

где  $g_0(\xi)$  — некоторая функция, которая не зависит от  $N$  и  $R_m$ . Следовательно, за пределами пограничного слоя возмущения поля скоростей и давления имеют порядок  $N^2/\sqrt{R_m}$ , а не  $N^2$ , как это получилось в работе [2].

Несколько слов о вычислении поля скоростей в работе [2]. Уравнение (3.1) можно записать так

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega_1(x, y) \quad \left( \omega_1 = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} - \beta u_0^2 \frac{\partial a}{\partial \xi} \frac{\partial a}{\partial \eta} \right)$$

Представим теперь  $\psi$  в виде

$$\psi = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \ln \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')} \omega_1(r', \theta') r' d\theta' dr'$$

Приняв

$$\omega_1 = \omega_0(\theta) \delta(r - 1) \quad \left( \omega_0 = \int_1^\infty \omega_1(r, \theta) dr \right)$$

(это сделать можно, так как функция  $\omega_1$  отлична от нуля в тонком пограничном слое около цилиндра), получим для  $\psi$  выражение

$$\psi = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \ln \sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \theta')} \omega_0(\theta') d\theta'$$

из которого можно найти

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{r - \cos(\theta - \theta')}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \theta')} \omega_0(\theta') d\theta'$$

Если положим формально в последнем выражении  $r = 1$ , то получим, что  $v_{\theta, r=1} = 0$ , т. е. придет к результату, на основании которого построены все выкладки в § 4 работы [2]. Но имелося так делать нельзя, так как  $\psi$  представляет собой потенциал простого слоя,  $\partial \psi / \partial r$  разрывна при  $r = 1$  и

$$\lim_{r \rightarrow 1+0} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{r - \cos(\theta - \theta')}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \theta')} \omega_0(\theta') d\theta' \neq 0$$

Автор благодарен А. И. Морозову за постоянный интерес к работе.

Поступила 14 II 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

- Ландau Л. Д., Лифшиц Е. М., Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, 1957.
- Hocking L. M. The flow of a conducting fluid past a magnetized cylinder at high magnetic Reynolds number, Appl. Sci. Res., 1961, vol. B 9, № 3.
- Жигулев В. Н. Теория магнитного пограничного слоя. Докл. АН СССР, 1959, т. 124, № 5.

### НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

**Г. В. Филиппов, В. Г. Шахов**

(Куйбышев)

Уравнения нестационарного плоского ламинарного магнитогидродинамического пограничного слоя решались рядом авторов (например, [1-4]). Ниже предлагаются решения некоторых задач для следующих случаев пространственных течений.

1. Пограничный слой на бесконечно длинном цилиндре, которому мгновенно сообщается поступательная скорость и вращение.

2. Пограничный слой на скользящем крыле, начавшем двигаться с постоянной скоростью.

1. Пограничный слой на цилиндре, вращающемся в осевом потоке. 1°. Уравнение движения вязкой жидкости в присутствии магнитного поля, нормального к поверхности тела, приближенно можно записать в виде [1]

$$\frac{dV}{dt} = -\rho^{-1} \nabla p + v \nabla^2 V - \sigma \rho^{-1} B_0^2 V \quad (1.1)$$

Здесь  $V$  — вектор скорости,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $B_0$  — магнитная индукция,  $\sigma$  — электропроводность жидкости,  $v$  — кинематический коэффициент вязкости,  $t$  — время.

Если принять, что толщина пограничного слоя мала, по сравнению с радиусом цилиндра, то для задачи о мгновенном приведении бесконечного цилиндра в движение вдоль его оси с постоянной скоростью  $U_0$  и во вращение вокруг этой же оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$  проекции уравнения (1.1) на осевое и окружное направление при фиксированном относительно жидкости магнитном поле (случай  $a$ ) примут вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \sigma \rho^{-1} B_0^2 u, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \rho \sigma^{-1} B_0^2 v \quad (1.2)$$

Здесь  $u$ ,  $v$  — составляющие скорости в пограничном слое вдоль оси цилиндра и в окружном направлении;  $z$  — координата, отсчитываемая по перпендикуляру от поверхности цилиндра.

