



**МКЭ-МОДЕЛИРОВАНИЕ АКТИВНОГО ВЫСВОБОЖДЕНИЯ НАКОПЛЕННОЙ УПРУГОЙ
ЭНЕРГИИ В ПОРОДНОМ МАССИВЕ В ОКРЕСТНОСТИ КРУГЛОЙ ВЫРАБОТКИ**

С. В. Лавриков, А. Ф. Ревуженко

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, E-mail: lvk64@mail.ru,
Красный проспект 54, г. Новосибирск 630091, Россия*

На основе концепции горного массива как среды с внутренними источниками и стоками энергии строится плоская математическая модель, учитывающая свойство геосреды запасать энергию внутренних самоуравновешенных напряжений. Предложен численный МКЭ-алгоритм расчета квазистатических задач деформирования массива вблизи выработок с учетом динамических скачков разупрочнения. Показано, что разгрузка контура может привести к потере устойчивости выработки.

Горный массив, самоуравновешенные напряжения, высвобождение энергии, моделирование

**FEM MODELING OF ACTIVE RELEASE OF ACCUMULATED ELASTIC ENERGY
IN THE ROCK MASS NEAR A CIRCULAR OPENING**

S. V. Lavrikov and A. F. Revuzhenko

*Chinakal Mining Institute, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences,
E-mail: lvk64@mail.ru, Krasniy pr. 54, Novosibirsk 630091, Russia*

A plane mathematical model taking into account the property of the geomedium to store the energy of internal self-balanced stresses is constructed on the basis of the concept of a rock mass as a medium with internal sources and sinks of energy. A numerical FEM-algorithm is proposed for calculating quasi-static problems of deformation of a rock mass near openings, taking into account dynamic softening jumps. It is shown that boundary unloading can result in stability loss of the opening.

Rock mass, self-balanced stresses, energy release, modeling

Динамические проявления горного давления представляют собой один из основных факторов, влияющих на безопасность ведения очистных работ при подземной добыче полезных ископаемых. Прохождение выработок изменяет равновесное состояние в приконтурной зоне выработанного пространства и может спровоцировать динамическое высвобождение запасенной в массиве упругой энергии. Способность структурно-неоднородной горной породы аккумулировать часть энергии деформирования является фундаментальным ее свойством наряду с дилатансией, внутренним трением и сцеплением. Отдельные области массива могут запасать энергию в виде внутренних самоуравновешенных напряжений. При внешних воздействиях такие напряжения “развязываются” и этот процесс может носить как медленный релаксационный, так и катастрофический характер [1 – 6].

В настоящее время в геомеханике развивается несколько различных подходов к моделиро-

ванию поведения сред со структурой, например, модели с использованием внутренних переменных [7–13], модели нелокального типа [14–19], модели с использованием методов неархимедового анализа [20–22] и др. В данной работе рассмотрена континуальная модель [23], относящаяся к классу моделей с внутренними переменными и позволяющая описать внутренние самоуравновешенные напряжения породного массива. Цель работы — осуществить численное моделирование катастрофического высвобождения накопленной в массиве энергии.

Математическая модель. В работах [21, 23] рассмотрен подход и построена модель горной породы, внутренняя структура которой моделируется относительно жестким скелетом, представляющим собой эффективную регулярную упаковку зерен, и цементирующим материалом, заполняющим межзеренные поры. На границах между зернами допускаются проскальзывания. Вводятся дополнительные внутренние микропеременные, описывающие напряженно-деформированное состояние структурных элементов: t_{ij}, τ_{ij} — напряжения и $\varepsilon_{ij}^t, \varepsilon_{ij}^\tau$ — соответственно, деформации зерен в различных системах координат; $p_{ij}, \varepsilon_{ij}^p$ — напряжения и деформации поровой среды, ε_{ij}^R — величины, описывающие проскальзывания на межзеренных контактах. Условия совместности и связь между микро- и макропеременными позволяют записать определяющие соотношения модели, связывающие приращения компонент тензоров осредненных макродеформаций ε_{ij} и макронапряжений σ_{ij} , в виде

