

УДК 532.591+517.948

ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В УЗКОМ ОТКРЫТОМ КАНАЛЕ

А. А. Чесноков, В. Ю. Ляпидевский

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
E-mail: chesnokov@hydro.nsc.ru

Получена и исследована нелинейная интегродифференциальная модель движения идеальной несжимаемой жидкости в открытом канале с переменным сечением в приближении длинных волн. Выведено характеристическое уравнение, определяющее скорости распространения возмущений в жидкости. Сформулированы необходимые и достаточные условия обобщенной гиперболичности уравнений движения и вычислена характеристическая форма системы. В случае канала постоянной ширины модель приводится к интегральным инвариантам Римана, сохраняющимся вдоль характеристик. Установлено, что в процессе эволюции течения тип уравнений движения может меняться, что соответствует возникновению длинноволновой неустойчивости при некотором распределении скорости по ширине канала.

Ключевые слова: длинноволновое приближение, горизонтально-сдвиговые потоки, интегродифференциальные уравнения, гиперболичность.

Введение. Моделированию нелинейных волновых движений на поверхности тонкого слоя жидкости, являющемуся важной фундаментальной и прикладной задачей, посвящено большое количество работ, в том числе известные монографии [1–3] и др. Классические одномерные уравнения мелкой воды используются при описании волновых движений жидкости в открытых каналах с прямолинейными боковыми границами. В приложениях нередко возникает необходимость моделирования движения жидкости в каналах с искривленными стенками, что приводит к более сложным, существенно двумерным математическим постановкам. Большая часть математических моделей плоскопараллельного движения жидкости и газа в приближении длинных волн сводятся к нелинейным интегродифференциальным уравнениям. Качественный анализ ряда моделей теории длинных волн проведен в [4] на основе развитых В. М. Тешуковым обобщения понятия гиперболичности и метода характеристик для систем уравнений с операторными коэффициентами [5]. Известным примером использования метода обобщенных характеристик [5, 6] является модель вихревой мелкой воды [7], описывающая плоскопараллельные движения тонкого слоя идеальной жидкости со свободной границей с нетривиальным распределением скорости по глубине потока.

Рассматриваемая в данной работе математическая модель движения жидкости в протяженном канале с искривленными боковыми стенками, записанная в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных, относится к классу систем с операторными коэффици-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-01-00609), а также в рамках Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-2826.2008.1) и гранта Министерства образования и науки РФ (№ 2.1.1/3543).

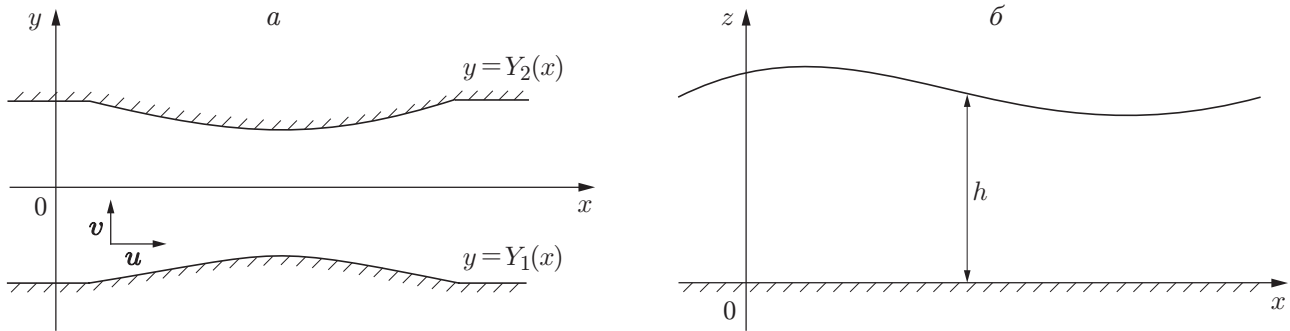


Рис. 1. Течение жидкости в открытом канале переменного сечения:
a — сечение канала плоскостью $z = \text{const}$; *б* — сечение канала плоскостью $y = \text{const}$

ентами, к которому применим метод В. М. Тешукова [5]. Это позволяет вычислить скорости распространения возмущений (модель имеет дискретный и непрерывный характеристический спектр), сформулировать необходимые и достаточные условия гиперболичности уравнений движения. Проверено выполнение условия гиперболичности на нестационарном точном решении. Показано, что в процессе эволюции горизонтально-сдвигового течения в канале возможно возникновение длинноволновой неустойчивости.