Если магнитное поле жестко связано с цилиндром (случай  $b$ ), то

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \sigma \rho^{-1} B_0^2 (u - U_0), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \sigma \rho^{-1} B_0^2 (v - \omega r_0) \quad (1.3)$$

где  $r_0$  — радиус цилиндра.

Уравнения (1.2) с соответствующими граничными условиями аналогичны уравнениям и граничным условиям для случая развития пограничного слоя на неограниченной плоской пластине. Их решения можно найти в [1].

2°. Если толщина пограничного слоя сравнима с радиусом цилиндра, то система (1.2) становится неприменимой. Запишем уравнения для случая  $a$  в цилиндрической системе координат

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \sigma \rho^{-1} B_0^2 u, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = v \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{v}{r^2} \right] - \sigma \rho^{-1} B_0^2 v \quad (1.4)$$

Границные и начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} u &= U_0, \quad v = \omega r_0 && \text{при } r = r_0, \quad t > 0 \\ u &\rightarrow 0, \quad v \rightarrow 0 && \begin{cases} \text{при } r \geq r_0, \quad t = 0 \\ \text{при } r \rightarrow \infty, \quad t \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Переходя в (1.4), (1.5) к безразмерным переменным

$$u^0 = \frac{u}{U_0}, \quad v^0 = \frac{v}{\omega r_0}, \quad \tau_0 = \frac{vt}{r_0^2}, \quad r^0 = \frac{r}{r_0}$$

и опуская далее индексы  $0$  у безразмерных величин, получим

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - M^2 u, \quad \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - (r^{-2} + M^2) v \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} M &= \left( \frac{\sigma B_0^2 r_0^2}{\nu \rho} \right)^{1/2} \\ u &= 1, \quad v = 1 \quad \text{при } r = 1, \quad \tau > 0 \\ u &\rightarrow 0, \quad v \rightarrow 0 \quad \text{при } \begin{cases} r \geq 1, \quad \tau = 0 \\ r \rightarrow \infty, \quad \tau \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь  $M$  — число Гартмана.

Для решения системы (1.6) используем преобразования Лапласа

$$U = \int_0^\infty e^{-s\tau} u d\tau, \quad V = \int_0^\infty e^{-s\tau} v d\tau$$

Из (1.6) получим для изображений  $U$  и  $V$  систему уравнений Бесселя:

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} = (s + M^2) U, \quad \frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} = (s + M^2 + r^{-2}) V \quad (1.8)$$

с граничными условиями

$$U = 1, \quad V = 1 \quad \text{при } r = 1; \quad U \rightarrow 0, \quad V \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad (1.9)$$

Чтобы удовлетворить условию обращения изображений в нуль на бесконечности, необходимо из двух частных решений каждого из уравнений (1.8), представляемых в виде функций Бесселя от мнимого аргумента нулевого для (1.8.1) и первого для (1.8.2) порядка, использовать лишь то, которое будет содержать функцию Макдональда, т. е.

$$U = AK_0(r\sqrt{s+M^2}), \quad V = BK_1(r\sqrt{s+M^2}) \quad (1.10)$$

Определив постоянные интегрирования  $A$  и  $B$  из первого граничного условия (1.9), получим

$$U = \frac{K_0(r\sqrt{s+M^2})}{K_0(\sqrt{s+M^2})}, \quad V = \frac{K_1(r\sqrt{s+M^2})}{K_1(\sqrt{s+M^2})} \quad (1.11)$$

Оригиналы  $u$  и  $v$  находятся из формул обращения

$$u = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{K_0(r\sqrt{s+M^2})}{K_0(\sqrt{s+M^2})} e^{s\tau} \frac{ds}{s}, \quad v = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{K_1(r\sqrt{s+M^2})}{K_1(\sqrt{s+M^2})} e^{s\tau} \frac{ds}{s} \quad (1.12)$$