$$\begin{pmatrix} \Delta\varepsilon_{11} \\ \Delta\varepsilon_{22} \\ \Delta\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = W((T^t + R)^{-1} + 2(T^\tau + P)^{-1})^{-1} W^{-1} \begin{pmatrix} \Delta\sigma_{11} \\ \Delta\sigma_{22} \\ \Delta\sigma_{12} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где матрицы третьего порядка T^t, T^τ описывают свойства зерен в различных системах координат, P задает свойства поровой среды, R определяет условия межзеренных проскальзываний, $W(\alpha)$ отвечает за ориентацию эффективной регулярной упаковки зерен относительно декартовой системы координат Ox_1x_2 , угол α представляет собой угол напластования слоев анизотропного массива.

Ограничимся случаем, когда зерна и поровый материал являются линейно упругими средами с различными упругими постоянными. Тогда матрицы T^t, T^τ и P однозначно определяются из закона Гука через упругие коэффициент Пуассона и модуль сдвига зерен ν^t, μ^t и поровой среды ν^p, μ^p соответственно. Типичная диаграмма сдвига для большинства геоматериалов имеет вид, представленный на рис. 1 (жирная линия). Аппроксимируем ее кусочно-линейной функцией (тонкая линия), тогда условия для приращений микропроскальзываний (в общем случае предполагается $\varepsilon_{12}^R \neq \varepsilon_{21}^R$) примут вид

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{11}^R = \Delta\varepsilon_{22}^R &= 0, \\ \Delta\varepsilon_{12}^R &= \Delta t_{12} / G_1^s, \\ \Delta\varepsilon_{21}^R &= \Delta t_{12} / G_2^s, \end{aligned} \quad G_i^s = \begin{cases} G_i^e, & 0 \leq \gamma_i < \gamma_i^*, \\ -G_i^p, & \gamma_i^* \leq \gamma_i < \gamma_i^{**}, \\ 0, & \gamma_i^{**} \leq \gamma_i, \end{cases} \quad (2)$$

где $G_i^e > 0, G_i^p > 0, \gamma_i^*, \gamma_i^{**}$ — заданные константы. В силу нелинейности модули контактного взаимодействия G_i^s меняются по мере развития сдвигов. При сделанных предположениях матрица R будет иметь один ненулевой элемент $R_{33} = (G_1^s + G_1^s) / (2G_1^s G_2^s)$.

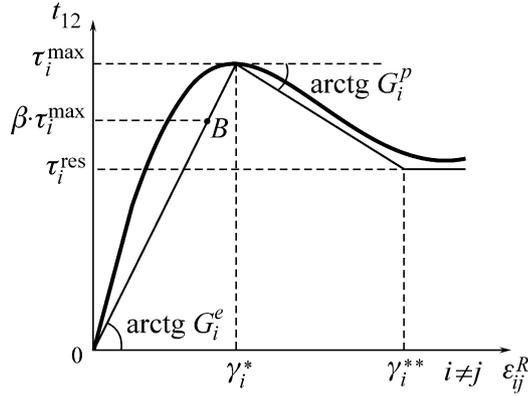


Рис. 1. Диаграмма контактного взаимодействия между зернами среды

Определяющих соотношений (1) недостаточно для описания самоуравновешенных напряжений в массиве. Необходимо найти, каким образом эти напряжения распределены между структурными элементами (зернами и поровой средой). Условия совместности микро- и макрохарактеристик, согласно [21], имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^* &= t_{ij} + 2mp_{ij} = t_{ij} + 2(1-m)\tau_{ij}, \\ \varepsilon_{ij}^* &= \varepsilon_{ij}^t + \varepsilon_{ij}^R = (1-m)\varepsilon_{ij}^\tau + m\varepsilon_{ij}^p,\end{aligned}\tag{3}$$

где безразмерная величина $0 < m < 1$ имеет смысл параметра просветности; σ_{ij}^* — проекции макронапряжений на оси регулярной упаковки зеренного скелета. Пусть в некотором объеме среды зафиксировано напряженное состояние зерен и порового материала, т. е. определены тензоры t_{ij} , p_{ij} . Тогда напряженное состояние макрообъема σ_{ij}^* вычисляется однозначно. Обратная задача имеет множество решений. Возможна ситуация, когда в зернах и поровой среде действуют различные по знаку и компенсирующие друг друга ненулевые напряжения, а суммарные макронапряжения будут равны нулю, т. е. $t_{ij} \neq 0$, $p_{ij} \neq 0$, $\sigma_{ij}^* = 0$.

