

## ВОЛНОВОДНОЕ И АНОМАЛЬНОЕ СВОЙСТВА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НОЖЕВОЙ РЕШЕТКИ

С. В. Сухинин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Показано, что периодические ножевые решетки всегда обладают волноводным и аномальным свойствами. Получены дисперсионные соотношения для волноводных мод, определены полосы пропускания. Изучен асимптотический вид дисперсионных соотношений при бесконечном увеличении размеров элементов решетки и уменьшении волнового числа. Исследовано влияние геометрических характеристик и типа решетки на ее волноводные и аномальные свойства.

### ВВЕДЕНИЕ

Обобщенные собственные функции волноводного типа описывают стоячие или бегущие волны, локализованные около периодической структуры. Исследование волноводного свойства затруднено тем, что соответствующие самосопряженные расширения оператора Лапласа имеют непрерывный спектр.

Существование волноводного свойства периодической ножевой решетки с элементами достаточно больших размеров доказано в [1] при помощи аналитической теоремы Фредгольма. Это свойство ножевых решеток связано с собственными колебаниями около пластины в канале [2]. Результаты приближенных исследований волноводного свойства решеток с достаточно большими размерами элементов (по сравнению с периодом), дисперсионные соотношения, вид волноводных функций содержатся в [3, 4].

В настоящей работе методом «вилки Дирихле — Неймана» [5] доказано существование волноводного свойства для произвольных ножевых решеток.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Простой ножевой решеткой* называется решетка, обладающая, кроме трансляционной, симметрией типа группы диэдра второго порядка  $D_2$  (тип I на рис. 1, точки, имеющие симметрию типа  $D_2$ , обозначены крестами). *Составной ножевой решеткой* называется решетка, составленная из двух простых со взаимно пересекающимися межпрофильными каналами и параллельными элементами решеток (тип II). Составная ножевая решетка называется *двойной*, если межпрофильные каналы не пересекаются (тип III).

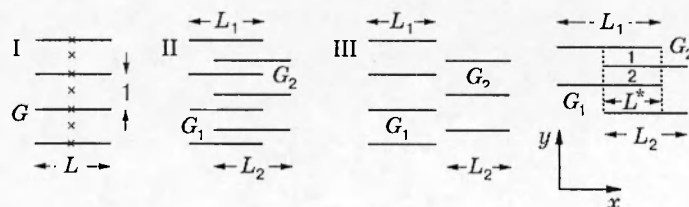


Рис. 1

## 1. ФОРМУЛИРОВКА И СИММЕТРИЯ ЗАДАЧИ

Пусть  $G$  — профиль ножевой решетки пластин на плоскости декартовых координат  $\{x, y\} = R^2$ ;  $\Omega = R^2 \setminus G$  — область колебаний. Предполагается, что  $G$  и  $\Omega$  одномерно периодичны вдоль оси  $y$  с периодом 1. Если  $G$  — простая ножевая решетка, то координаты профилей по оси  $y$  — целые числа. Пусть  $\Omega_1 = \{(x, y): -L/2 \leq x \leq L/2, 0 < y < 1\}$ ,  $\Omega_2 = \{(x, y): L/2 \leq x, 0 \leq y \leq 1\}$ ,  $\Omega_3 = \{(x, y): x \leq -L/2, 0 \leq y \leq 1\}$ ,  $L$  — длина профиля пластины. Области  $\{(x, y): -L/2 \leq x \leq L/2, k < y < k+1\}$  называются межпрофильными каналами ( $k$  — некоторое целое число). Сужение функции  $u(x, y)$  на область  $\Omega_j$  обозначено  $u_j(x, y)$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Все переменные безразмерны: пространственные переменные отнесены к реальному периоду решетки  $H$ , временные — к характерному времени  $H/c$  ( $c$  — скорость распространения сигнала). Начало координат выбрано на середине одного из элементов решетки, ось ординат параллельна направлению периодичности решетки. Система обозначений представлена на рис. 1 (справа).

Установившиеся колебания около решетки описываются при помощи функции  $u(x, y)$ . В области колебаний  $\Omega$  она удовлетворяет волновому уравнению

$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda^2 u = 0. \quad (1.1)$$

Здесь  $\lambda$  имеет смысл безразмерной частоты колебаний, предполагается, что  $\lambda \geq 0$ . Если  $\omega$ ,  $L_p$ ,  $H$  — реальные круговая частота колебаний, длина элемента решетки и период решетки, то для безразмерных величин справедливы выражения  $\lambda = \omega H/c$ ,  $L = L_p/H$ , а период решетки равен 1. На элементах решетки  $G$  должно выполняться условие непротекания

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad (1.2)$$

где  $n$  — нормаль к поверхности элемента решетки. В любой ограниченной области  $\Omega_b$ , которая является подобластью  $\Omega$ , должно выполняться условие локальной конечности энергии колебаний

$$E(u, \Omega_b) = \int_{\Omega_b} [u^2 + (\nabla u)^2] d\Omega_b < \infty. \quad (1.3)$$

Соотношения (1.1)–(1.3) далее называются задачей  $B$ . Так как оператор Лапласа инвариантен относительно любых движений плоскости  $R^2$ , то симметрия решетки будет определять симметрию соответствующей краевой задачи.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.** Структура называется *одномерно-периодической*, если она допускает группу локально-плоских симметрий, содержащую подгруппу  $T$  переносов, параллельных некоторому вектору.

