

УДК 550.837:517.958

**РЕШЕНИЕ СИСТЕМ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ
ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ
ГЕОЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ
МОРСКОЙ ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКИ**

П.А. Домников

*Новосибирский государственный технический университет
p_domnikov@mail.ru*

Рассматривается метод решения систем конечноэлементных уравнений, возникающих при использовании векторного метода конечных элементов с применением технологии разделения поля для моделирования трехмерных гармонических электромагнитных полей, возбуждаемых горизонтальной электрической линией в морской среде. Показано преимущество разработанного подхода к решению конечноэлементных систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при решении задач морской электроразведки.

Ключевые слова: морская электроразведка, векторный метод конечных элементов, предобусловливание.

1. Введение

Математическое моделирование геоэлектромагнитных полей является одной из важнейших составляющих технологий морской электроразведки [1–5]. При разработке соответствующих программ важнейшими показателями является точность получаемых результатов моделирования и вычислительная эффективность.

С учетом того, что для задач морской электроразведки характерна определенная специфика (закрывающаяся, например, в необходимости учета рельефа дна), метод конечных элементов (МКЭ) при решении этих задач обладает заметными преимуществами по сравнению с другими сеточными методами. При этом вычислительно наиболее трудоемкой при реализации МКЭ является процедура решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), получаемых в результате конечноэлементной аппроксимации.

В данной работе будет рассмотрен подход, позволяющий существенно снизить вычислительные затраты при решении трехмерных задач морской электроразведки с использованием векторного МКЭ.

2. Математический аппарат

Вычислительные схемы, использованные для расчета трехмерных гармонических по времени геоэлектромагнитных полей, основаны на технологии разделения моделируемого поля на нормальную составляющую, создаваемую источником во вмещающей (однородной или горизонтально-слоистой) среде, и на аномальную составляющую

Работа проводилась при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации.

щую, которая описывает поле влияния расположенных во вмещающей среде неоднородностей удельной проводимости (аномальное поле) [6–9].

Вектор-потенциал $\vec{\bar{A}}^a$ аномального поля может быть получен из решения следующего векторного уравнения [7]:

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot} \cdot \text{rot} \vec{\bar{A}}^a + i\omega \sigma \vec{\bar{A}}^a = (\sigma - \sigma^n) \vec{\bar{E}}^n, \quad (1)$$

где μ_0 – магнитная проницаемость вакуума, i – мнимая единица, ω – круговая частота поля источника, σ – удельная проводимость трехмерной среды, σ^n – удельная проводимость вмещающей (однородной или горизонтально-слоистой) среды, $\vec{\bar{E}}^n$ – распределение напряженности электрического поля во вмещающей среде (нормальное поле). Аномальная составляющая напряженности электрического поля $\vec{\bar{E}}^a$ определяется соотношением $\vec{\bar{E}}^a = -i\omega \vec{\bar{A}}^a$.

Эквивалентная вариационная постановка в форме Галеркина для уравнения (1) имеет вид

$$\frac{1}{\mu_0} \int_{\Omega} \text{rot} \vec{\bar{A}}^a \cdot \text{rot} \vec{\bar{\Psi}} d\Omega + i\omega \int_{\Omega} \sigma \vec{\bar{A}}^a \cdot \vec{\bar{\Psi}} d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma - \sigma^n) \vec{\bar{E}}^n \cdot \vec{\bar{\Psi}} d\Omega, \quad (2)$$

где вещественная и мнимая части решения $\vec{\bar{A}}^a$ и вещественная пробная функция $\vec{\bar{\Psi}}$ принадлежат пространству $\mathbf{H}_0^{\text{rot}}(\Omega)$ [7].

Однако возможен и другой способ вычисления аномального поля, основанный на представлении напряженности электрического поля в виде $\vec{\bar{E}}^a = -i\omega(\vec{\bar{A}}^a + \text{grad} V^a)$ (A – V -постановка). Тогда аномальная составляющая электромагнитного поля может быть найдена из решения следующей системы уравнений для потенциалов $\vec{\bar{A}}^a$ и V^a :

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot}(\text{rot} \vec{\bar{A}}^a) + i\omega \sigma(\vec{\bar{A}}^a + \text{grad} V^a) = (\sigma - \sigma^n) \vec{\bar{E}}^n, \quad (3)$$

$$-i\omega \text{div}(\sigma \text{grad} V^a) - i\omega \text{div}(\sigma \vec{\bar{A}}^a) = -\text{div}((\sigma - \sigma^n) \vec{\bar{E}}^n). \quad (4)$$