Уравнения (1) дополняются соотношениями Коши и замыкаются уравнениями равновесия. Решение будем строить численно с использованием метода конечных элементов в квазистатической постановке.

Очевидно, что прямое моделирование динамических проявлений в рамках квазистатической постановки невозможно. В [24] предложен алгоритмический прием, в рамках которого в момент динамического скачка вводится искусственная внешняя сила, сдерживающая этот скачок и позволяющая “сравить” накопленную энергию в квазистатическом режиме. В результате сдвиги на контактах получают то же самое приращение, какое они получили бы в рамках динамической задачи без учета сил инерции. Указанный прием позволяет получить удовлетворительное приближение к решению задачи с учетом динамических скачков разупрочнения.

Постановка задачи. Пусть задан породный массив $R_0 \leq r \leq R_1$, окружающий горизонтальную выработку кругового сечения (рис. 2). Начальные напряжения (верхний индекс — номер шага нагружения) выберем в виде

$$\sigma_{22}^0 = -\gamma(H - x_2), \quad \sigma_{11}^0 = \xi \sigma_{22}^0, \quad \sigma_{12}^0 = 0,\tag{4}$$

где H — глубина залегания выработки; ξ — коэффициент бокового распора; γ — удельный вес среды. Предположим, что в нетронутом массиве проходит выработка и нагружение сводится к уменьшению давления на ее контуре. Краевые условия на одном шаге по приращениям примут вид (в полярных координатах)

$$\Delta\sigma_{rr}|_{R_0} = -\Delta d^k \sigma_{rr}^0|_{R_0}, \quad \Delta\sigma_{r\theta}|_{R_0} = -\Delta d^k \sigma_{r\theta}^0|_{R_0}, \quad (5)$$

где $0 \leq \Delta d^k \leq 1$ — параметр нагружения (доля снимаемой нагрузки на контуре), k — шаг нагружения. При выполнении условия $d = \sum_k \Delta d^k = 1$ контур выработки полностью разгружается. Краевые условия на внешней границе, в силу ее удаленности от контура, имеют вид

$$\Delta\sigma_{rr}|_{r=R_1} = 0, \quad \Delta\sigma_{r\theta}|_{r=R_1} = 0. \quad (6)$$

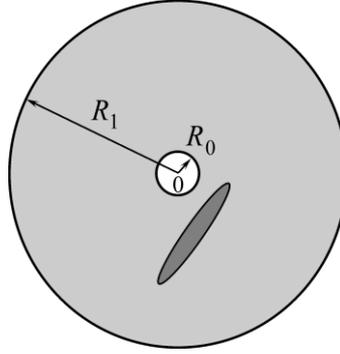


Рис. 2. Расчетная область массива в окрестности выработки

Зададим следующие значения параметров (все величины размерности напряжения отнесены к $10 \cdot \tau^{\max}$, а величины размерности длины — к R_0)

$$\begin{aligned} \mu^t &= 2 \cdot 10^3, \quad \mu^p = 5 \cdot 10^2, \quad \nu^t = 0.2, \quad \nu^p = 0.3, \\ \gamma_1^* &= \gamma_2^* = 10^{-3}, \quad \gamma_1^{**} = \gamma_2^{**} = 1.001 \cdot 10^{-3}, \quad \tau_1^{\max} = \tau_2^{\max} = 0.1, \quad \tau_1^{res} = \tau_2^{res} = 0, \\ R_1 &= 10, \quad R_0 = 1, \quad H = 5 \cdot 10^2, \quad \gamma = 0.08, \quad \xi = 0.42, \quad \alpha = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Параметры (7) обеспечивают выполнение условия эллиптичности замкнутой модели, при этом в массиве будут происходить динамические скачки разупрочнения.