Поскольку группа симметрий одномерно-периодической структуры обязательно содержит подгруппу  $T$  переносов вдоль некоторой оси  $y$ , то возможны только следующие нетривиальные подгруппы группы допускаемых симметрий:  $D_1$  — группа диэдра с одной осью зеркальной симметрии (возможны два типа зеркальных симметрий:  $D_1^x$  — ось зеркальной симметрии, параллельная оси  $x$ ;  $D_1^y$  — ось зеркальной симметрии, параллельная оси  $y$ );  $D_2$  — группа диэдра с двумя осями зеркальной симметрии;  $C_2$  — группа поворотов на  $\pi$ ;  $T_\sigma$  — группа скользящих симметрий.

Ножевые решетки можно классифицировать по группам допускаемых симметрий. Простая ножевая решетка обладает максимальной симметрией, она имеет точки симметрии типа  $D_2$ , расположенные на расстоянии  $1/2$  друг от друга (кресты на рис. 1). Составная и двойная решетки могут иметь точки симметрии типа  $C_2$ , расположенные на расстоянии  $1/2$  друг от друга, если размеры всех профилей одинаковы. В общем случае они обладают только трансляционной симметрией.

Подгруппы симметрии решетки позволяют разложить пространство допускаемых решений задачи  $B$  на соответствующие этим подгруппам инвариантные подпространства,

что упрощает исследование. Инвариантность задачи относительно зеркальной симметрии позволяет разложить пространство допустимых решений на функции, четные и нечетные относительно оси симметрии. Будет использована инвариантность пространства решений задачи  $B$  относительно преобразования  $D_1^y$ , в котором ось зеркальной симметрии проходит через середины всех элементов простой ножевой решетки. В этом случае пространство решений задачи  $B$  можно разложить в прямую сумму двух подпространств, состоящих из симметричных (четных) по переменной  $x$  функций  $u^{(+)}(x, y) = D_1^y u^{(+)}(x, y) = u^{(+)}(-x, y)$  и антисимметричных (нечетных)  $u^{(-)}(x, y) = -D_1^y u^{(-)}(x, y) = -u^{(-)}(-x, y)$ .

Так как группа трансляций  $T$  коммутативна и ее представление  $\hat{T}$  в пространстве допустимых решений задачи  $B$  унитарно, то пространство решений можно разложить на инвариантные относительно группы  $\hat{T}$  одномерные подпространства. Функции  $u(x, y)$ , которые принадлежат этим подпространствам, удовлетворяют условию

$$u(x, y + 1) = e^{i\xi} u(x, y) \quad (1.4)$$

и вследствие этого в свободном пространстве имеют вид  $u(x, y) = e^{i\xi y} v(x, y)$ ,  $v(x, y + 1) = v(x, y)$ . Здесь и далее  $i$  — мнимая единица;  $\xi$  — произвольный параметр ( $-\pi < \xi \leq \pi$ ), который описывает сдвиг фазы колебаний в соседних фундаментальных областях группы трансляций. Далее задача  $B$  с условием (1.4) называется задачей  $B(\xi)$ . Иногда представление вида (1.4) называют теоремой Флоке или волнами Рэлея — Блоха.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.1.** В силу трансляционной симметрии задачу  $B(\xi)$  достаточно исследовать в ограниченной по  $y$  области  $\{(x, y): 0 \leq y \leq 1\}$  — полосе. Условия (1.4) выполняются во всей области колебаний  $\Omega = R^2 \setminus G$  и позволяют продолжать решения на всю плоскость из любой фундаментальной области группы трансляций.

Если не оговорено иное, задача  $B(\xi)$  исследуется для простой ножевой решетки в области  $\Omega_0 = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$  для значений параметра  $\xi$  в полуинтервале  $0 < \xi \leq \pi$ . Рассматриваются самосопряженные расширения оператора Лапласа в пространстве  $L_2(\Omega)$  с условием (1.2) или соответствующие сужения.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.** Обобщенные собственные функции задачи  $B(0)$ , локализованные в окрестности ножевой решетки, называются *аномальными функциями* или решениями этой задачи, а соответствующие частоты — *аномальными частотами*.

В силу симметрии задачи  $B(0)$  для простой ножевой решетки, если  $u^*(x, y)$  есть обобщенная собственная функция, то функции  $u^*(-x, y)$ ,  $u^*(-x, -y)$ ,  $u^c(x, y) = u^*(x, y) + u^*(x, -y)$ ,  $u^a(x, y) = u^*(x, y) - u^*(x, -y)$  также будут ее обобщенными собственными функциями. Справедливы соотношения  $u^c(x, y) = u^c(x, -y)$  (четность по оси ординат),  $u^a(x, y) = -u^a(x, -y)$  (нечетность по оси ординат). Необходимо отметить, что зеркальное отображение относительно оси абсцисс  $(x, y) \rightarrow (x, -y)$  является зеркальным отображением относительно пластины, расположенной в начале системы координат. Справедлива

**Лемма 1.1.** *Нетривиальных аномальных функций задачи  $B(0)$ , четных относительно оси, проходящей через элемент решетки, не существует.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $u^c(x, y)$  — аномальная функция задачи  $B(0)$ , четная относительно оси абсцисс,  $u^c(x, y) = u^c(x, -y)$ . Поскольку функция  $u^c(x, y)$  периодична по переменной  $y$  с периодом 1, то она четна относительно оси, содержащей любой элемент решетки. Это означает, что функция  $u^c(x, y)$  непрерывна во всем пространстве и является слабым решением уравнения (1.1), а в силу теории эллиптических уравнений — гладким решением. Лемма доказана.