Проинтегрировав (1.12), сведем задачу к квадратурам

$$u = \frac{K_0(rM)}{K_0(M)} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{I_0(r\alpha) N_0(\alpha) - I_0(\alpha) N_0(r\alpha)}{I_0^2(\alpha) + N_0^2(\alpha)} e^{-(\alpha^2+M^2)\tau} \frac{\alpha d\alpha}{\alpha^2+M^2} \quad (1.13)$$

$$v = \frac{K_1(rM)}{K_1(M)} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{I_1(r\alpha) N_1(\alpha) - I_1(\alpha) N_1(r\alpha)}{I_1^2(\alpha) + N_1^2(\alpha)} e^{-(\alpha^2+M^2)\tau} \frac{\alpha d\alpha}{\alpha^2+M^2} \quad (1.14)$$

Коэффициенты трения  $C_f$  и момента трения  $C_M$  определяются уравнениями

$$C_f = \frac{2\mu}{\rho U_0^2} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=r_0} = -\frac{2}{R_1} \left[ \frac{MK_1(M)}{K_0(M)} + \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\exp[-(\alpha^2+M^2)\tau]}{I_0^2(\alpha) + N_0^2(\alpha)} \frac{\alpha d\alpha}{\alpha^2+M^2} \right] \quad R_1 = \frac{U_0 r_0 \rho}{\mu} \quad (1.15)$$

$$C_M = \frac{4\pi\mu}{\rho\omega^2 r_0^2} \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right)_{r=r_0} = \quad (1.16)$$

$$= -\frac{4\pi}{R_2} \left[ \frac{M}{2} \frac{K_2(M) + K_0(M)}{K_1(M)} + 1 + \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\exp[-(\alpha^2+M^2)\tau]}{I_1^2(\alpha) + N_1^2(\alpha)} \frac{\alpha d\alpha}{\alpha^2+M^2} \right] \quad R_2 = \frac{\omega r_0^2 \rho}{\mu}$$

При  $M \rightarrow 0$  уравнения (1.14) и (1.16) переходят в решения, указанные в [5] для обычной гидродинамики.

Для случая б ход решения аналогичен изложенному.

З°. Значения функций  $u$ ,  $v$ ,  $C_f$  и  $C_M$  могут быть найдены при помощи численных методов. Однако эти значения будут частными решениями, использование которых в практике недостаточно удобно. Попытаемся получить приближенные формулы для  $C_f$  и  $C_M$ .

Численные расчеты показали, что с достаточной степенью точности можно принять аппроксимацию

$$[I_i^2(\alpha) + N_i^2(\alpha)]^{-1} \approx C_i \alpha \quad (i = 0, 1); \quad C_0 = 1.686, \quad C_1 = 1.244 \quad (1.17)$$

Тогда квадратуры в (1.15) и (1.16) вычисляются [6]

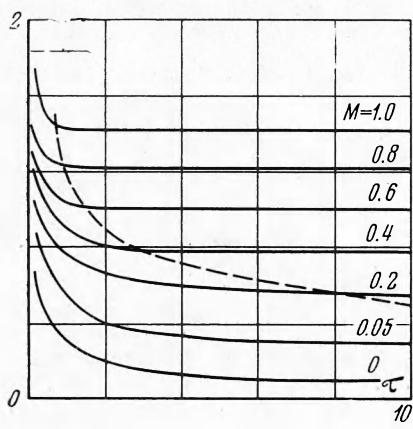
$$C_f \int_0^\infty \frac{\exp[-(\alpha^2+M^2)\tau]}{\alpha^2+M^2} \alpha^2 d\alpha = \frac{C_i}{2} \left\{ \left( \frac{\pi}{\tau} \right)^{1/2} \exp(-M^2\tau) - \pi M [1 - \operatorname{erf}(M\sqrt{\tau})] \right\} \quad (1.18)$$

Поэтому, учитывая (1.18), вместо (1.15) и (1.16) можно рекомендовать следующие приближенные формулы:

