при геометрически нелинейном изгибе. В результате обработки большого количества экспериментальных точек получены различные формы изгиба.

Сравнение полученных данных с аналитическим точным решением и аналитическим приближенным решением с использованием модифицированных линейных формул показало высокую точность аналитических решений (различие не превышает 4 %). Следует отметить, что приближенное аналитическое решение, полученное с использованием модифицированных линейных формул, имеет высокую точность, близкую к точности аналитического точного решения в эллиптических функциях. Таким образом, приближенное решение применимо в интервале безразмерных нагрузок $\mu < 3,5$, что существенно превышает диапазон применимости исходного линейного решения ($\mu < 0,075$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
2. Захаров Ю. В., Охоткин К. Г. Нелинейный изгиб тонких упругих стержней // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 5. С. 124–131.
3. Scarpello G. M., Ritelli D. Exact solutions of nonlinear equation of rod deflections involving the lauricella hypergeometric functions // Intern. J. Math. Math. Sci. 2011. V. 2011. 838924. DOI: 10.1155/2011/838924.
4. Варданян Г. С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности / Г. С. Варданян, В. И. Андреев, Н. М. Атаров, А. А. Горшков. М.: Изд-во АСВ, 1995.
5. Астапов Н. С. Приближенные формулы для прогибов сжатых гибких стержней // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 4. С. 135–138.

6. **Захаров Ю. В., Охоткин К. Г., Власов А. Ю.** Приближенные формулы для стрелы прогиба упругого стержня при поперечном нагружении // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 5. С. 132–134.
7. **Ang M. H. J., Wei W., Teck-Seng L.** On the estimation of the large deflection of a cantilever beam // Proc. of IECON'93 – 19th Annual conf. of IEEE industrial electronics, Maui (USA), 1993. S. 1., 1993. V. 3. P. 1604–1609.
8. **Denman H. H., Schmidt R.** An approximate method of analysis of large deflections // Z. angew. Math. Phys. 1970. Bd 21. S. 412–421.
9. **Зуев Д. М., Охоткин К. Г.** Модифицированные выражения для стрелы прогиба консоли в случае поперечной нагрузки // Космич. аппараты и технологии. 2020. Т. 4, № 1. С. 28–35.
10. **Gaurav K., Bhaduri S., Kumar A.** Prediction of deflection of cantilever beam of any arbitrary length using soft computation // Intern. J. Res. Appl. Sci. Engng Technol. 2016. V. 4, N 3. P. 448–454.
11. **Morsch F. M., Tolou N., Herder J. L.** Comparison of methods for large deflection analysis of a cantilever beam under free end point load cases // Proc. of the ASME design engineering technical conf., San Diego (USA), 2009. S. 1., 2009. P. 183–191.
12. **Beléndez T., Neipp C., Beléndez A.** Numerical and experimental analysis of a cantilever beam: A laboratory project to introduce geometric nonlinearity in mechanics of materials // Intern. J. Engng Educat. 2003. V. 19, N 6. P. 885–892.
13. **Аннин Б. Д., Власов А. Ю., Захаров Ю. В., Охоткин К. Г.** Исследование статической и динамической устойчивости гибких стержней в геометрически нелинейной постановке // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2017. № 4. С. 6–18.
14. **Тимошенко С. П.** Механика материалов: Учеб. для вузов / С. П. Тимошенко, Дж. Гере. СПб.: Лань, 2002.

*Поступила в редакцию 19/IV 2021 г.,
после доработки — 21/IV 2021 г.
Принята к публикации 26/IV 2021 г.*