**Лемма 1.2.** *Аномальная функция задачи  $B(0)$  нечетна относительно каждой оси, параллельной элементам решетки и проходящей через точки симметрии группы диэдра этой задачи.*



Рис. 2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $u^a(x, y)$  — аномальная функция задачи  $B(0)$ , нечетная относительно оси абсцисс,  $u^a(x, y) = -u^a(x, -y)$ . Так как функция  $u^a(x, y)$  периодична по  $y$  с периодом 1, то справедливы соотношения

$$u^a(x, y + 1) = u^a(x, y) = -u^a(x, -y - 1). \quad (1.5)$$

Функция  $u^a(x, -y - 1)$  есть зеркальное отражение функции  $u^a(x, y)$  относительно оси  $y = 1/2$ , поэтому (1.5) означает, что она будет нечетной относительно этой оси. Утверждение леммы 1.2 справедливо в силу периодичности по  $y$  аномальной функции с периодом, равным минимальному периоду решетки.

Утверждения, сформулированные в леммах 1.1 и 1.2, позволяют классифицировать моды колебаний по группам допускаемых симметрий и указать сигнатуры колебаний волноводных мод  $\alpha$  и  $\beta$ , аномальных мод  $\gamma$  и  $\delta$  в межпрофильном канале (рис. 2). Любую волноводную (или аномальную) функцию  $u(x, y)$  можно представить в виде суммы мод  $\alpha$  и  $\beta$  ( $\gamma$  и  $\delta$ ):  $u(x, y) = u^{(\alpha)}(x, y) + u^{(\beta)}(x, y)$  (или  $u(x, y) = u^{(\gamma)}(x, y) + u^{(\delta)}(x, y)$ ).

## 2. ВОЛНОВОДНОЕ СВОЙСТВО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Обобщенная собственная функция соответствующего самосопряженного расширения оператора Лапласа для задачи  $B(\xi)$  называется *волноводной* функцией этой задачи, если она локализована в окрестности решетки пластин  $G$ . Обобщенные собственные функции, не являющиеся волноводными, называются *свободными*. Соответствующая частота колебаний называется волноводной или свободной.

Одномерно-периодическая структура  $G$  обладает волноводным свойством, если существует нетривиальная волноводная функция задачи  $B(\xi)$ . Общее решение уравнения (1.1) с условием квазипериодичности (1.4) в свободном пространстве имеет вид  $u(x, y) =$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp[i(2\pi n + \xi)y] [b_n^+ \exp(|x|\beta_n) + b_n^- \exp(-|x|\beta_n)], \text{ где } \beta_n = \sqrt{(2\pi n + \xi)^2 - \lambda^2}. \text{ Поэто-}$$

му обобщенная собственная функция  $u(x, y)$  локализована в окрестности решетки тогда и только тогда, когда в свободном пространстве справедливо представление

$$u(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n^{(\pm)} \exp[i(2\pi n + \xi)y] \exp(-|x|\beta_n), \quad (2.1)$$

$\operatorname{Re}(\beta_n) > 0$  для всех слагаемых.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Если для некоторого  $\lambda_*$  ( $0 < \lambda_* < \xi$ ) существует ограниченная обобщенная собственная функция задачи  $B(\xi)$  вида (2.1), то она является волноводной. Множество волноводных частот задачи  $B(\xi)$  дискретно на всем множестве вещественных чисел [1], поэтому на интервале  $0 < \lambda < \xi$  оно конечно.

Вид волноводной функции. Для четных и нечетных по переменной  $x$  колебаний ( $\alpha$ - и  $\beta$ -мод соответственно) общее представление волноводного решения задачи  $B(\xi)$  имеет вид

$$u_1(x, y) = a_0 \begin{Bmatrix} \cos(\lambda x) \\ \sin(\lambda x) \end{Bmatrix} + \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \cos(m\pi y) \begin{Bmatrix} \operatorname{ch}(x\alpha_m) \\ \operatorname{sh}(x\alpha_m) \end{Bmatrix},$$

$$u_2(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \exp [i(2\pi n + \xi)y] [\exp (-|x|\beta_n)], \quad (2.2)$$

$$u_3(-x, y) = u_2(x, y) \quad \text{или} \quad u_3(-x, y) = -u_2(x, y),$$

где  $\alpha_m = \sqrt{(\pi m)^2 - \lambda^2}$ ,  $\alpha_0 = i\lambda$ .

Для того чтобы функции  $u(x, y)$  вида (2.2) были решениями задачи  $B(\xi)$ , на границах областей  $\Omega_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) должны выполняться условия непрерывности решения и его нормальной производной. В силу симметрии задачи (для простой ножевой решетки) достаточно, чтобы эти условия выполнялись на одной границе, например на границе областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  ( $x = L/2, 0 \leq y \leq 1$ ):

$$u_1 = u_2, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad \text{при} \quad x = L/2. \quad (2.3)$$

Условия (2.3) означают, что функция вида (2.2) — слабое решение задачи  $B(\xi)$ , которое в силу теории эллиптических уравнений является сильным решением этой задачи.

Для исследования существования волноводных и аномальных частот в настоящей работе использован метод «вилки Дирихле — Неймана» [5]. Пусть дополнительно к граничным условиям задачи  $B(\xi)$  на линиях  $\{(x, y): x = R\}$  и  $\{(x, y): x = -R\}$ , где  $0 < R < \infty$ , выполнены условия Дирихле (D)  $u(x, y) = 0$  при  $|x| = R > L/2$  либо Неймана (N)  $u_y(x, y) = 0$  при  $|x| = R > L/2$ .