Соответствующая вариационная формулировка имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \int_{\Omega} \text{rot} \vec{\bar{A}}^a \cdot \text{rot} \vec{\bar{\Psi}} d\Omega + i\omega \int_{\Omega} \sigma(\vec{\bar{A}}^a + \text{grad} V^a) \vec{\bar{\Psi}} d\Omega = \\ = \int_{\Omega} (\sigma - \sigma^n) \vec{\bar{E}}^n \cdot \vec{\bar{\Psi}} d\Omega, \end{aligned} \quad (5)$$

$$i\omega \int_{\Omega} \sigma(\vec{\bar{A}}^a + \text{grad} V^a) \text{grad} \varphi d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma - \sigma^n) \vec{\bar{E}}^n \text{grad} \varphi d\Omega, \quad (6)$$

где вещественная и мнимая части вектор-потенциала $\vec{\mathbf{A}}^a$ и вещественная пробная вектор-функция $\vec{\Psi}$ по-прежнему являются элементами пространства $\mathbf{H}_0^{\text{rot}}(\Omega)$, а вещественная и мнимая части комплекснозначной функции V^a – элементами гильбертова пространства $H_0^1(\Omega)$ [7].

A – V -постановка (без использования технологии разделения поля) была использована в [11] для моделирования трехмерных полей в технических устройствах. В [12] вариационная постановка (5)–(6) (с использованием технологии разделения поля) использовалась для моделирования трехмерных магнитотеллурических полей. В работах [11] и [12] отмечается, что при некоторых значениях частоты электромагнитного поля время решения итерационными методами СЛАУ

$$Aq=b, \quad (7)$$

получаемой при дискретизации вариационной постановки (2) с использованием векторного МКЭ, может быть в несколько раз большим времени решения СЛАУ, получаемой при дискретизации вариационной постановки (5)–(6). В данной работе мы применим подход, основанный на использовании A – V -постановки для моделирования трехмерных гармонических электромагнитных полей при решении задач морской электроразведки.

СЛАУ, получаемую при дискретизации вариационной постановки (5)–(6), можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} A & AG^T \\ GA & GAG^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_a \\ q_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ Gb \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где G – прямоугольная матрица размера $n \times e$ (n и e – число узлов и ребер в конечно-элементной сетке соответственно), содержащая в i -й строке коэффициенты линейной комбинации реберных базисных вектор-функций, образующей градиент скалярной базисной функции в i -м узле. В (7) и (8) матрица A имеет размер $e \times e$ комплексных неизвестных, а вектор правой части b состоит из e комплексных неизвестных. Компоненты матрицы A и вектора b определяются соотношениями:

$$A_{ij} = \frac{1}{\mu_0} \int_{\Omega} \text{rot } \vec{\Psi}_i \cdot \text{rot } \vec{\Psi}_j \, d\Omega + i\omega \int_{\Omega} \sigma \vec{\Psi}_i \cdot \vec{\Psi}_j \, d\Omega, \quad i, j=1, \dots, e, \quad (9)$$

$$b_i = \int_{\Omega} (\sigma - \sigma^n) \vec{\mathbf{E}}^n \cdot \vec{\Psi}_i \, d\Omega, \quad i=1, \dots, e, \quad (10)$$

где базисные вектор-функции $\vec{\Psi}_i$ являются элементами пространства $\mathbf{H}_0^{\text{rot}}(\Omega)$.

Пусть предобуславливатель для матрицы системы (8) имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

В работе [13] было показано, что решение системы (8) с предобусловливателем (11) итерационными методами на подпространствах Крылова эквивалентно решению системы (7) с так называемым свернутым предобусловливателем

$$M_f = M_{11} + M_{12}G + G^T M_{21} + G^T M_{22}G. \quad (12)$$

При этом решения систем (7) и (8) связаны соотношением $q^k = q_a^k + G^T q_v^k$, где q^k – решение системы (7) на k -й итерации, а $(q_a^k, q_v^k)^T$ – решение системы (8) на k -й итерации.