1. Вывод длинноволновой модели. Рассматриваются пространственные движения идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей $z = h(t, x, y)$ в открытом канале с ровным дном $z = 0$ и боковыми стенками $y = Y_1(x)$, $y = Y_2(x)$ в поле силы тяжести. Уравнения движения в безразмерных переменных имеют вид

$$\begin{aligned} u_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)u + p_x &= 0, & \varepsilon^2(v_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)v) + p_y &= 0, \\ \varepsilon^2(w_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)w) + p_z &= -g, & \text{div } \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

На свободной границе $z = h(t, x, y)$ должны выполняться кинематическое и динамическое граничные условия

$$h_t + uh_x + vh_y - w = 0, \quad p = p_0, \quad (2)$$

на ровном дне $z = 0$ и боковых границах $y = Y_i(x)$ ($i = 1, 2$) — условия непротекания

$$w = 0, \quad uY'_i(x) = v. \quad (3)$$

Здесь $u = L^{-1}T\bar{u}$, $v = l^{-1}T\bar{v}$, $w = l^{-1}T\bar{w}$, $p = \rho^{-1}L^{-2}T^2\bar{p}$, $x = L^{-1}\bar{x}$, $y = l^{-1}\bar{y}$, $z = l^{-1}\bar{z}$, $t = T^{-1}\bar{t}$ — компоненты вектора скорости, давление, декартовы координаты и время; $\bar{\mathbf{v}} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$, $\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ и \bar{t} — соответствующие размерные переменные. Величина L задает характерный масштаб по оси x , направленной вдоль канала, величина l — по осям y и z (рис. 1); $T = L/\sqrt{al}$ — характерный масштаб времени (a имеет размерность ускорения); постоянные ρ и g — плотность жидкости и безразмерное ускорение свободного падения; ∇ , div — операторы градиента и дивергенции, вычисляемые по пространственным переменным; $\varepsilon = l/L$ — безразмерный малый параметр.

Уравнения приближенной модели, описывающей распространение длинных волн в узком канале, получаются из уравнений (1) предельным переходом $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом из закона сохранения вертикальной компоненты импульса (третье уравнение системы (1)) следует гидростатический закон распределения давления $p = g(h - z) + p_0$, где постоянная p_0 — давление на свободной границе. В результате несложных преобразований уравнений (1) с учетом граничных условий на свободной границе (2) и на неподвижных стенках (3) получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
 u_t + uu_x + vu_y + wu_z + gh_x = 0, \quad h_y = 0, \quad w = - \int_0^z (u_x + v_y) dz, \\
 h_t + \left(\int_0^h u dz \right)_x + \left(\int_0^h v dz \right)_y = 0, \quad uY_i'(x) - v|_{y=Y_i} = 0,
 \end{aligned} \tag{4}$$

описывающую движение идеальной жидкости в узком открытом канале в приближении длинных волн.

Рассмотрим класс течений, в котором горизонтальные компоненты скорости u и v не зависят от вертикальной координаты z . При этом длинноволновая модель (4) принимает вид

$$\begin{aligned}
 u_t + uu_x + vu_y + gh_x = 0, \quad h_y = 0, \\
 h_t + (uh)_x + (vh)_y = 0, \quad uY_i'(x) - v|_{y=Y_i} = 0.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Отметим, что в случае прямолинейных боковых границ $Y_i = \text{const}$ и равенства нулю компоненты скорости ($v \equiv 0$) модель (5) сводится к классическим одномерным уравнениям мелкой воды [1]. В данной работе рассматриваются течения в каналах с искривленными стенками, что приводит к необходимости исследовать существенно двумерные движения, описываемые уравнениями (5).

Математические свойства уравнений (5) удобно изучать в полулагранжевых координатах, переход к которым осуществляется заменой переменной $y = \Phi(t, x, \lambda)$, где функция Φ — решение задачи Коши [8]

$$\Phi_t + u(t, x, \Phi)\Phi_x = v(t, x, \Phi), \quad \Phi|_{t=0} = \lambda Y_2(x) + (1 - \lambda)Y_1(x). \tag{6}$$

Лагранжева переменная $\lambda \in [0, 1]$; значения $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ соответствуют боковым границам канала $y = Y_1(x)$ и $y = Y_2(x)$. Уравнения $y = \Phi(t, x, \lambda_0)$, $\lambda_0 = \text{const}$ задают материальные поверхности, состоящие из одних и тех же частиц. В новых переменных для определения функций $u(t, x, \lambda)$, $H(t, x, \lambda) = h\Phi_\lambda$ имеем интегродифференциальную систему уравнений

$$u_t + uu_x + gh_x = 0, \quad H_t + (uH)_x = 0, \quad h = \frac{1}{\eta} \int_0^1 H d\lambda, \tag{7}$$

где $\eta(x) = Y_2(x) - Y_1(x) > 0$ — заданная ширина канала. Ниже представлен вывод уравнений (7), являющихся следствием длинноволновой модели (5).