Задача  $B(\xi)$  с дополнительным условием D будет обозначаться  $B(DR)$ , а с условием N —  $B(NR)$ . Пусть  $\lambda_{DR}^{(k)}$  — собственные значения задачи  $B(DR)$ ,  $\lambda_{NR}^{(k)}$  — собственные значения задачи  $B(NR)$ ,  $\lambda^{(k)}(\xi)$  — некоторая собственная частота задачи  $B(\xi)$ , частоты пронумерованы в порядке возрастания,  $k = 1, 2, \dots, K$ . Так как условие N расширяет пространство допускаемых решений задачи  $B(\xi)$ , а условие D сужает, то для всех чисел  $R > L/2$  справедливы неравенства, которые можно получить при помощи вариационной формулировки задачи [3]:

$$\lambda_{NR}^{(k)} < \lambda^{(k)}(\xi) < \lambda_{DR}^{(k)}, \quad k = 1, \dots, K. \quad (2.4)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.** Если для некоторых значений  $R \geq L/2$  и  $K$  выполнены строгие неравенства  $0 < \lambda_{NR}^{(k)}$  и  $\lambda_{DR}^{(k)} < \xi$  при  $k = K$ , то из соотношения (2.4) следует существование не менее чем  $K$  волноводных собственных значений задачи  $B(\xi)$ .

**Существование волноводного свойства.** Если  $R = L/2$ , то условие D представляет собой «мягкое» условие излучения. В этом случае первая безразмерная собственная частота продольных колебаний  $\lambda_{DL/2}^{(1)}(\xi) = \pi/L$ . Поэтому для выполнения неравенства  $\lambda_{DL/2}^{(1)}(\xi) < \xi$  достаточно  $\pi/L < \xi$ . Это будет выполнено, если безразмерная длина профиля удовлетворяет неравенству  $\pi/\xi < L$ . Так как справедливы условия (1.4), то при  $R > L/2$  выполнено строгое неравенство  $\lambda_{NR} > 0$ , отсюда следует, что собственное значение задачи  $B(\xi)$  существует и строго больше нуля, если  $L > \pi/\xi$ . Справедливо более общее утверждение.

**Теорема 2.1** (существование волноводного свойства). *Простая ножевая решетка всегда обладает волноводным свойством.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Достаточно показать, что для любого значения  $L > 0$  существует такое  $R > 0$ , что справедливы неравенства

$$0 < \lambda_{NR}^{(1)} < \lambda_{DR}^{(1)} < \xi. \quad (2.5)$$

**Оценка снизу.** Если  $R > L/2$ , то область  $\{(x, y): -R < y < R\} \setminus G$  связна, и в силу условия (1.4) решение задачи  $B(NR)$  не может быть константой, следовательно,  $\lambda_{NR}^{(1)} > 0$ .

Оценка сверху. В области  $\Omega$  любое решение  $u(x, y)$  задачи  $B(\xi)$  имеет вид

$$u = u_p + u_n, \quad (2.6)$$

где  $u_p$  — функция, разрывная на множестве  $G$ , описывающем простую ножевую решетку;  $u_n$  — функция, непрерывная в области  $\Omega \cup G$ . Функция  $u_p$  непрерывна в краях профилей  $G$ , поэтому можно считать, что  $u_p \equiv 0$  в областях  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ . При помощи некоторой финитной и непрерывной функции  $f(x)$  ( $f(x) \equiv 0$  при  $L/2 \leq |x|$ ), такой, чтобы выполнялись условия локальной конечности энергии (1.3), можно  $u_p$  представить (в межпрофильном канале  $\Omega_1$ ) в виде

$$u_p = \begin{cases} f(x), & |x| < L/2, & 0 < y < 1 \\ 0, & |x| > L/2, & 0 < y < 1 \end{cases}. \quad (2.7)$$

В других межпрофильных каналах эта функция находится из (2.7) при помощи умножения на  $\exp(i\xi y)$  в соответствующей степени. Пусть в представлении (2.6) составляющая  $u_n$  имеет вид  $u_n(x, y) = \exp(i\xi y) \cos(\pi x/2R)$ . Эта функция удовлетворяет соотношениям задачи  $B(DR)$ , кроме граничного условия (1.2), непрерывна в  $\Omega \cup G$ . Функцию  $u_p$  вида (2.7) можно представить как  $f(x) = \alpha \cos(\pi x/L)$  ( $\alpha$  — некоторая постоянная). Вид  $u_p$  в других межпрофильных каналах определяется соотношением (1.4). Для всех значений  $\alpha$  справедливо соотношение, которое отражает вариационное свойство собственных значений [3]:

$$(\lambda_{DR})^2 \leq \int_{\Omega_R} [\nabla(u_n + u_p)]^2 d\Omega_R / \int_{\Omega_R} (u_n + u_p)^2 d\Omega_R = \mu^2(\alpha, R). \quad (2.8)$$

Здесь и далее  $\Omega_R = \Omega_0 \cap \{(x, y): |x| \leq R\}$ . Прямым вычислением проверяется (это есть следствие ограниченности носителя функции  $u_p$  в области  $\Omega_1$ ), что для больших значений  $R$  справедливо асимптотическое представление  $\mu^2(\alpha, R) \cong \xi^2 + A/R + B/R^2$ . Величины  $A$  и  $B$  зависят от  $\alpha$ . Так как параметры  $R$  и  $\alpha$  независимы, то для достаточно больших  $R$  определяющим является значение  $A$ . Справедливо выражение  $A = (\pi^2 - \xi^2 L^2)\alpha^2/2L - 4L\xi \sin(\xi)\alpha/\pi$ . Отсюда следует, что для достаточно малых  $\alpha$  значения  $A$  будут отрицательными. Поэтому для достаточно больших  $R$  и малых положительных  $\alpha$  справедливо строгое неравенство  $\mu^2(\alpha, R) < \xi^2$ . В силу этого соотношения справедливы неравенства (2.5). Теорема доказана.