Теперь необходимо найти распределение начальных макронапряжений (4) между элементами внутренней структуры. Предположим, что

$$\begin{aligned} t_{11}^0 &= 0.5 \sigma_{11}^{0*}, \quad p_{11}^0 = 0.5 \sigma_{11}^{0*} / (2m), \\ t_{22}^0 &= 0.5 \sigma_{22}^{0*}, \quad p_{22}^0 = 0.5 \sigma_{22}^{0*} / (2m), \\ t_{12}^0 &= 0.5 \sigma_{12}^{0*} + \beta \tau^{\max}, \quad p_{12}^0 = (0.5 \sigma_{12}^{0*} - \beta \tau^{\max}) / (2m), \end{aligned} \quad (8)$$

где β — безразмерный параметр. Нормальные компоненты напряжений распределены между зернами и поровой средой в равных долях (здесь и ниже полагаем $m = 0.5$). Распределение касательной компоненты зависит от параметра β . Если $\beta = 0$, то сдвиговая нагрузка на контактах также равномерно распределена между зернами и поровой средой. При $\beta \neq 0$ это распределение будет неравномерным. Напряжения (8) удовлетворяют условиям совместности (3).

Будем считать, что в массиве в окрестности выработки присутствует аномальная зона, в которой сосредоточены разные по знаку и уравнивающие друг друга касательные микронапряжения. Конфигурацию зоны выберем в виде эллиптической области (показана темным цветом на рис. 2) и далее рассмотрим две задачи: в первой всюду в области положим $\beta = 0$, во второй — внутри аномальной зоны зададим $\beta = 0.8$. Таким образом, в обеих задачах заданы одни и те же начальные макронапряжения (4). Отличие состоит в их распределении между структурными элементами среды.

Численные результаты. На рис. 3 представлено последовательное изменение параметра нагружения d по мере увеличения числа шагов нагружения. Видно, что в первой задаче (кривая OA) контур выработки разгружается полностью (в точке A параметр $d = 1$). Расчеты показывают, что увеличение межзеренных сдвигов происходит последовательно в разных точках расчетной области. При переходе диаграммы сдвига на межзеренных контактах через пиковую нагрузку и выходе на стадию разупрочнения в данной точке происходит локальный скачок разупрочнения. Однако окружающий массив имеет достаточный запас прочности и, как показывает расчет, полностью компенсирует снижение сдвиговой прочности массива в областях разупрочнения. В целом, процесс разгрузки контура осуществляется сравнительно устойчиво, т. е. без срывов диаграммы нагружения OA . На рис. 4а темным цветом изображены зоны деградации сдвиговой прочности, а на рис. 5а, 6а — расчетные изолинии инвариантных величин $T = 0.5\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}$ и $\Gamma = \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + 4\varepsilon_{12}^2}$ в момент разгрузки контура.



Рис. 3. Изменение параметра нагружения d : OA — задача 1; $OBCD$ — задача 2

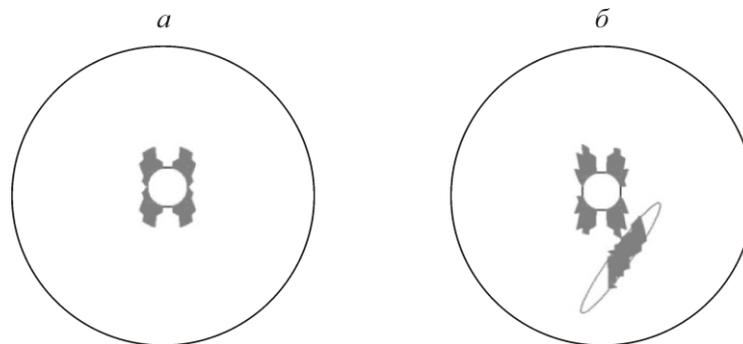


Рис. 4. Зоны потери сдвиговой прочности в окрестности контура выработки: a — задача 1, $\beta = 0$; b — задача 2, внутри аномальной зоны $\beta = 0.8$

