

ЛИТЕРАТУРА

1. Бобнев А. А. Разделительный слой в высокотемпературных потоках // ПМТФ.— 1983.— № 6.
2. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике.— М.: Мир, 1972.

г. Краснодар

Поступила 26/II 1988 г.

УДК 532.516:536.24.01

Е. А. Рябицкий

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОГО ДВИЖЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СЛОЕ

Исследование устойчивости термокапиллярного движения в плоском слое и жидком цилиндре проведено в [1, 2]. В данной работе изучается устойчивость термокапиллярной конвекции в цилиндрическом слое с недеформируемой свободной поверхностью. Исследовано влияние отношения радиусов цилиндров на устойчивость движения. Показано, что для осесимметрических возмущений при некоторых значениях параметров задачи увеличение относительной толщины внутреннего цилиндра приводит к понижению устойчивости.

1. Рассмотрим цилиндрический слой вязкой теплопроводной жидкости, ограниченный твердой внутренней и свободной внешней поверхностями, при отсутствии силы тяжести. Введем цилиндрическую систему координат с осью z , направленной вдоль образующей цилиндра. Уравнение твердой границы: $r = r_0$. Полагаем, что свободная поверхность цилиндрическая ($r = r_1$) и недеформируемая. Изменение коэффициента поверхностного натяжения от температуры описывается формулой $\sigma = \sigma_0 - \kappa(\theta - \theta_0)$.

Пусть свободная поверхность нагревается по закону $\theta_B = -Az$ (A — заданная постоянная величина). Тогда стационарное осесимметрическое термокапиллярное движение, возникающее вследствие изменения поверхностного натяжения, описывается формулами

$$(1.1) \quad \begin{aligned} u = v = 0, \quad w = B_1(\xi^2 - d^2) + B_2 \ln(\xi/d), \quad p_\eta = 4B_1, \\ \theta = -\eta - \text{MaPr} [B_1(\xi^4 - 1)/4 - (d^2 B_1 + B_2 + \ln dB_2)(\xi^2 - 1) + \\ + B_2(\xi^2 + d^2) \ln \xi + B_1 d^4 \ln \xi]/4, \end{aligned}$$

где постоянные $B_1 = (1 - d^2 + 2 \ln d) [(1 - d^2)(3 - d^2) + 4 \ln d]^{-1}$, $B_2 = (1 - d^2)^2 [(1 - d^2)(3 - d^2) + 4 \ln d]^{-1}$ находятся из условий прилипания и замкнутости потока

$$(1.2) \quad \int_d^1 \xi w(\xi) d\xi = 0.$$

Здесь и ниже $\xi = r/r_1$; $\eta = z/r_1$; $d = r_0/r_1 < 1$; $\text{Ma} = r_1^2 \kappa A / \rho v^2$ — число Марангони; $\text{Pr} = \nu / \chi$ — число Прандтля; $\text{Bi} = \beta r_1 / \lambda$ — число Био; ν , χ — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности; λ , β — коэффициенты теплопроводности и межфазного обмена; ρ — плотность. В качестве единиц длины, времени, скорости, температуры и давления выбраны соответственно r_1 , $r_1^2 / \nu \text{Ma}$, $\nu \text{Ma} / r_1$, $A r_1$, $\rho v^2 \text{Ma}^2 / r_1^2$.

При $d \rightarrow 0$ движение (1.1) переходит в термокапиллярное течение для полностью жидкого цилиндра: $u = v = 0$, $w = (\xi^2 - 0,5)/2$, $p_\eta = 2$, $\theta = -\eta - \text{MaPr}(1 - \xi^2)^2/32$, устойчивость которого изучена в [2]. В [3] рассматривалась устойчивость относительно осесимметрических возмущений движения с логарифмическим профилем скорости, которое не удовлетворяло условию замкнутости (1.2).

Перейдем к исследованию устойчивости движения (1.1). Ищем возмущения вектора скорости, давления и температуры в виде

$$(U, V, W, P, T) = (U(\xi), V(\xi), W(\xi), P(\xi), T(\xi)) \times \\ \times \exp[i\alpha\eta + im\varphi - iC\tau],$$

где α , m — осевое и азимутальное волновые числа; $C = C_r + iC_i$ — комплексный декремент; τ — безразмерное время.