**Существование волноводного свойства для составных и двойных ножевых решеток.**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.** Пусть  $G_1$  и  $G_2$  — простые ножевые решетки с одним и тем же пространственным периодом и одинаковой ориентацией (рис. 1),  $G = G_1 \cup G_2$  — объединение решеток  $[a_1, b_1]$  и  $[a_2, b_2]$  — проекций элементов  $G_1$  и  $G_2$  на ось  $x$ . Величина  $L^* = (b-a)$ , где  $[a, b] = [a_1, b_1] \cap [a_2, b_2]$ , называется длиной общей части решеток. Элементы этих решеток с координатами по оси абсцисс  $[a, b]$  называются общей частью решеток  $G_1$  и  $G_2$ .

Если  $L^* \neq 0$ , то решетка составная, иначе — двойная. Составные и двойные решетки можно рассматривать как возмущение простой ножевой решетки  $G_1$ , вносимое размещением дополнительных элементов решетки  $G_2$ . Для задачи  $B(\xi)$  с граничными условиями на  $G_1$  это означает, что пространство допускаемых решений расширено — на отрезках  $G_2$  возможны разрывы решения. Для составных и двойных решеток справедливо утверждение, которое является следствием теоремы 2.1.

**Теорема 2.2** (существование волноводного свойства составных и двойных решеток). *Составные и двойные ножевые решетки всегда обладают волноводным свойством.*

**Количество волноводных мод.** При помощи соотношения (2.5) можно оценить количество волноводных мод для каждого значения параметра  $\xi$ , описывающего сдвиг фазы колебаний в соседних межпрофильных каналах,  $0 < \xi \leq \pi$ .

**Теорема 2.3.** Для каждого фиксированного значения  $\xi$  ( $0 < \xi \leq \pi$ ), такого, что  $\xi L/\pi$  — не целое число, количество  $K(\xi)$  волноводных мод, описывающих волны, бегущие в одном направлении, удовлетворяет соотношениям  $\max(1, [\xi L/\pi]) \leq K(\xi) \leq [\xi L/\pi] + 1$ . Наибольшее количество  $K_{\max} = \bar{K}(\xi = \pi)$  волноводных мод задачи  $B(\xi)$ , описывающих волны, бегущие в одном направлении, удовлетворяет соотношению  $[L] \leq K_{\max} \leq [L] + 1$ . Здесь  $[\ ]$  — целая часть соответствующего числа. Если  $\xi L/\pi$  — целое число, то  $(\xi L/\pi - 1) \leq K(\xi) \leq \xi L/\pi$ ,  $(L - 1) \leq K_{\max} \leq L$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $R = L/2$ ;  $\lambda_{\text{NR}}^{(k)}$ ,  $\lambda_{\text{DR}}^{(k)}$  — собственные значения задачи  $B(\xi)$  для области  $\Omega_1$  с условиями Неймана или Дирихле на границе  $|x| = L/2$  соответственно. Справедливы представления

$$\{\lambda_{\text{NR}}^{(k)}\}_{k=1, \dots, (K+1)} = \{0, \pi/L, \dots, (K-1)\pi/L, K\pi/L \geq \xi\}, \quad \{\lambda_{\text{DR}}^{(k)}\}_{k=1, \dots, K} = \{\pi/L, \dots, K\pi/L\}.$$

Так как количество волноводных мод на интервале допустимых частот  $(0, \xi)$  не может быть больше  $K^*$  такого, что  $\lambda_{\text{NR}}^{(K^*)} < \xi \leq \lambda_{\text{NR}}^{(K^*+1)}$ , и не меньше  $K_*$  такого, что  $\lambda_{\text{DR}}^{(K_*)} < \xi \leq \lambda_{\text{DR}}^{(K_*+1)}$ , то из этого представления следует то, что требовалось доказать.

**Дисперсионные соотношения, полосы пропускания.** Можно считать, что параметр  $\xi$  из соотношения (1.4) является волновым числом для волноводной функции ножевой решетки. Безразмерные волноводные частоты  $\lambda$  зависят от  $\xi$ ; эти зависимости представляют собой так называемые дисперсионные соотношения. Приближенные дисперсионные соотношения для элементов решетки больших размеров представлены в [4], в настоящей работе они даны в уточненном виде.

Если учесть вид волноводной функции в свободном пространстве и межпрофильном канале, то условия (2.3) эквивалентны равенствам

$$b_n = \exp(\beta_n L/2) \left\{ \int_0^1 u_1(L/2, y) \exp[-iy(\xi + 2\pi n)] dy \right\},$$

$$b_n = -\frac{\exp(\beta_n L/2)}{\beta_n} \left\{ \int_0^1 \frac{\partial u_1(L/2, y)}{\partial x} \exp[-iy(\xi + 2\pi n)] dy \right\}$$

для  $\beta_n \neq 0$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Отсюда получается бесконечная однородная система уравнений для неизвестных величин  $\{a_m, m — \text{целые числа}\}$ , которые определяют функцию  $u_1$ :

$$\left\{ \int_0^1 \left[ u_1(L/2, y) + \frac{1}{\beta_n} \frac{\partial u_1(L/2, y)}{\partial x} \right] \exp[-iy(\xi + 2\pi n)] dy \right\} = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.9)$$