Обозначим через \tilde{u} и \tilde{v} горизонтальные компоненты вектора скорости в полулагранжевых координатах:

$$\tilde{u}(t, x, \lambda) = u(t, x, \Phi(t, x, \lambda)), \quad \tilde{v}(t, x, \lambda) = v(t, x, \Phi(t, x, \lambda)).$$

Тогда для производных имеем представления

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{8}$$

Следующие из (8) и (6) очевидные равенства

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial x}$$

приводят к первому уравнению системы (7). В силу формул (8) и уравнения $h_y = 0$ третье уравнение системы (5) принимает вид

$$0 = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (\tilde{u}h)}{\partial x} + \frac{h}{\Phi_\lambda} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \lambda} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right). \quad (9)$$

Дифференцируя первое уравнение в (6) по переменной λ , имеем

$$\Phi_{\lambda t} + \tilde{u} \Phi_{\lambda x} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \lambda} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (10)$$

Комбинируя (9), (10) и полагая $\Phi_\lambda \neq 0$, получаем уравнение

$$\frac{\partial (h\Phi_\lambda)}{\partial t} + \frac{\partial (\tilde{u}h\Phi_\lambda)}{\partial x} = 0,$$

которое при $H(t, x, \lambda) = h(t, x)\Phi_\lambda$ совпадает со вторым уравнением системы (7). Так как $\Phi|_{\lambda=0} = Y_1(x)$ и $\Phi|_{\lambda=1} = Y_2(x)$, то из очевидного равенства

$$\eta(x) = Y_2(x) - Y_1(x) = \int_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} d\lambda = \frac{1}{h(t, x)} \int_0^1 H d\lambda$$

следует последнее уравнение интегродифференциальной модели (7).

Переход к полулагранжевым координатам является обратимой заменой переменных, если $\Phi_\lambda \neq 0$. Действительно, пусть функции $u(t, x, \lambda)$ и $H(t, x, \lambda)$ найдены. Тогда известна глубина слоя жидкости $h(t, x)$ и по формулам

$$y = \Phi(t, x, \lambda) = Y_1(x) + \frac{1}{h} \int_0^\lambda H d\lambda, \quad v = \Phi_t + u\Phi_x$$

можно определить эйлерову координату y и компоненту вектора скорости v . Отметим, что в случае постоянной ширины канала ($\eta = \text{const}$) модель (7) совпадает с уравнениями вихревой мелкой воды, описывающими плоскопараллельные движения идеальной жидкости со свободной границей в поле силы тяжести с учетом нетривиального распределения профиля скорости по глубине [5, 6].

Рассмотрим решения системы (7), удовлетворяющие неравенству $H > 0$. Это неравенство означает, что глубина жидкости в канале h и якобиан перехода к полулагранжевым переменным $\Phi_\lambda(t, x, \lambda)$ больше нуля. При этом значения лагранжевой переменной λ увеличиваются при возрастании эйлеровой координаты y . Анализ характеристических свойств модели проводится в предположении монотонного изменения скорости $u(t, x, \lambda)$ по ширине канала. Для определенности полагаем $u_\lambda(t, x, \lambda) > 0$. Если это условие выполняется в начальный момент времени $t = 0$, то в силу системы (7) оно будет выполнено и при всех $t > 0$. Сформулированные утверждения справедливы также для симметричных относительно центральной линии канала $y = 0$ течений (при этом $Y_2(x) = -Y_1(x)$), которые удовлетворяют условиям $u(t, x, \lambda) = u(t, x, 1 - \lambda)$, $u_\lambda \neq 0$ при $\lambda \in (0, 1/2)$. В этом случае линию $y = 0$ (или $\lambda = 1/2$) можно считать непроницаемой границей и рассматривать течение в области $Y_1 < y < 0$ (или $0 < y < Y_2$). Кроме того, результаты работы [9] позволяют сформулировать условия гиперболичности уравнений движения для течений с немонотонным распределением скорости $u(t, x, \lambda)$ по ширине канала в предположении, что

$$\begin{aligned} u_\lambda > 0 \quad \text{при} \quad 0 < \lambda < \lambda_*(t, x), \quad u_\lambda < 0 \quad \text{при} \quad \lambda_*(t, x) < \lambda < 1, \\ u_{\lambda\lambda}(t, x, \lambda_*(t, x)) \neq 0, \quad u(t, x, 0) < u(t, x, 1). \end{aligned} \quad (11)$$

2. Обобщенные характеристики уравнений движения. Интегродифференциальная модель (7) относится к классу систем уравнений с операторными коэффициентами, для которых в [5] предложено обобщение понятий характеристик и гиперболичности. Систему (7) можно представить в виде

$$\mathbf{U}_t + A\langle \mathbf{U}_x \rangle = \mathbf{G}, \quad (12)$$

где \mathbf{U} — вектор искомых величин:

$$\mathbf{U} = (u, H)^T,$$

\mathbf{G} — правая часть уравнения (12):

$$\mathbf{G} = \left(\frac{g\eta'(x)}{\eta^2} \int_0^1 H d\lambda, 0 \right)^T,$$