Линеаризованные уравнения Навье — Стокса примут вид [4]

$$(1.3) \quad \begin{aligned} aU + \text{Ma} P' &= -i\alpha W' - \frac{im}{\xi^2} (\xi V)', \\ aV + \frac{im}{\xi} \text{Ma} P &= \left[\frac{1}{\xi} (\xi V)' \right]' + \frac{2im}{\xi^2} U, \\ aW + \text{Ma} w_\xi U + i\alpha \text{Ma} P &= \frac{1}{\xi} (\xi W)', \quad (\xi U)' + imV + i\alpha W = 0, \\ bT + \text{Ma} \text{Pr} \theta_\xi U - \text{Ma} \text{Pr} W &= \frac{1}{\xi} (\xi T)', \\ a &= i \text{Ma} (\alpha w - C) + \frac{m^2}{\xi^2} + \alpha^2, \quad b = i \text{Ma} \text{Pr} (\alpha w - C) + \frac{m^2}{\xi^2} + \alpha^2; \end{aligned}$$

условия на твердой границе:

$$(1.4) \quad \xi = d: U = V = W = T' = 0;$$

на свободной поверхности:

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \xi = 1: V' - V + imT &= 0, \quad U = 0, \\ W' + i\alpha T &= 0, \quad T' + \text{Bi}T = 0. \end{aligned}$$

2. Проведем асимптотический анализ задачи (1.3)–(1.5) для длинных волн ($\alpha \rightarrow 0$). Пусть $m = 0$, тогда задача для функции V отделяется. Разлагаем искомые величины в ряд по α : $C = C_0 + O(\alpha)$, $U = \alpha U_0 + O(\alpha^2)$, $W = W_0 + O(\alpha)$, $P = \alpha P_0 + O(\alpha^2)$, $T = \alpha^{-1} T_0 + O(1)$. Нерегулярность разложения температуры по α вытекает при учете тепловых мод из (1.5). Подставляя данное разложение в исходные уравнения, решая и удовлетворяя граничным условиям, получим характеристическое уравнение для нахождения декремента C :

$$(2.1) \quad \beta [J_0(\beta d) Y_1(\beta) - J_1(\beta) Y_0(\beta d)] \{ \gamma [\tilde{Y}_1(\gamma d) J_1(\gamma) - J_1(\gamma d) Y_1(\gamma)] + \text{Bi} [J_1(\gamma d) Y_0(\gamma) - Y_1(\gamma d) J_0(\gamma)] \} = 0.$$

Здесь J_0, J_1, Y_0, Y_1 — функции Бесселя 1-го и 2-го рода; $\beta = \sqrt{i \text{Ma} C_0}$; $\gamma = \sqrt{\text{Pr} \beta}$. Уравнение (2.1) имеет счетное число вещественных корней. Например, для $d = 0,1$, $\text{Bi} = 2$, $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 2,29$, $\beta_2 = 5,43$, $\gamma_1 = 2,41$, $\gamma_2 = 5,52$. Таким образом, все собственные числа комплексные и отрицательные. Беря следующие члены разложения, можно показать, что это утверждение верно и для $\beta_0 = 0$. Для $m \neq 0$ характеристическое уравнение имеет вид

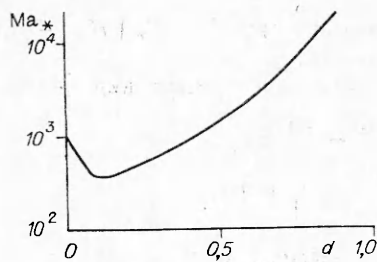
$$(2.2) \quad [J'_m(\beta) Y_m(\beta d) - Y'_m(\beta) J_m(\beta d)] \{ J'_m(\gamma d) Y'_m(\gamma) - Y'_m(\gamma d) J'_m(\gamma) + \text{Bi} [Y_m(\gamma) J'_m(\gamma d) - J_m(\gamma) Y'_m(\gamma d)] \} = 0.$$

Корни уравнения (2.2) также вещественны. Например, для $m = 1$, $d = 0,1$, $\text{Bi} = 0$, $\beta_1 = 2,41$, $\beta_2 = 5,52$, $\gamma_1 = 2,32$, $\gamma_2 = 5,06$. Следовательно, движение (1.1) устойчиво относительно длинноволновых возмущений.