После интегрирования, замены неизвестных и упрощения однородная система уравнений (2.9) относительно неизвестных величин  $\{\tilde{a}_m\}$  примет вид

$$\left\{ \sum_{m=0}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\beta_n - \alpha_m} + \frac{\exp(-L\alpha_m)}{\beta_n + \alpha_{r_1}} \right] \tilde{a}_m = 0 \right\}.$$

Эта система уравнений имеет канонический вид, и ее можно исследовать при помощи метода разложения определителя [4]. Следствием является дисперсионное соотношение, справедливое для всех волноводных мод:

$$\sin[\Theta(\lambda, \xi)] = 0. \quad (2.10)$$

Здесь

$$\Theta(\lambda, \xi) = \left\{ \lambda L - 2 \frac{\lambda \ln(2)}{\pi} - \frac{\lambda}{\pi} \left[ \Psi\left(\frac{2N\pi + 2\pi + \xi}{2\pi}\right) + \Psi\left(\frac{2N\pi + 2\pi - \xi}{2\pi}\right) - \right. \right. \\ \left. - 2\Psi(2N + 1) - \Psi\left(\frac{2\pi + \xi}{2\pi}\right) - \Psi\left(\frac{2\pi - \xi}{2\pi}\right) + 2\Psi\left(\frac{\xi}{2\pi}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\xi}{2}\right) \right] + 2 \arcsin\left(\frac{\lambda}{|\xi|}\right) + \\ \left. + 2 \sum_{n=1}^N \left[ \arcsin\left(\frac{\lambda}{2n\pi + \xi}\right) + \arcsin\left(\frac{\lambda}{2n\pi - \xi}\right) \right] - 2 \sum_{n=1}^{2N} \left[ \arcsin\left(\frac{\lambda}{n\pi}\right) \right] - \frac{2\lambda}{\xi} \right\};$$

$N$  — некоторое натуральное число;  $\Psi(\dots)$  — логарифмическая производная гамма-функции. Дисперсионное соотношение (2.10) исследовалось численно.

**Волноводные моды. Полосы пропускания.** Движение волн вдоль направления периодичности решетки (в рассматриваемом случае вдоль оси  $y$ ) можно описать функцией вида  $u(x, y, t) = u^*(x, y) \exp(-i\lambda t)$  ( $u^*(x, y)$  — некоторая волноводная функция задачи  $B(\xi)$ ). В силу (1.4) в свободном пространстве  $u(x, y, t) = v^*(x, y) \exp[i(\xi y - \lambda t)]$ . Функция  $v^*(x, y)$  периодическая по переменной  $y$ , т. е.  $v^*(x, y + 1) = v^*(x, y)$ , и локализована в окрестности ножевой решетки. Ее можно считать комплексной амплитудой соответствующей волноводной моды. Такая точка зрения позволяет рассматривать волноводные моды как бегущие вдоль направления периодичности волны и определять длины  $L_w$  и фазовые скорости  $C_\Phi$  волн, описываемых волноводными модами:  $L_w = 2\pi/\xi$ ,  $C_\Phi = \lambda/\xi$ .

Дисперсионное соотношение (2.10) неявным образом определяет безразмерную волноводную частоту как функцию от волнового числа для каждой волноводной моды:  $\lambda_k = \lambda_k(\xi)$ ,  $k = 1, \dots, K_{\max}$ . На рис. 3 представлены графики этих функций для различных длин элементов ножевой решетки ( $L = 3, 6$ ) и линии  $\lambda = \xi$ ,  $\lambda = 2\pi - \xi$ . Интервал изменения волнового числа  $\xi$  выбран от 0 до  $2\pi$ , на интервале  $(-\pi, 0)$  дисперсионные соотношения определяются при помощи симметрии и периодичности задачи по  $\xi$ .

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1.** Для любых длин  $L$  элементов ножевой решетки существует конечное число дисперсионных соотношений, соответствующих волноводным модам. Количество  $K_{\max}$  дисперсионных соотношений определяется теоремой 2.3 для волн, бегущих в одном направлении.

**Теорема 2.4.** Для любых длин  $L$  элементов ножевой решетки существует конечное число полос пропускания, которые определены полуинтервалом  $\sigma_1 = (0, \lambda_1^{\max}]$  и отрезками  $\sigma_k = \{\lambda : (k-1)\pi/L < \lambda_k^{\min} \leq \lambda \leq \lambda_k^{\max} < k\pi/L\}$ ,  $k = 2, \dots, K_{\max}$ . Полосы пропускания с нечетными номерами соответствуют  $\alpha$ -модам, с четными —  $\beta$ -модам ( $\sigma_{2k-1} \leftrightarrow \alpha_k$ ,  $\sigma_{2k} \leftrightarrow \beta_k$ ,  $k = 1, \dots, [K_{\max}/2]$ ).

Верхние и нижние границы полос пропускания как функции от длины элемента решетки можно найти при помощи дисперсионного соотношения (2.10). Верхние границы определяются при помощи подстановки  $\xi = \pi$ , а нижние —  $\xi = \lambda$  в (2.10).

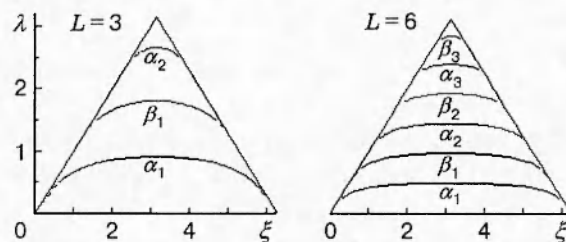


Рис. 3



На рис. 4 показана зависимость ширины и количества полос пропускания простой ножевой решетки от ее геометрических параметров для соответствующих волноводных мод.