В [13] для построения предобусловливателя (11) использовалось неполное LU -разложение матрицы системы (8). Однако в работах [12] и [14] было отмечено, что при использовании векторного МКЭ для решения рассматриваемого нами класса задач геоэлектромагнетизма предобусловливание на основе неполной факторизации матрицы СЛАУ является менее эффективным, чем диагональное предобусловливание. Поэтому в данной работе использовалось диагональное предобусловливание матрицы системы (8), т. е. в (11) матрицы M_{11} и M_{22} – были выбраны диагональными с элементами на главной диагонали, являющимися обратными величинами к диагональным элементам матриц A и GAG^T соответственно, а матрицы M_{12} и M_{21} состояли из нулей. Таким образом, вместо непосредственного решения системы (8) с предобусловливателем вида (11) мы будем искать решение системы (7) с использованием следующего предобусловливателя

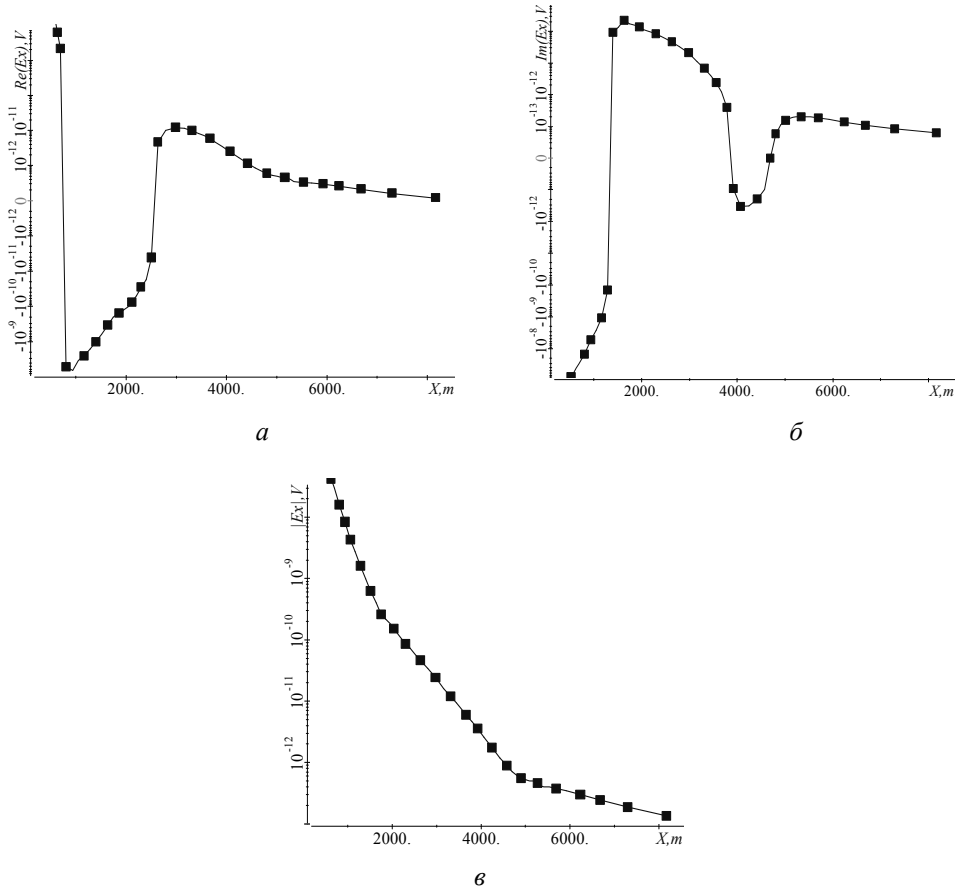
$$M = D_A^{-1} + G^T D_{GAG^T}^{-1} G, \quad (13)$$

где D_A – главная диагональ матрицы A , D_{GAG^T} – главная диагональ матрицы GAG^T (размера $n \times n$). При этом матрица GAG^T не хранилась в памяти компьютера. Диагональные элементы матрицы GAG^T вычислялись прямым умножением ненулевых элементов матриц G , A и G^T .

3. Результаты численного моделирования

Проведем исследование вычислительной эффективности разработанного математического аппарата для следующей геоэлектрической модели. Геологическая среда включает в себя слой морской воды толщиной 1000 м и проводимостью 3 См/м и грунта проводимостью 1 См/м. Морское дно имеет сложный рельеф с поднятиями до 150 м. В среду на глубину около 1000 м от морского дна помещен целевой объект размерами $[500; 2500] \times [-1000; 1000] \times [-2100; -2000]$ м³ удельной проводимостью 0,01 См/м. Поле возбуждается горизонтальной электрической линией (ГЭЛ) длиной 300 м, которая помещена на глубину 800 м. Ее электроды имеют координаты А(-150 м, 0 м, -800 м) и В(150 м, 0 м, -800 м). Частота тока источника составляла 1 Гц. Значение x -компоненты напряженности электрического поля измерялось в

приемниках, расположенных с равномерным шагом вдоль линии $y=0$ на глубине 800 м, графики значений вещественной и мнимой частей напряженности электромагнитного поля, а также его амплитуды приведены на рисунке.