Иначе происходит процесс разгрузки контура выработки, если в ее окрестности присутствует область запасенной энергии. В этом случае (кривая $OBCD$ на рис. 3) полностью разгрузить выработку не удастся. Деформирование сопровождается серией скачков разупрочнения, которые происходят не последовательно в отдельных точках по мере нагружения, а скачком в конечной области массива. При этом наблюдается скачкообразное уменьшение параметра d , что означает рост нагрузки на контуре выработки. Такое поведение связано с высвобождением энергии самоуравновешенных напряжений в аномальной зоне. На участке BD наблюдается динамический скачок, при котором параметр d переходит через нуль (в точке C) и принимает отрицательное значение. Это значит, что высвобождение энергии приводит к такому росту давления на контуре выработки, которое превышает исходное давление в ненарушенном массиве. Без специальных мер по обеспечению адекватного отпора крепи разгрузка контура выработки

приводит к потере ее устойчивости и схлопыванию. На рис. 4б показано развитие областей потери сдвиговой прочности. Переход параметра нагружения через нулевое значение происходит в момент смыкания областей, развивающихся независимо от контура выработки и внутри аномальной зоны. Из анализа напряженно-деформированного состояния (рис. 5б, 6б) следует, что развязывание самоуравновешенных напряжений внутри аномальной зоны сопровождается интенсивными сдвигами и приводит к существенной асимметрии напряжений.

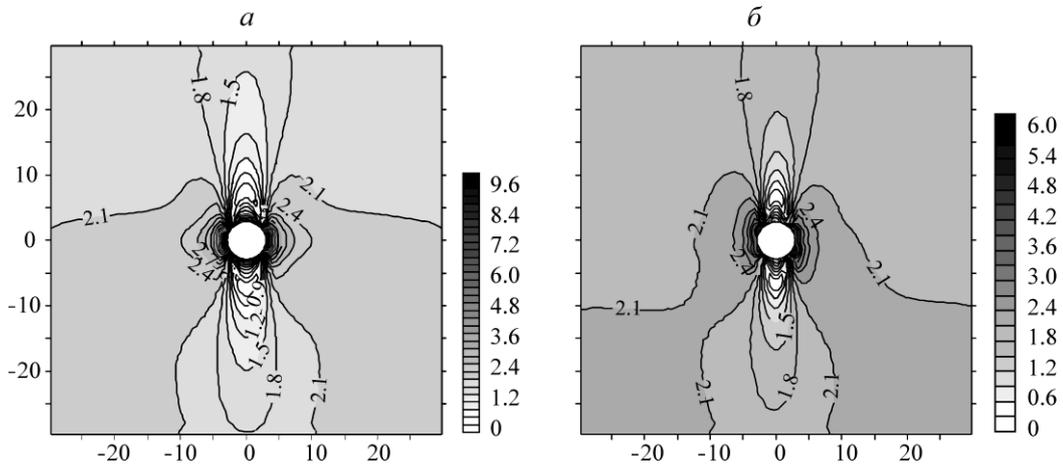


Рис. 5. Изолинии T : a — задача 1, всюду $\beta = 0$; b — задача 2, внутри аномальной зоны $\beta = 0.8$