Приведенные выше утверждения дополняют, уточняют и согласуются с результатами, полученными иными методами и на «физическом» уровне строгости [4].

Следствием симметрии задачи и, соответственно, дисперсионных соотношений по волновому числу  $\xi$  относительно точки  $\xi = \pi$  является то, что групповая скорость  $C_{гр}$  волн, описываемых волноводными модами, равна нулю ( $C_{гр} = 0$ ) в точке  $\xi = \pi$  для всех волноводных мод. Поэтому одномерно-периодическая ножевая решетка обладает  $K_{max}$  резонансными частотами  $\lambda_k = \lambda_k(\pi)$ ,  $k = 1, \dots, K_{max}$ . Это есть существенное отличие ножевой решетки от дискретной периодической структуры типа масса — пружинка.

Асимптотическое представление дисперсионных соотношений для первых волноводных мод. При бесконечном удлинении элементов решетки соотношения (2.10) позволяют определить поведение волноводных частот  $\lambda^{(k)} = \lambda^{(k)}(\xi, L)$  задачи  $B$  для первых волноводных мод ( $k = 1, 2, \dots$ ) в окрестности нуля. Справедливы выражения

$$\lambda^{(k)}(\xi, L) = \frac{k\pi^2 \operatorname{tg}(\xi/2)}{L\pi \operatorname{tg}(\xi/2) - \pi - 2\Psi(\xi/2\pi) \operatorname{tg}(\xi/2) - 2 \ln(2) \operatorname{tg}(\xi/2) - 2\gamma \operatorname{tg}(\xi/2)},$$

$$\lambda^{(k)}(\xi = \pi, L) = \frac{k\pi^2}{L\pi + 2 \ln(2)},$$

где  $\gamma$  — постоянная Эйлера;  $L \gg 1$ .

Для первой волноводной моды при  $\xi \ll 1$ ,  $L > 1$  следствием (2.10) является выражение  $\lambda^{(1)}(\xi) = \xi - (L\pi - 2 \ln(2))^2 \xi^3 / \pi^2$ , которое описывает зависимость волноводных частот первой моды от сдвига фазы колебаний в соседних фундаментальных областях группы трансляций.

### 3. АНОМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО. ТОНКАЯ СТРУКТУРА СПЕКТРА

**Теорема 3.1.** *Нетривиальные аномальные частоты и аномальные функции задачи  $B(0)$  существуют для любых длин профилей простой ножевой решетки, аномальные частоты принадлежат интервалу  $(\pi, 2\pi)$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 2.1.

Оценка снизу. В силу леммы 1.2 справедливо условие антисимметрии аномальных колебаний относительно оси  $y = 1/2$ . Отсюда следует оценка снизу. Достаточно рассмотреть случай  $R = L/2$ , для которого справедливо неравенство  $\pi \leq \lambda_{NR}$ .

Оценка сверху. В (2.6) составляющие  $u_n$  и  $u_p$  приближенной аномальной функции, удовлетворяющие условиям леммы 1.2, достаточно выбрать в виде

$$u_n = \sin(2\pi y) \cos(\pi x/2R), \quad u_p = \begin{cases} \varkappa(y - 1/2) \cos(\pi x/L), & \{|x| < L/2, 0 < y < 1\} \\ 0, & \{|x| > L/2, 0 < y < 1\} \end{cases}.$$

Для больших значений  $R$  и малых  $\varkappa$  справедливо строгое неравенство  $\mu^2(\varkappa, R) < 4\pi^2$  (в обозначениях (2.8)). Теорема доказана.

Наряду с полосами пропускания, которые принадлежат интервалу  $(0, \pi^2)$ , спектр оператора задачи  $B$  содержит конечное множество обобщенных собственных значений, соответствующих частотам аномальных колебаний.

**Теорема 3.2.** *Количество  $K(L)$  частот аномальных мод колебаний на интервале  $(\pi, 2\pi)$  удовлетворяет соотношениям  $\max(1, [L\sqrt{3}]) \leq K(L) \leq [L\sqrt{3}] + 1$ . Здесь  $[ ]$  — целая часть соответствующего числа. Если  $L\sqrt{3}$  — целое число, то  $(L\sqrt{3} - 1) \leq K(L) \leq L\sqrt{3}$ .*

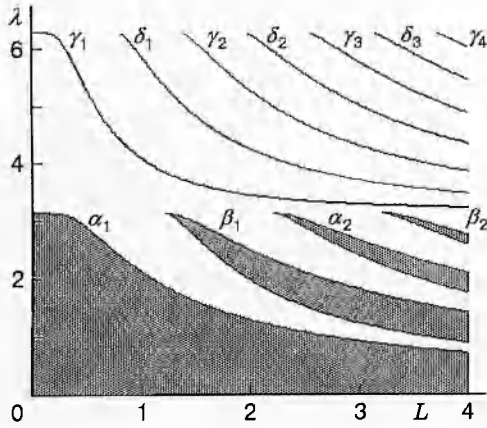


Рис. 4

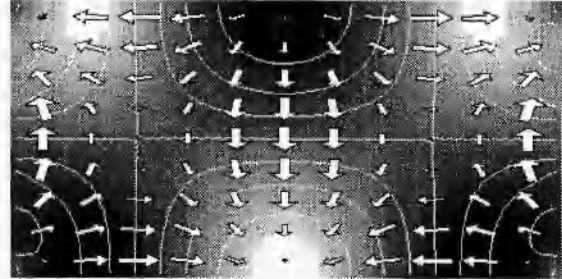


Рис. 5

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $R = L/2$ ;  $\lambda_{NR}^{(k)}$  и  $\lambda_{DR}^{(k)}$  — собственные значения задачи  $B(0)$  для области  $\Omega_1$  с условиями Неймана или Дирихле на границе  $|x| = L/2$  соответственно. Для некоторого натурального числа  $K$  справедливы выражения для собственных значений, пронумерованных в порядке возрастания