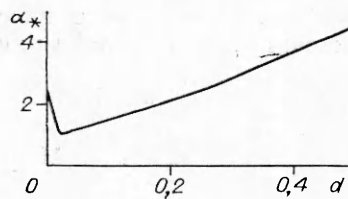
3. Решение задачи (1.3), (1.4) осуществлялось численно методом ортогонализации [5], а из удовлетворения условия (1.5) методом секущих находился комплексный декремент. Расчет начинался с полученных асимптотических значений C при $\alpha \rightarrow 0$.

В качестве контрольного примера были определены критические величины C_r и α при малых d . Полученные для $d = 10^{-10}$, $m = 0$, $\text{Pr} = 0,4$, $\text{Ma} = 1260,8$, $\text{Bi} = 0$ значения $C_r = 0,1204$, $\alpha = 2,49$ хорошо согласуются с результатами [2]: $C_r = 0,1156$, $\alpha = 2,45$.

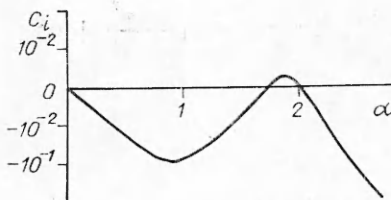
Для тех же значений m , Pr и Bi проведены расчеты критических чисел Марангони в зависимости от d . Результаты приведены на рис. 1, 2. Здесь Ma_* есть минимум по α критических чисел Марангони, а α_* — то значение волнового числа, на котором этот минимум достигается. При $d = 0$ критическое число Марангони равно 1260,8, что соответствует



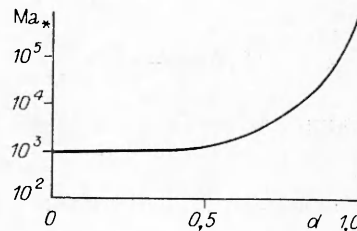
Р и с. 1



Р и с. 2



Р и с. 3



Р и с. 4

случаю полностью жидкого цилиндра, далее при росте d происходит убывание Ma_* , которое достигает своего минимального значения 600 при $d = 0,1$. Дальнейшее увеличение d приводит к монотонному росту числа Марангони, причем значение 1260 вновь достигается при $d = 0,42$. Подобным образом ведет себя кривая критических волновых чисел (рис. 2), которая убывает с $\alpha_* = 2,49$ при $d = 0$ до $\alpha_* = 1,03$ при $d = 2 \cdot 10^{-2}$ и затем монотонно возрастает. На рис. 3 изображена зависимость C_i от α при $d = 0,1$, $Ma = 600$, значения $\alpha \in [1,74; 1,97]$, при которых $C_i > 0$ отвечает области потери устойчивости основного движения (1.1).

Расчеты, проведенные для различных значений Pr , меньших 0,4, показали качественное совпадение графиков Ma_* от d с рис. 1. Таким образом, при малых числах Прандтля наличие в жидкости тонкого цилиндрического стержня понижает устойчивость движения (1.1) относительно осесимметрических возмущений.

Для расплава германия с $Pr = 0,016$ исследовано влияние отношения радиусов цилиндров на устойчивость движения. Как и в [2], было получено, что в этом случае наиболее опасны азимутальные возмущения ($m = 1$), потеря устойчивости наблюдается при отрицательных значениях α . На рис. 4 приведена зависимость Ma_* от d при $m = 1$, $Bi = 0$. Показано, что наиболее неустойчивым является полностью жидкий цилиндр, для которого $Ma_* = 897$, $\alpha_* = -0,147$, с ростом d критические числа Марангони монотонно увеличиваются.

Автор выражает благодарность В. К. Андрееву за предложенную тему и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Smith M. K., Davis S. H. Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers // J. Fluid Mech.— 1983.— V. 132.— P. 119.
2. Xu J.-J., Davis S. H. Convective thermocapillary instabilities in liquid bridges // Phys. Fluids.— 1984.— V. 27.— N 5.
3. Андреев В. К., Рябицкий Е. А. Устойчивость термокапиллярного течения в цилиндрическом слое жидкости // Задачи гидромеханики и тепломассообмена со свободными границами.— Новосибирск, 1987.
4. Андреев В. К., Рябицкий Е. А. Малые возмущения термокапиллярного движения в случае цилиндра.— Красноярск, 1984.— Деп. в ВИНТИ 27.11.84, № 7788—84.
5. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН.— 1961.— Т. 16, № 3(99).

г. Красноярск

Поступила 12/1 1988 г.,
в окончательном варианте —
30/III 1988 г.