$A\langle \mathbf{U}_x \rangle$ — результат действия матричного оператора A на вектор-функцию \mathbf{U}_x :

$$A\langle \mathbf{U}_x \rangle = \left(uu_x + \frac{g}{\eta} \int_0^1 H_x d\lambda, Hu_x + uH_x \right)^T.$$

Согласно [5] характеристическая кривая системы уравнений (12) определяется дифференциальным уравнением $x'(t) = k(t, x)$, где скорость распространения характеристики k является собственным значением задачи

$$(\mathbf{F}, (A - kI)\langle \varphi \rangle) = 0. \quad (13)$$

Решение уравнения (13) относительно функционала $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ ищется в классе локально интегрируемых либо обобщенных функций. Функционал \mathbf{F} действует по переменной λ , а t и x рассматриваются как параметры; I — тождественное отображение; φ — пробная гладкая вектор-функция с компонентами $\varphi_1(\lambda)$, $\varphi_2(\lambda)$. В результате действия функционала \mathbf{F} на уравнение (12) получаем соотношение на характеристике

$$(\mathbf{F}, \mathbf{U}_t + k\mathbf{U}_x) = (\mathbf{F}, \mathbf{G}). \quad (14)$$

Система уравнений (12) является обобщенно-гиперболической [5], если все собственные значения k вещественные и совокупность соотношений на характеристиках (14) эквивалентна исходным уравнениям (12), т. е. система собственных функционалов является полной в рассматриваемом пространстве.

Характеристические свойства уравнений длинных волн для течений идеальной жидкости с вертикальным сдвигом скорости и ряда других интегродифференциальных моделей, близких по структуре к уравнениям (7), исследованы в [4–6]. Поэтому ниже приводится лишь краткое решение задачи (13) и формулируются (без доказательства) условия гиперболичности модели (7).

2.1. *Собственные функционалы и соотношения на характеристиках.* Из уравнений (13) с учетом независимости компонент пробной вектор-функции φ получаем равенства

$$\begin{aligned} (F_1, (u - k)\varphi_1) + (F_2, H\varphi_1) &= 0, \\ g\eta^{-1} \int_0^1 \varphi_2 d\lambda (F_1, 1) + (F_2, (u - k)\varphi_2) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

В силу первого уравнения в (15) действие функционала F_2 на произвольную гладкую функцию ψ можно определить через F_1 :

$$(F_2, \psi) = -(F_1, (u - k)H^{-1}\psi).$$

С использованием этого выражения из второй формулы в (15) получаем

$$(F_1, (u - k)^2 H^{-1}\psi) - \frac{g}{\eta} \int_0^1 \psi d\lambda (F_1, 1) = 0. \quad (16)$$

Рассмотрим множество чисел k , принадлежащих комплексной плоскости, за исключением отрезка $[u_0, u_1]$ (u_0, u_1 — минимальное и максимальное значения $u(t, x, \lambda)$ в зависимости от переменной λ при фиксированных t, x). Тогда уравнение (16) можно записать в эквивалентном виде

$$(F_1, \psi) = \left(\frac{g}{\eta} \int_0^1 \frac{\psi H d\lambda}{(u - k)^2} \right) (F_1, 1).$$

При $\psi = 1$ из этого уравнения следует условие существования нетривиальных решений задачи (15) — характеристическое уравнение для определения скорости распространения возмущений k :

$$\chi(k) = 1 - \frac{g}{\eta} \int_0^1 \frac{H d\lambda}{(u - k)^2} = 0. \quad (17)$$

Если $k = k^i$ — корень уравнения (17), то задача (15) имеет нетривиальное решение $\mathbf{F}^i = (F_1^i, F_2^i)$. Действие функционалов F_1^i, F_2^i задается формулами

$$(F_1^i, \psi) = \frac{g}{\eta} \int_0^1 \frac{H\psi d\lambda}{(u - k^i)^2}, \quad (F_2^i, \psi) = -\frac{g}{\eta} \int_0^1 \frac{\psi d\lambda}{u - k^i}.$$

Функционалы \mathbf{F}^i , соответствующие собственным значениям k^i , можно представить в виде

$$(\mathbf{F}^i, \boldsymbol{\varphi}) = \int_0^1 \mathbf{f}^i \cdot \boldsymbol{\varphi} d\lambda = \int_0^1 (f_1^i \varphi_1 + f_2^i \varphi_2) d\lambda, \quad (18)$$

где f_1^i, f_2^i — интегрируемые функции. Из формулы (13) следует, что $\mathbf{f}^i = (f_1^i, f_2^i)$ является собственной вектор-функцией сопряженного оператора A^* , связанного с оператором A соотношением $(A\mathbf{f}, \mathbf{g}) = (\mathbf{f}, A^*\mathbf{g})$. Здесь (\mathbf{f}, \mathbf{g}) — скалярное произведение в $L_2[0, 1]$.