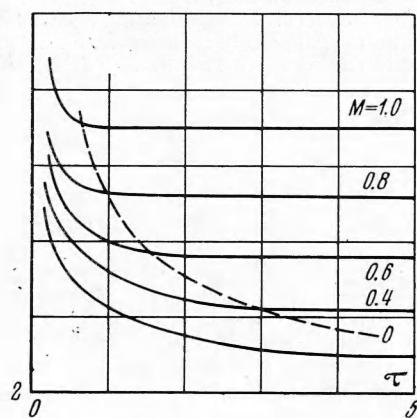
$$C_f = -\frac{2}{R_1} \left[ \frac{MK_1(M)}{K_0(M)} + \frac{C_0}{\pi^2} \left\{ \left( \frac{\pi}{\tau} \right)^{1/2} \exp(-M^2\tau) - \pi M [1 - \operatorname{erf}(M\sqrt{\tau})] \right\} \right] \quad (1.19)$$

$$C_M = -\frac{4\pi}{R_2} \left[ \frac{M}{2} \frac{K_2(M) + K_0(M)}{K_1(M)} + 1 + \frac{C_1}{\pi^2} \left\{ \left( \frac{\pi}{\tau} \right)^{1/2} \exp(-M^2\tau) - \pi M [1 - \operatorname{erf}(M\sqrt{\tau})] \right\} \right] \quad (1.20)$$

Из (1.19) и (1.20) следует, что с увеличением числа  $M$  время, требуемое для достижения предельных значений  $C_f$  и  $C_M$ , уменьшается. На фиг. 1 и 2 представлены изменения  $C_f$  и  $C_M$  для ряда значений  $M$ . Зоны стационарных и нестационарных режимов на



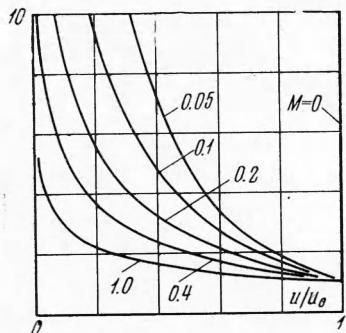
Фиг. 1



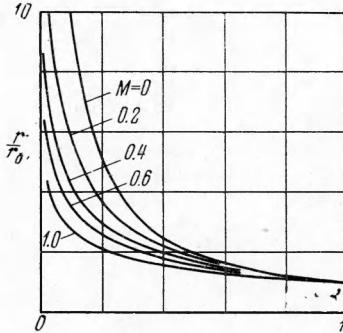
Фиг. 2

фиг. 1 и 2 разделены штриховыми линиями. Эти границы построены в предположении, что режим считается стационарным, когда  $C_f$  и  $C_M$  отличаются от своих предельных значений не более чем на 1%.

Интересным является тот факт, что в обычной гидродинамике  $u(r, \tau) \rightarrow 1$  при  $\tau \rightarrow \infty$  см. (1.13), т. е. жидкость движется вместе с цилиндром как твердое тело. Когда



Фиг. 3



Фиг. 4

$M \neq 0$ , то существуют предельные профили скорости, отличные от  $u = \text{const}$ . Для иллюстрации влияния числа  $M$  на профили скорости при установившихся режимах на фиг. 3 и 4 представлены результаты соответствующих расчетов зависимости  $u/U_0$  от  $r/r_0$ , где  $r_0$  — радиус цилиндра. Видно, что с ростом  $M$  уменьшается толщина пограничного слоя, т. е. магнитное поле как бы прижимает пограничный слой к цилинду.

2. Пограничный слой на скользящем крыле. 1°. Пусть скользящему крылу (угол скольжения  $\beta$ ), находящемуся в поперечном магнитном поле, мгновенно сообщается поступательная скорость  $W_0$ . Уравнения движения и неразрывности в силу того, что характеристики течения не зависят от координаты вдоль размаха крыла, примут вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} u \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z} = v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} v \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

Здесь  $u, v, w$  — составляющие скорости в направлении хорды, размаха и нормали к поверхности крыла,  $x, z$  — координаты, измеряемые соответственно вдоль хорды (но нормали к образующей крыла) и по нормали к поверхности крыла.