Результаты 3D-моделирования в виде распределения компонент $\text{Re } E_x$ (а), $\text{Im } E_x$ (б) и $|E_x|$ (в)

Нормальное поле \vec{E}^n (поле вмещающей среды) вычислялось как поле, возбуждаемое в однородной проводящей среде гармоническим электрическим диполем, расположенным в начале координат и ориентированным вдоль оси x , по формуле (10)

$$\vec{E}^n(x, y, z) = \frac{I ds}{4\pi\sigma^n r^3} e^{-ikr} \left[\left(\frac{x^2}{r^2} \vec{u}_x + \frac{xy}{r^2} \vec{u}_y + \frac{xz}{r^2} \vec{u}_z \right) (-k^2 r^2 + 3ikr + 3) + (k^2 r^2 - ikr - 1) \vec{u}_x \right], \quad (14)$$

где I – сила тока в источнике, ds – длина источника, r – расстояние от начала координат до точки (x, y, z) , $i = \sqrt{-1}$, $k = (1-i)(0,5\mu_0\sigma^n\omega)^{1/2}$, \vec{u}_x , \vec{u}_y и \vec{u}_z – единич-

ные орты. В качестве проводимости однородного пространства σ^n было выбрано значение проводимости грунта.

Конечноэлементная сетка для расчета аномального поля состояла из 685 248 узлов и 66 1248 конечных элементов в форме прямоугольных параллелепипедов и шестигранников. Размерность соответствующей СЛАУ составляла 2 031 469 комплексных неизвестных. Для решения конечноэлементных СЛАУ был использован метод СОСР [15] со сглаживанием невязки [16]. Вычислительные затраты, требуемые для решения СЛАУ методом СОСР с диагональным предобусловливанием и свернутым предобусловливанием (13) при распараллеливании на 3 ядрах микропроцессора Intel Core2 Quad Q6600, были следующими. При использовании диагонального предобусловливания время решения СЛАУ составило 13 ч 19 мин 58 с (91 638 итераций), при использовании свернутого предобусловливателя – 50 мин 23 с (4068 итераций). Данную СЛАУ не удалось решить при использовании для предобусловливания методов, основанных на неполной факторизации матрицы СЛАУ. Критерием выхода из итерационного процесса при решении СЛАУ было уменьшение нормы невязки в 10^8 раз.

По этим результатам можно заключить, что применение свернутого предобусловливателя позволило сократить время расчета поля влияния трехмерных объектов более чем в 15 раз. Отличие решений, полученных с использованием диагонального предобусловливания и свернутого предобусловливателя при заданном уровне уменьшения нормы невязки, не превышало в точках приема поля 0,01 % при том, что сеточная погрешность для данной задачи составила несколько процентов, т.е. решение СЛАУ, полученное с использованием свернутого предобусловливателя, было получено с заведомо приемлемой точностью.

Теперь применим подход, когда в качестве \bar{E}^n берется поле горизонтально-слоистой среды, состоящей из трех слоев – воздуха, слоя морской воды и грунта. В качестве трехмерных неоднородностей были заданы придонный объект-помеха и глубинный целевой объект. В трехмерной сетке было 641 485 узлов и 618 240 конечных элементов в форме прямоугольных параллелепипедов.

Время решения конечноэлементной СЛАУ, получающейся при расчете поля влияния трехмерных неоднородностей, составило при использовании диагонального предобусловливания 1 ч 41 мин (4901 итерация), при использовании свернутого предобусловливания – 53 мин 39 с (1763 итерации). Таким образом, применение свернутого предобусловливателя позволило сократить время расчета поля влияния трехмерных объектов при выделении поля горизонтально-слоистой среды примерно в два раза.

4. Заключение

Разработана и реализована вычислительная схема расчета гармонических геоэлектромагнитных полей, возбуждаемых ГЭЛ в морских средах и содержащих трехмерные объекты.