$$\{\lambda_{NR}^{(k)}\}_{k=1, \dots, K+2} = \{\pi, \pi\sqrt{1+1/L}, \dots, \pi\sqrt{1+(K-1)^2/L}, \pi\sqrt{1+K^2/L} \geq 2\pi\},$$

$$\{\lambda_{DR}^{(k)}\}_{k=1, \dots, K} = \{\pi\sqrt{1+1/L}, \dots, \pi\sqrt{1+(K-1)^2/L}, \pi\sqrt{1+K^2/L} \geq 2\pi\}.$$

Поскольку количество аномальных частот на интервале  $(\pi, 2\pi)$  не может быть больше  $K^*$  такого, что  $\lambda_{NR}^{(K^*)} < 2\pi \leq \lambda_{NR}^{(K^*+1)}$ , и не меньше  $K_*$  такого, что  $\lambda_{DR}^{(K_*)} < 2\pi \leq \lambda_{DR}^{(K_*+1)}$ , то из этого представления следует то, что требовалось доказать.

Решения задачи  $B(0)$  в соответствующих областях для  $\gamma$ - и  $\delta$ -мод колебаний имеют вид

$$u_1(x, y) = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \cos[(2m-1)\pi y] \left\{ \begin{array}{l} \text{ch}[x\sqrt{(2m-1)^2\pi^2 - \lambda^2}] \\ \text{sh}[x\sqrt{(2m-1)^2\pi^2 - \lambda^2}] \end{array} \right\},$$

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi n y) \exp[-x\sqrt{(2\pi n)^2 - \lambda^2}], \quad \left\{ \begin{array}{l} u_3(-x, y) = u_2(x, y) \\ u_3(-x, y) = -u_2(x, y) \end{array} \right\}.$$

После подстановки в (2.3) решений в указанном виде можно получить соотношения, которые дискретизовывались и исследовались численно с помощью метода прямого учета конечности энергии [2].

На рис. 4 показана зависимость частоты аномальных колебаний от длины элемента простой решетки для  $\gamma$ - и  $\delta$ -мод. На рис. 5 для случая  $L = 2$  представлены поле скоростей, линии уровня и поле давления для  $\gamma_2$ -моды в межпрофильном канале  $0 < y < 1$ . Вид мод аномальных колебаний в других межпрофильных каналах определяется условием периодичности. Механический аналог этих мод — колебания нескольких связанных цепочек связанных осцилляторов:  $\gamma_1$ -мода — синфазные колебания одной цепочки;  $\delta_1$ -мода — синфазные колебания двух связанных цепочек (цепочки колеблются в противофазе к ним);  $\gamma_2$ -мода — синфазные колебания трех связанных цепочек (две цепочки колеблются в фазе, одна — в противофазе относительно друг друга). Необходимо отметить существенное отличие аномальных колебаний около решетки от синфазных колебаний цепочки связанных осцилляторов.

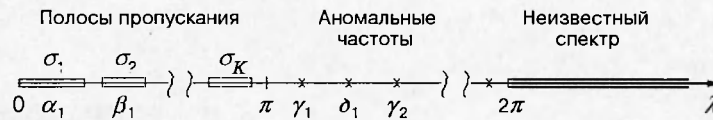


Рис. 6

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.1.** Частота аномальных колебаний около простой ножевой решетки выше, чем частота волноводных колебаний. Частота синфазных колебаний цепочки связанных осцилляторов ниже, чем частоты волноводных мод.

Полученные результаты позволяют уточнить тонкую структуру спектра соответствующих задаче  $B$  самосопряженных расширений оператора Лапласа для простой ножевой решетки. В терминах безразмерных частот тонкая структура спектра задачи  $B$  показана на рис. 6. Необходимо отметить, что в силу доказанных теорем для произвольной длины элементов решетки всегда существуют хотя бы одна полоса пропускания (типа  $\alpha$ ) и одна частота аномальных колебаний (типа  $\gamma$ ).

Полосы пропускания простой ножевой решетки принадлежат интервалу  $(0, \pi)$ , безразмерные частоты аномальных колебаний —  $(\pi, 2\pi)$ , количество полос пропускания и аномальных частот зависит от длин элементов простой ножевой решетки.

**Выводы.** 1. Доказано, что простые, составные и двойные ножевые решетки всегда обладают волноводным и аномальным свойствами. Получены критерии существования этих свойств для различных волноводных мод. Показано, что существует конечное число полос пропускания и аномальных мод, приведена классификация этих мод по допускаемым симметриям.

2. Получены и исследованы приближенные дисперсионные соотношения, описывающие распространение волн, локализованных в окрестности простых ножевых решеток. Изучен асимптотический вид дисперсионных соотношений при бесконечном увеличении размеров элементов решетки и при уменьшении сдвига фазы колебаний в соседних фундаментальных областях группы трансляций.

3. Исследована зависимость волноводных и аномальных частот и количества волноводных и аномальных мод от линейных размеров элементов простой ножевой решетки.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00894).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сухинин С. В. Эффект волновода // ПМТФ. 1989. № 2. С. 92–102.
2. Сухинин С. В. Собственные колебания около пластины в канале // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 2. С. 78–90.
3. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974.
4. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
5. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. М.: Мир, 1982.

Поступила в редакцию 9/IV 1997 г.