Уравнения (2.1) и (2.3) не связаны с (2.2), поэтому их можно решить независимо от последнего. Указанная система аналогична системе уравнений, описывающих развитие пограничного слоя на теле в плоском потоке [2].

Уравнения (2.1) — (2.3) решаются при граничных и начальных условиях

$$\begin{aligned} u = v = w = 0 & \quad \text{при } \begin{cases} z \geq 0, & t = 0 \\ z = 0, & t \geq 0 \end{cases} \\ u \rightarrow U(x), \quad v \rightarrow V(x) & \quad \text{при } z \rightarrow \infty, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из граничных условий (2.4) и уравнений движения (2.1) и (2.3) имеем при  $z \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = U \left( \frac{dU}{dx} + \frac{\sigma B_0^2}{\rho} \right), \quad U \frac{dV}{dx} = - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} V \quad (2.5)$$

Заметим, что  $U$  в точности соответствует распределению скорости вне пограничного слоя при плоском обтекании. Будем считать ее известной функцией координаты  $x$ . Тогда из (2.5.2) и условия, что в набегающем потоке

$$V_\infty = W_0 \sin \beta, \quad U_\infty = W_0 \cos \beta \quad (2.6)$$

следует

$$V = V_\infty \exp \left[ - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} \int_0^x \frac{dx}{U(x)} \right] \quad (2.7)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} u^\circ = \frac{u}{U_\infty}, \quad v^\circ = \frac{v}{U_\infty}, \quad U^\circ = \frac{U}{U_\infty}, \quad V^\circ = \frac{V}{U_\infty}, \quad w^\circ = \frac{w}{U_\infty} V R, \\ x^\circ = \frac{x}{b}, \quad z^\circ = \frac{z}{b} V R, \quad R = \frac{U_\infty b}{v}, \quad m = \frac{\sigma B_0^2 b}{\rho U_\infty} = \frac{M^2}{R}, \quad \tau = \frac{U_\infty t}{b} \end{aligned} \quad (2.8)$$

где  $b$  — хорда крыла.

Тогда уравнения (2.1) — (2.4) и (2.7) с учетом (2.5.1) запишутся в безразмерной форме (индексы  $\circ$  опущены)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= U \left( \frac{\partial U}{\partial x} + m \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - mu \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - mv, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} V(x) &= \operatorname{tg} \beta \exp \left[ -m \int_0^x \frac{dx}{U(x)} \right] \\ u = v = w = 0 & \quad \text{при } \begin{cases} z \geq 0, & \tau = 0 \\ z = 0, & \tau \geq 0 \end{cases} \\ u \rightarrow U(x), \quad v \rightarrow V(x) & \quad \text{при } z \rightarrow \infty, \quad \tau > 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Как и в [2], решение системы (2.9), (2.10) будем искать в виде

$$\begin{aligned}\psi &= 2 \sqrt{\tau} [f_0(x, \eta) + \tau f_1(x, \eta) + \tau^2 f_2(x, \eta) + \dots] \\ u &= \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial f_0}{\partial \eta} + \tau \frac{\partial f_1}{\partial \eta} + \tau^2 \frac{\partial f_2}{\partial \eta} + \dots \\ w &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2 \sqrt{\tau} \left( \frac{\partial f_0}{\partial x} + \tau \frac{\partial f_1}{\partial x} + \tau^2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \dots \right) \\ v &= g_0(x, \eta) + \tau g_1(x, \eta) + \tau^2 g_2(x, \eta) + \dots \quad (\eta = \frac{z}{2\sqrt{\tau}})\end{aligned}\quad (2.14)$$