Завершая построение решений уравнений (15), рассмотрим отрезок $[u_0, u_1]$ в предположении, что скорость $u(t, x, \lambda)$ монотонна по ширине канала: $u_\lambda(t, x, \lambda) > 0$, $u_0 = u(t, x, 0)$, $u_1 = u(t, x, 1)$. Ниже доказывается, что любая точка отрезка $[u_0, u_1]$ принадлежит характеристическому спектру задачи (15), но собственные функционалы являются обобщенными собственными функциями сопряженного оператора A^* и не выражаются в виде (18). Пусть $k = u(t, x, \lambda)$, λ — произвольное фиксированное значение в интервале $[0, 1]$. В этом случае система уравнений (15) принимает вид

$$\begin{aligned} (F_1, (u(\nu) - u(\lambda))\varphi_1(\nu)) + (F_2, H(\nu)\varphi_1(\nu)) &= 0, \\ g\eta^{-1} \int_0^1 \varphi_2(\nu) d\nu (F_1, 1) + (F_2, (u(\nu) - u(\lambda))\varphi_2(\nu)) &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь функционалы действуют по переменной ν . Для краткости записи используются обозначения $f(\nu) = f(t, x, \nu)$, $f(\lambda) = f(t, x, \lambda)$. Нетрудно убедиться в том, что функционалы $\mathbf{F}^{1\lambda} = (F_1^{1\lambda}, F_2^{1\lambda})$ и $\mathbf{F}^{2\lambda} = (F_1^{2\lambda}, F_2^{2\lambda})$, действие которых определяется формулами

$$\begin{aligned} (F_1^{1\lambda}, \psi(\nu)) &= -\psi'(\lambda), & (F_2^{1\lambda}, \psi(\nu)) &= \frac{u_\lambda}{H} \psi(\lambda), \\ (F_1^{2\lambda}, \psi(\nu)) &= \psi(\lambda) + \frac{g}{\eta} \int_0^1 \frac{H(\nu)(\psi(\nu) - \psi(\lambda)) d\nu}{(u(\nu) - u(\lambda))^2}, & (F_2^{2\lambda}, \psi(\nu)) &= -\frac{g}{\eta} \int_0^1 \frac{\psi(\nu) d\nu}{u(\nu) - u(\lambda)}, \end{aligned} \quad (20)$$

являются решением уравнений (19). В (20) несобственные интегралы понимаются в смысле главного значения. Данные функционалы являются обобщенными функциями. В частности, $F_1^{1\lambda} = \delta'(\nu - \lambda)$, $F_2^{1\lambda} = u_\lambda H^{-1} \delta(\nu - \lambda)$, где $\delta(\nu - \lambda)$ и $\delta'(\nu - \lambda)$ — дельта-функция Дирака и ее производная.

В результате действия собственных функционалов \mathbf{F}^i , $\mathbf{F}^{1\lambda}$, $\mathbf{F}^{2\lambda}$ на систему уравнений (12) получаем соотношения на характеристиках (характеристическую форму уравнений (7))

$$\begin{aligned} R_t + uR_x &= \frac{g\eta'(x)}{\eta^2(x)} \int_0^1 \frac{u(t, x, \nu)H(t, x, \nu) d\nu}{u(t, x, \nu) - u(t, x, \lambda)}, & \omega_t + u\omega_x &= 0, \\ r_t^i + k^i r_x^i &= \frac{g\eta'(x)}{\eta^2(x)} \int_0^1 \frac{u(t, x, \lambda)H(t, x, \lambda) d\lambda}{u(t, x, \lambda) - k^i(t, x)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь

$$\begin{aligned} R(t, x, \lambda) &= u(t, x, \lambda) - \frac{g}{\eta(x)} \int_0^1 \frac{H(t, x, \nu) d\nu}{u(t, x, \nu) - u(t, x, \lambda)}, & \omega(t, x, \lambda) &= \frac{u_\lambda(t, x, \lambda)}{H(t, x, \lambda)}, \\ r^i(t, x) &= k^i(t, x) - \frac{g}{\eta(x)} \int_0^1 \frac{H(t, x, \lambda) d\lambda}{u(t, x, \lambda) - k^i(t, x)}. \end{aligned}$$

В случае канала постоянной ширины правые части в уравнениях (21) обращаются в нуль и введенные выше величины R , ω , r^i сохраняются при дифференцировании вдоль характеристик, т. е. являются интегральными инвариантами Римана.