Результаты проведенных исследований показали, что применение свернутого предобусловливания для решения СЛАУ, полученных при моделировании гармонических полей ГЭЛ в морской среде, содержащей трехмерные объекты, позволяет в зависимости от особенностей решаемой задачи от нескольких раз до порядка сократить вычислительные затраты.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] **Hoversten G.M.** 3D modeling of a deepwater EM exploration survey / G. M. Hoversten, A.G. Newman, N. Geier and G. Flanagan // *Geophysics*. – 2006, 71, № 5. – G239–G248.
- [2] **Weiss C.J.** Mapping thin resistors in the marine environment: Part 2 – Modeling and analysis in 3D / C.J. Weiss, and S. Constable // *Geophysics*. – 2006, 71. – № 6. – G321–G332.
- [3] **Gribenko A.** Rigorous 3D inversion of marine CSEM data based on the integral equation method / A. Gribenko and M. Zhdanov // *Geophysics*. – 2007, 72. – № 2. – WA73–WA84.
- [4] **Commer M.** New advances in three-dimensional controlled-source electromagnetic inversion / M. Commer and G.A. Newman // *Geophysical Journal International*. – 2008, 172. – P. 513–535.
- [5] **Frank A. Мааø.** Fast finite-difference time-domain modeling for marine-subsurface electromagnetic problems / Frank A. Мааø // *Geophysics*. – 2007, 72. – № 2. – P. A19–A23.
- [6] **Персова М.Г.** Компьютерное моделирование геоэлектромагнитных полей в трехмерных средах методом конечных элементов / М.Г. Персова, Ю.Г. Соловейчик, Г.М. Тригубович // *Физика Земли*. – 2011. – № 2. – С. 3–14.
- [7] **Соловейчик Ю.Г.** Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач / Ю.Г. Соловейчик, М.Э. Рояк, М.Г. Персова. – Новосибирск: НГТУ, 2007. – 896 с.
- [8] **Соловейчик Ю.Г.** Моделирование нестационарных электромагнитных полей в трехмерных средах методом конечных элементов / Ю.Г. Соловейчик, М.Э. Рояк, В.С. Моисеев, Г.М. Тригубович // *Физика Земли*. – 1998. – № 10. – С. 78–84.
- [9] **Badea E.A.** Finite-element analysis of controlled-source electromagnetic induction using Coulomb-gauged potentials / E.A. Badea, M.E. Everett, G.A. Newman, O. Biro // *Geophysics*. – 2001. – Vol. 66. – № 3. – P. 786–799.
- [10] **Ward S.H.** Electromagnetic theory for geophysical applications / S.H. Ward, G.W. Hohmann / В кн.: *Electromagnetic methods in applied geophysics: Volume 1, Theory*. – SEG, 2008. – P. 131–311.
- [11] **Edlinger R.** A joint vector and scalar potential formulation for driven high-frequency problems using hybrid edge and nodal finite elements / R. Edlinger, O. Biro // *IEEE Trans. Microwave Theory Tech*. – Vol. 44. – Jan. 1996. – P. 15–23.
- [12] **Домников П.А.** Конечноэлементное моделирование трехмерных магнитотеллурических полей с применением технологии деревьев-кодерьев и постановки с совместным использованием векторного и скалярного потенциалов / П.А. Домников, С.В. Киреева, М.Г. Персова, Ю.Г. Соловейчик // *Научный вестник НГТУ*. – 2011. – № 3. – С. 43–52.
- [13] **Mifune T.** Folded Preconditioner: A New Class of Preconditioners for Krylov Subspace Methods to Solve Redundancy-Reduced Linear Systems of Equations / T. Mifune, Y. Takahashi, T. Iwashita // *IEEE Transactions on Magnetics*. – Vol. 45. – No. 5. – May 2009. – P. 2068–2075.
- [14] **Домников П.А.** О методах решения конечноэлементных СЛАУ при 3D-моделировании низкочастотных магнитотеллурических полей / П.А. Домников, С.В. Киреева, И.Е. Аврунева // *Актуальные проблемы электронного приборостроения. АПЭП-2010*: материалы X международной конференции, Новосибирск, 22–24 сентября, 2010. – Том 6. – С. 118–123.
- [15] **Sogabe T.** A COCR method for solving complex symmetric linear systems / T. Sogabe, S.-L. Zhang // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – № 199(2007). – P. 297–303.
- [16] **Zhou L.** Residual smoothing techniques for iterative methods / L. Zhou, H. Walker // *SIAM J. Sci. Computing*. – Vol. 15. – № 2. – 1994. – P. 297–312.

Domnikov P.A.

SOLUTION OF SYSTEMS OF FINITE ELEMENT EQUATIONS ARISING IN TIME-HARMONIC GEOELECTROMAGNETIC FIELD MODELING IN THREE DIMENSIONAL MARINE ELECTRICAL SURVEY

Method for solving systems of finite element equations arising in vector finite element method with field separation technique for modeling a three dimensional electromagnetic field induced by horizontal electrical line in marine medium is considered. The advantage of developed approach to solving finite element systems of linear algebraic equations arising in marine electrical survey is shown.

KeyWords: Marine electrical prospecting; Vector finite element method; Preconditioning.

Статья получена 11 октября 2012 г.