Подставляя (2.14.1) в (2.9) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\tau$ , получим уравнения

$$\frac{\partial^3 f_i}{\partial \eta^3} + 2\eta \frac{\partial^2 f_i}{\partial \eta^2} - 4i \frac{\partial f_i}{\partial \eta} = 2\Pi_{1i}, \quad \frac{\partial^2 g_i}{\partial \eta^2} + 2\eta \frac{\partial g_i}{\partial \eta} - 4i g_i = 2\Pi_{2i} \quad (2.12)$$

$$\Pi_{1i} = 2\delta \left[ -\gamma U \left( \frac{dU}{dx} + m \right) - m \frac{\partial f_{i-1}}{\partial \eta} - \sum_{j+k=0}^{i-1} \left( \frac{\partial f_j}{\partial x} \frac{\partial^2 f_k}{\partial \eta^2} - \frac{\partial f_j}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f_k}{\partial x \partial \eta} \right) \right] \quad (2.13)$$

$$\Pi_{2i} = 2\delta \left[ mg_{i-1} - \sum_{j+k=0}^{i-1} \left( \frac{\partial f_j}{\partial x} \frac{\partial g_k}{\partial \eta} - \frac{\partial f_j}{\partial \eta} \frac{\partial g_k}{\partial x} \right) \right] \quad (2.14)$$

$$\delta = 0 \text{ при } i = 0, \delta = 1 \text{ при } i \geq 1, \gamma = i \text{ при } i = 1, \gamma = 0 \text{ при } i \geq 2$$

Границные и начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned}f_i &= \frac{\partial f_i}{\partial \eta} = g_i = 0 \quad \text{при } \eta = 0 \\ \frac{\partial f_0}{\partial \eta} &\rightarrow U(x), \quad g_0 \rightarrow V(x), \quad \frac{\partial f_i}{\partial \eta} \rightarrow 0, \quad g_i \rightarrow 0 \quad (i \geq 1) \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty\end{aligned}\quad (2.15)$$

Из (2.12) — (2.15) для  $i = 0$  следует

$$\frac{1}{U(x)} \frac{\partial f_0}{\partial \eta} = \frac{1}{V(x)} g_0 = \operatorname{erf} \eta \quad (2.16)$$

Принимая во внимание результаты [2], для  $i = 1$  можно записать

$$\frac{\partial f_1}{\partial \eta} = L[\eta, \Pi_{1i}], \quad g_1 = L[\eta, \Pi_{2i}] \quad (2.17)$$

Функция  $L$  обладает свойствами

$$L[\eta, \varphi] \leq 0 \quad (\varphi \geq 0, 0 < \eta < \infty)$$

$$L[\eta, k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2] = k_1 L[\eta, \varphi_1] + k_2 L[\eta, \varphi_2] \quad (k_1, k_2 \text{ — const}) \quad (2.18)$$

и имеет вид

$$\begin{aligned}L[\eta, \varphi] &= -\frac{1}{2} \sqrt{\pi} (1 - 2\eta^2) \left\{ C \operatorname{erf} \eta + \int_0^\eta \varphi(\eta) \left[ (1 - 2\eta^2) \exp \eta^2 \operatorname{erf} \eta + \frac{2\eta}{\sqrt{\pi}} \right] d\eta + \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{erf} \eta \int_0^\eta \varphi(\eta) (1 - 2\eta^2) \exp \eta^2 d\eta \right\} - C\eta \exp(-\eta^2) + \\ &\quad + \eta \exp(-\eta^2) \int_0^\eta \varphi(\eta) (1 - 2\eta^2) \exp \eta^2 d\eta \\ &\quad \left( C = \int_0^\infty \varphi(\eta) G(\eta) d\eta, \quad G(\eta) = (1 - 2\eta^2) \operatorname{erfc} \eta \exp \eta^2 - \frac{2\eta}{\sqrt{\pi}} \right)\end{aligned}\quad (2.19)$$

Уравнения для приближений более высокого порядка также могут быть сведены к обыкновенным уравнениям, которые решаются в квадратурах.