2.2. *Условия обобщенной гиперболичности уравнений движения.* Исследуем свойства характеристической функции $\chi(k)$ на действительной оси. Производная

$$\chi'(k) = -\frac{2g}{\eta} \int_0^1 \frac{H d\lambda}{(u - k)^3}$$

принимает отрицательные значения при $k < u_0$ и является положительной функцией при $k > u_1$. Если $k \rightarrow \pm\infty$, то $\chi(k) \rightarrow 1$; если $k \rightarrow u_0$ или $k \rightarrow u_1$, то $\chi(k) \rightarrow -\infty$ (интеграл в выражении (17) расходится, если $0 < a < H$ и функция u непрерывно дифференцируема по λ на интервале $[0, 1]$). При этом функция $\chi(k)$ выпукла вверх, так как вторая производная $\chi''(k) < 0$. Из перечисленных свойств характеристической функции следует, что уравнение (17) имеет два вещественных корня k^1 и k^2 вне отрезка $[u_0, u_1]$, причем

$k^1(t, x) < u_0(t, x)$ и $k^2(t, x) > u_1(t, x)$. В случаях, когда решение имеет особенности или u_λ обращается в бесконечность при $\lambda = 0$ ($\lambda = 1$), интеграл в (17) может стать сходящимся при $k = u_0$ (либо при $k = u_1$). Это может привести к исчезновению одного из характеристических корней. Тогда в соответствующем направлении волновые возмущения движутся вместе с потоком. В дальнейшем будем рассматривать гладкие решения уравнений (7), для которых уравнение (17) всегда имеет два вещественных корня k^1, k^2 вне отрезка $[u_0, u_1]$.

Помимо вещественных корней характеристическое уравнение (17) может иметь комплексные корни. Покажем, что если на рассматриваемом решении уравнений (7) имеется комплексный характеристический корень $k = k_0 + ik_1$ ($k_1 \neq 0$), то он принадлежит некоторой подобласти круга $|k - (u_1 + u_0)/2| \leq (u_1 - u_0)/2$, т.е. справедлив аналог теоремы Ховарда о полукруге. Отделяя в (17) вещественную и мнимую части, получаем соотношения

$$1 - \frac{g}{\eta} \int_0^1 \frac{((u - k_0)^2 - k_1^2)H d\lambda}{|u - k|^4} = 0, \quad k_1 \int_0^1 \frac{(u - k_0)H d\lambda}{|u - k|^4} = 0. \quad (22)$$

Введем следующие обозначения: $r = (u_1 - u_0)/2$, $r_0 = (u_1 + u_0)/2$. С использованием тождества

$$(u - r_0)^2 = (u - k_0)^2 + (k_0 - r_0)^2 + 2(k_0 - r_0)(u - k_0),$$

второго уравнения в (22) при $k_1 \neq 0$ и третьего уравнения в (7) первое уравнение в (22) преобразуем к виду

$$\int_0^1 \frac{|u - k|^4 h^{-1} + gk_1^2 - g(u - r_0)^2 + g(k_0 - r_0)^2}{|u - k|^4} H d\lambda = 0.$$

В силу очевидных неравенств $(u - r_0)^2 \leq r^2$, $|u - k|^4 \geq k_1^4$ и условия $H > 0$ имеем

$$(k_1^4 h^{-1} + gk_1^2 + g(k_0 - r_0)^2 - gr^2) \int_0^1 \frac{H d\lambda}{|u - k|^4} \leq 0.$$

Поэтому любой комплексный характеристический корень принадлежит области $(gh)^{-1}k_1^4 + k_1^2 + (k_0 - r_0)^2 \leq r^2$ круга $|k - r_0| \leq r$. Отсюда следует, что если в процессе эволюции течения появляется комплексный характеристический корень k , то он отделяется от отрезка непрерывного характеристического спектра $[u_0, u_1]$ в момент зарождения.

Условия отсутствия комплексных корней характеристического уравнения (17) формулируются в терминах аналитической функции $\chi(z)$, а точнее, ее предельных значений из верхней χ^+ и нижней χ^- комплексных полуплоскостей на отрезке $[u_0, u_1]$:

$$\chi^\pm(u(\lambda)) = 1 + \frac{g}{\eta} \left(\frac{1}{\omega_1(u_1 - u(\lambda))} - \frac{1}{\omega_0(u_0 - u(\lambda))} - \int_0^1 \left(\frac{1}{\omega(\nu)} \right)_\nu \frac{d\nu}{u(\nu) - u(\lambda)} \mp \frac{\pi i}{u_\lambda} \left(\frac{1}{\omega} \right)_\lambda \right). \quad (23)$$

Здесь $\omega = u_\lambda/H$; индексы 0 и 1 соответствуют значениям функций при $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$; i — мнимая единица. При вычислении предельных значений функции $\chi(z)$ использованы формулы Сохоцкого — Племеля [10].

В приведенных ниже леммах формулируются условия отсутствия комплексных характеристических корней и полноты системы собственных функционалов. Доказательства этих лемм опущены, поскольку они совпадают с приведенными в [6].

Лемма 1. Пусть функции $u(t, x, \lambda)$, $H(t, x, \lambda)$ удовлетворяют условиям

$$\chi^\pm \neq 0, \quad \varkappa = \Delta \arg \frac{\chi^+(u)}{\chi^-(u)} = 0 \quad (24)$$

($\Delta \arg \chi^\pm$ — приращение аргумента комплексной функции χ^\pm при изменении λ от нуля до единицы при фиксированных t, x). Тогда характеристическое уравнение (17) имеет только вещественные корни.