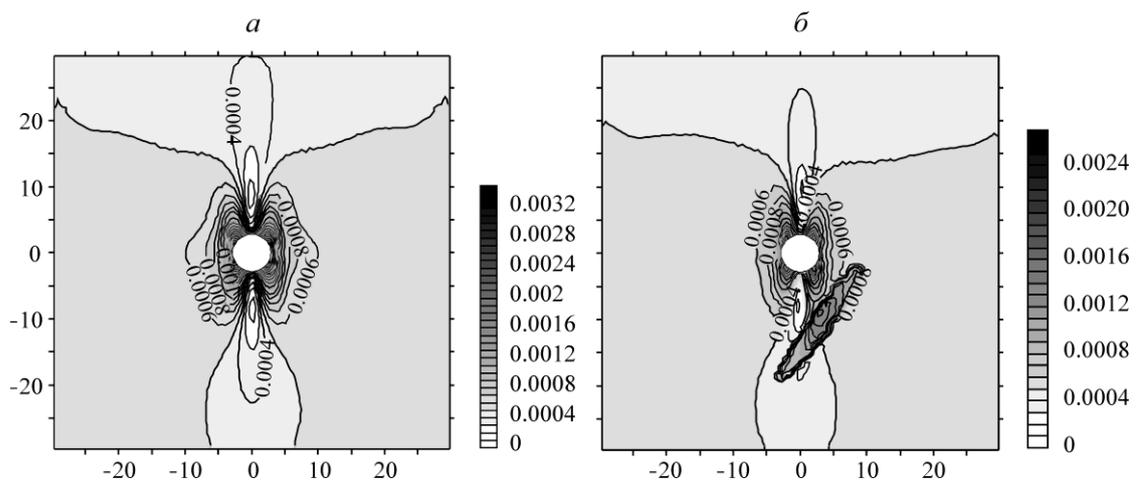


Рис. 6. Изолинии Γ : a — задача 1, всюду $\beta = 0$; b — задача 2, внутри аномальной зоны $\beta = 0.8$

ВЫВОДЫ

Предложенный подход и математическая модель позволяют осуществлять численный анализ деформирования и устойчивости массива горных пород с учетом динамических скачков разупрочнения. Прохождение выработки в породном массиве в зависимости от начального распределения внутренних самоуравновешенных напряжений в приконтурной зоне может сопровождаться динамическими проявлениями горного давления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Sobolev G. A. and Ponomarev A. V. Physics of earthquakes and precursors, Moscow, Nauka, 2003, 270 pp. (in Russian) [Соболев Г. А., Пономарев А. В. Физика землетрясений и предвестники. — М.: Наука, 2003. — 270 с.]

2. **Ponomarev V. S.** Problems of studying an energetically active geologic medium, *Geotectonics*, 2011, 45(2), pp. 157–165. [**Пономарев В. С.** Проблемы изучения энергетически активной геологической среды // Геотектоника. — 2011. — № 2. — С. 66–75.]
3. **Kocharyan G. G.** *Fault Geomechanics*, Moscow, Geos, 2016, 424 pp. [**Кочарян Г. Г.** Геомеханика разломов. — М.: Геос, 2016. — 424 с.]
4. **Stavrogin A. N. and Shirkes O. A.** Aftereffect in rocks caused by preexisting irreversible deformations, *Journal of Mining Science*, 1986, vol. 22, pp. 235–244. [**Ставрогин А. Н., Ширкес О. А.** Явление последействия в горных породах, вызванное предшествующей необратимой деформацией // ФТПРПИ. — 1986. — № 4. — С. 235–244.]
5. **Peng Z. and Gomberg J.** An integrated perspective of the continuum between earthquakes and slow-slip phenomena, *Nature Geoscience*, 2010, vol. 3, pp. 599–607.
6. **Brune J. N.** Tectonic stress and the spectra of seismic shear waves from earthquakes, *J. of Geophysical Research.*, 1970, vol. 75, issue 26, pp. 4997–5009.
7. **Novozhilov V. V. and Kadashevich Yu. I.** Microstresses in structural materials, Leningrad, Mashinostroenie, 1990, 223 pp. (in Russian) [**Новожилов В. В., Кадашевич Ю. И.** Микронапряжения в конструкционных материалах. — Л.: Машиностроение, 1990. — 223 с.]
8. **Kadashevich Yu. I. and Novozhilov V. V.** Plasticity theory taking into account residual microstresses, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1958, vol. 22, issue 1, pp. 78–89. (in Russian) [**Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В.** Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения // ПММ. — 1958. — Т. 22. — Вып. 1. — С. 78–89.]
9. **Kolymbas D., Herle I., and von Wolfersdorff P. A.** Hypoplastic constitutive equation with internal variables, *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1995, vol. 19, pp. 415–436.
10. **Xiao Y. and Desai C. S.** Constitutive Modeling for Overconsolidated Clays Based on Disturbed State Concept. I: Theory, *International Journal of Geomechanics*, 2019, vol. 19, issue. 9.
11. **Lavrikov S. V. and Revuzhenko A. F.** Model of deformation of pillars with consideration of the effects of energy storage and weakening of the material, *Journal of Mining Science*, 1994, vol. 30, pp. 533–542. [**Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф.** О модели деформирования целиков с учетом эффектов аккумуляции энергии и разупрочнения материала // ФТПРПИ. — 1994. — № 6. — С. 12–23.]
12. **Lavrikov S. V.** On the calculation of the stress-strain state of a weakening block massif near a mine, *Physical Mesomechanics*, 2010, vol. 13, no. 4, pp. 53–63. (in Russian) [**Лавриков С. В.** О расчете напряженно-деформированного состояния разупрочняющегося блочного массива вблизи выработки // Физическая мезомеханика. — 2010. — Т. 13. — № 4. — С. 53–63.]
13. **Kolymbas D., Lavrikov S. V., and Revuzhenko A. F.** Deformation of anisotropic rock mass in the vicinity of a long tunnel, *Journal of Mining Science*, 2012, vol. 48, pp. 962–974. [**Колымбас Д., Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф.** О деформировании анизотропного горного массива в окрестности горизонтальной протяженной выработки // ФТПРПИ. — 2012. — № 6. — С. 21–36.]
14. **Kunin I. A.** *Theory of elastic media with microstructure*, Moscow, Nauka, 1975, 416 pp. (in Russian) [**Кунин И. А.** Теория упругих сред с микроструктурой. — М.: Наука, 1975. — 416 с.]
15. **Eringen A. K.** Micropolar elasticity theory, Moscow, Mir, 1975, vol. 2, pp. 646–752. (in Russian) [**Эринген А. К.** Теория микрополярированной упругости. — М.: Мир, 1975. — Т. 2. — С. 646–752.]
16. **Truesdell C. A. and Toupin R. A.** *Handbuch der Physik*, edited by S. Flugge, Berlin, Springer-Verlag, 1960, pp. 226–793.
17. **Zeng T., Shao J. F., and Xu W. Y.** A micromechanical model for the elastic–plastic behavior of porous rocks, *Computers and Geotechnics*, 2015, vol. 70, pp. 130–137.
18. **Revuzhenko A. F. and Mikenina O. A.** Elastoplastic model of rocks with a linear structural parameter, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2018, vol. 59, pp. 332–340. [**Ревуженко А. Ф., Микенина О. А.** Упругопластическая модель горной породы с линейным структурным параметром // ПМТФ. — 2018. — № 2. — С. 167–176.]