2. На основании результатов [2] следует, что

$$\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial \eta^2}\right)_{\eta=0} = -4 \int_0^\infty G(\eta) \Pi_{11}(\eta) d\eta, \quad \left(\frac{\partial g_1}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} = -4 \int_0^\infty G(\eta) \Pi_{21}(\eta) d\eta \quad (2.20)$$

Там же получено

$$\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial \eta^2}\right)_{\eta=0} = \frac{2}{V\pi} \left[ m + U' \left( 1 + \frac{4}{3\pi} \right) \right] U \quad (2.21)$$

Подставляя  $\Pi_{21}$  из (2.14) в (2.20.2), с учетом (2.16) можно записать

$$\left(\frac{\partial g_1}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} = U' V M_1 + U V N + m V C_1 \quad (2.22)$$

$$M_1 = 4 \int_0^\infty G(\eta) \kappa(\eta) d\eta, \quad \kappa(\eta) = (\operatorname{erf} \eta)' \left( \int_0^\infty \operatorname{erf} \eta d\eta \right) \\ N = -4 \int_0^\infty (\operatorname{erf} \eta)^2 G(\eta) d\eta, \quad C_1 = -4 \int_0^\infty \operatorname{erf} \eta G(\eta) d\eta \quad (2.23)$$

После вычисления интегралов (2.23) оказалось, что

$$M_1 = C_1 = \frac{2}{V\pi}, \quad N = -\frac{8}{3} \pi^{-\frac{3}{2}} \quad (2.24)$$

Коэффициенты трения на поверхности крыла с учетом (2.22), (2.24) и (2.16) равны

$$C_x = \frac{2}{V\pi R} \frac{1}{V\tau U} \left\{ 1 + \tau \left[ m + U' \left( 1 + \frac{4}{3\pi} \right) \right] + \dots \right\} \quad (2.25)$$

$$C_z = \frac{2}{V\pi R} \frac{V}{U} \frac{1}{V\tau U} \left\{ 1 + \tau \left[ m + U' \left( 1 + \frac{4}{3\pi} \frac{U}{V} \frac{V'}{U'} \right) \right] + \dots \right\} \quad (2.26)$$

Формула (2.25) получена в [2]. Оттуда же следует, что момент отрыва пограничного слоя (если он происходит), найденный с учетом только первых двух приближений, из (2.25) определяется уравнением

$$\tau^* = [-m - U' (1 + 4/3\pi)]^{-1} \quad (2.27)$$

Наиболее просто (2.25) и (2.26) записутся для случая обтекания скользящей плоской пластины в однородном поперечном магнитном поле. Из (2.5.1) и (2.10.1) следует, что в этом случае

$$U = 1 - mx, \quad V = \operatorname{tg} \beta (1 - mx) \quad (2.28)$$

Подставляя (2.28) в (2.25) и (2.26), получим с точностью до  $\tau^2$

$$C_x = \frac{C_z}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{2}{V\pi R} \frac{2}{V\tau (1 - mx)} \left( 1 - \frac{4m}{3\pi} \tau + \dots \right) \quad (2.29)$$

или с той же точностью

$$C_z = \operatorname{tg} \beta C_x \quad (2.30)$$

Результат (2.30) с указанной выше точностью совпадает с результатом, полученным для стационарного обтекания скользящей плоской пластины в обычной гидродинамике (например [7])

Поступила 14 III 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Rossow V. J. On flow of electrically conducting fluid over a flat plate in the presence of a transverse magnetic field. NACA Rep. 1358, 1958.
2. Ватажин А. Б. О развитии магнитогидродинамического пограничного слоя на теле. ПМТФ, 1965, № 4.
3. Ватажин А. Б. Развитие магнитогидродинамического пограничного слоя при внезапном возникновении движения или внезапном торможении сверхзвукового потока на границе полупространства, ПМТФ, 1965, № 2.
4. Боеев А. Г. Автомодельные решения нестационарных уравнений плоского ламинарного магнитогидродинамического пограничного слоя. ПМТФ, 1966, № 1.
5. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. Гостехиздат, 1955.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.
7. Струминский В. В. Теория пространственного пограничного слоя на скользящем крыле. Сб. теоретических работ по аэrodинамике. Оборонгиз, 1957.