Лемма 2. Пусть функции $S_1, S_{1\lambda}, S_2$ удовлетворяют условию Гельдера по переменной λ и для вектор-функции \mathbf{S} с компонентами S_1, S_2 выполнены соотношения $(\mathbf{F}^{1\lambda}, \mathbf{S}) = 0, (\mathbf{F}^{2\lambda}, \mathbf{S}) = 0, (\mathbf{F}^1, \mathbf{S}) = 0, (\mathbf{F}^2, \mathbf{S}) = 0$. При этом функции $u(t, x, \lambda), H(t, x, \lambda)$ удовлетворяют условиям (24). Тогда $\mathbf{S} \equiv 0$.

Леммы 1, 2 и определение обобщенной гиперболичности позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Для течений с монотонным по ширине канала профилем скорости условия (24) являются необходимыми и достаточными для гиперболичности уравнений (7), если функции u, H, ω дифференцируемы, а функции $u_\lambda, \omega_\lambda$ удовлетворяют условию Гельдера по переменной λ .

Результаты анализа характеристических свойств уравнений мелкой воды для сдвиговых потоков с немонотонным профилем скорости по вертикали, полученные в [9], могут быть распространены на рассматриваемую модель (7). Пусть функция $u(t, x, \lambda)$ удовлетворяет условиям (11). Определим комплексную функцию

$$\chi_1(z) = (z - u^*) \left(1 - \frac{g}{\eta} \int_0^1 \frac{H d\lambda}{(u - z)^2} \right),$$

где $u^* = u(t, x, \lambda_*)$; $u_\lambda(t, x, \lambda_*) = 0$; $u_{\lambda\lambda}(t, x, \lambda_*) \neq 0$. Будем предполагать, что на рассматриваемом гладком решении u, H характеристическое уравнение $\chi_1(k) = 0$ имеет два вещественных корня вне отрезка $[u_0, u^*]$. Согласно [9] условия обобщенной гиперболичности модели (7) формулируются следующим образом.

Теорема 2. Для течений с немонотонным по ширине канала профилем скорости из класса (11) условия

$$\chi_1^\pm \neq 0, \quad \varkappa = \Delta \arg \frac{\chi_1^+(u)}{\chi_1^-(u)} = -3\pi$$

являются необходимыми и достаточными для гиперболичности уравнений (7) на гладком решении $u(t, x, \lambda), H(t, x, \lambda)$. Приращение аргумента комплексной функции вычисляется на отрезке $[u_0, u^*]$.

Таким образом, определены условия, при которых уравнения (7) являются обобщенно-гиперболическими, т. е. имеют только вещественный характеристический спектр $k^1, k^2, [u_0, u_1]$, и соотношения на характеристиках (21) эквивалентны исходной системе (7).

3. Изменение типа системы уравнений в процессе эволюции течения. Приведем пример проверки выполнения условий гиперболичности (24). Рассмотрим точное решение уравнений (7)

$$u = (x + C(\lambda))t^{-1}, \quad H = t^{-1}, \quad (25)$$

описывающее процесс растекания жидкости в канале постоянного сечения $\eta = \eta_0 = \text{const}$ под действием давления. Здесь $C(\lambda)$ — произвольная гладкая функция. В эйлеровых переменных решение имеет вид

$$u = \frac{x + C(y - Y_1(x))}{t}, \quad v = \frac{x + C(y - Y_1(x))}{t} Y_1'(x), \quad h = \frac{1}{t}.$$

Боковые стенки канала задаются уравнениями $y = Y_1(x)$ и $y = Y_1(x) + \eta_0$, где $Y_1(x)$ — произвольная дифференцируемая функция.

Покажем, что в процессе эволюции течения на рассматриваемом решении могут появиться комплексные корни характеристического уравнения (17). Пусть функция $C(\lambda)$ задана неявно уравнением

$$C^3 + aC - \lambda + 1/2 = 0,$$

где a — положительная постоянная. Это кубическое уравнение имеет один вещественный и два мнимых корня при каждом $\lambda \in [0, 1]$. Заметим, что $C(\lambda)$ — монотонно возрастающая функция, поскольку $C'(\lambda) = (3C^2 + a)^{-1} > 0$. Кроме того, $C(1/2) = 0$, $C_1 = -C_0$ (C_0, C_1 — значения функции $C(\lambda)$ при $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$). Подставляя решение (25) в выражение (23), получаем

$$\chi^\pm(C) = 1 + 2gt \left(\frac{(3C_1^2 + a)C_1}{C_1^2 - C^2} - 6C_1 - 3C \ln \frac{C_1 - C}{C_1 + C} \right) \mp 6\pi g C t i.$$

В данном случае функции χ^\pm зависят только от t и $C(\lambda)$. При проверке условий гиперболичности удобно использовать функции Ψ^\pm , определяемые формулой

$$\Psi^\pm(C) = (C_1^2 - C^2)\chi^\pm(C)$$

и не имеющие полюсов в граничных точках $C = \pm C_1$.