19. **Altukhov V. I., Lavrikov S. V., and Revuzhenko A. F.** Analysis of stress concentration in rock pillars in the framework of a nonlocal elastic model with a structural parameter, *Fundamental and Applied Mining Science*, 2019, vol. 6, no. 1, pp. 39–45. (in Russian) [**Алтухов В. И., Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф.** Анализ концентрации напряжений в целиках горной породы в рамках нелокальной упругой модели со структурным параметром // *Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук*. — 2019. — Т. 6. — № 1. — С. 39–45.]
20. **Revuzhenko A. F.** Applications of non-Archimedean analysis in the block hierarchical rock mass mechanics, *Journal Mining of Science*, 2016, vol. 52, pp. 842–850. [**Ревуженко А. Ф.** О приложениях неархимедова анализа в механике блочно-иерархической геосреды // *ФТПРПИ*. — 2016. — № 5. — С. 14–22].
21. **Revuzhenko A. F.** *Mechanics of elasto-plastic media and non-standard analysis*. Novosibirsk: NGU, 2000, 428 pp. (in Russian) [**Ревуженко А. Ф.** *Механика упругопластических сред и нестандартный анализ*. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 2000. — 428 с.]
22. **Lavrikov S. V., Mikenina O. A., and Revuzhenko A. F.** A non-Archimedean number system to characterize the structurally inhomogeneous rock behavior nearby a tunnel, *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, 2011, 3 (2), pp. 153–160.
23. **Lavrikov S. V. and Revuzhenko A. F.** Mathematical Modeling of Deformation of Self-stress Rock Mass Surrounding a Tunnel, in book: *Desiderata Geotechnica*, ed. by W. Wu, Springer Conference Series, Springer Nature Switzerland AG, 2019, pp. 79–85.
24. **Lavrikov S. V. and Revuzhenko A. F.** Deformation of a blocky medium around a working, *Journal of Mining Science*, 1990, vol. 26, pp. 485–492. [**Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф.** О деформировании блочной среды вокруг выработки // *ФТПРПИ*. — 1990. — № 6. — С. 7–15.]