Будем полагать, что $C_1 = 3/4$, $a = (2C_1)^{-1} - C_1^2 = 5/48$, $g = 1$, $\eta_0 = 1$. Распределение скорости $u(t, x, y)$ по ширине канала в момент времени $t = 1$ в сечении $x = 0$ показано на рис. 2. Графики функции Ψ^+ при изменении C от $-C_1$ до C_1 в моменты времени $t = 0,170$; $0,237$; $0,300$ приведены на рис. 3 (по оси абсцисс откладываются значения $\text{Re } \Psi^+(C)$, по оси ординат — $\text{Im } \Psi^+(C)$). Графики функции Ψ^- аналогичны графикам функции Ψ^+ , но обход осуществляется в противоположном направлении. При $C = \pm C_1$ и $C = 0$ мнимая часть функций Ψ^\pm обращается в нуль, а сами функции в этих точках принимают следующие значения:

$$\Psi^\pm(-C_1) = \Psi^\pm(C_1) = 2gt(3C_1^2 + a)C_1 = 43t/16 > 0 \quad (t > 0),$$

$$\Psi^\pm(0) = C_1^2 + 2g(a - 3C_1^2)C_1 t = (3/4)(3/4 - 19t/6).$$

Легко заметить, что $\Psi^\pm(0) > 0$ при $t \in (0, t_*)$, $t_* = 9/38 \approx 0,237$.

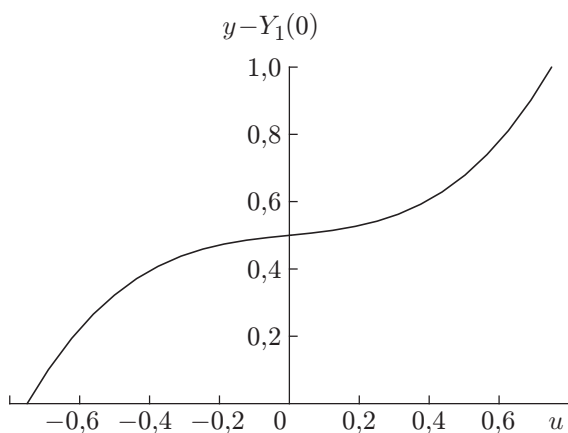


Рис. 2

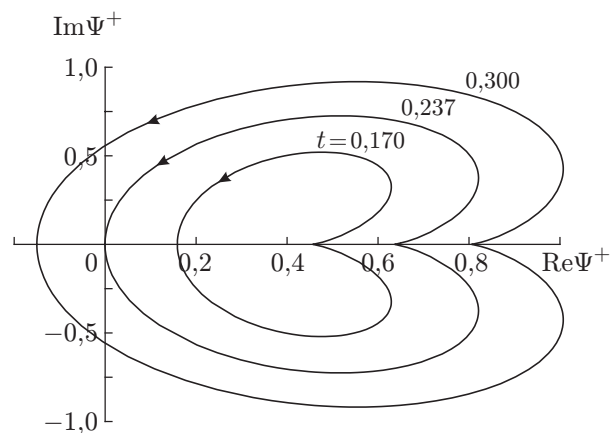


Рис. 3

Рис. 2. Распределение скорости $u(t, x, y)$ по ширине канала при $t = 1$, $x = 0$

Рис. 3. Параметрическое представление вещественной и мнимой частей функции Ψ^+ (стрелки — направление обхода)

Из рис. 3 следует, что при $t = 0,17$ приращение аргумента функций Ψ^\pm равно нулю и условия гиперболичности (24) выполнены. Это справедливо для всех $t \in (0, t_*)$. На рис. 3 кривая, построенная при $t = 0,237$, соответствует нейтральному случаю. При $t > t_*$ аргумент функций Ψ^\pm получает приращение: $\Delta \arg \Psi^+ = 2\pi$, $\Delta \arg \Psi^- = -2\pi$. Таким образом, $\Delta \arg (\Psi^+/\Psi^-) = 4\pi$, что означает наличие комплексного корня $k = k^3$ характеристического уравнения (17), а также сопряженного корня $k = k^4 = \bar{k}^3$.

При анализе уравнения (17) показано, что комплексные характеристические корни в момент зарождения отделяются от непрерывного характеристического спектра $[u_0, u_1]$. В данном случае комплексный корень отделяется от середины этого отрезка, т. е. от точки $u_* = u(t, x, 1/2)$. Приведем результаты вычисления корней в сечении канала $x = 0$. При $t = 0,17$ имеются только вещественные характеристические корни $k^2 = -k^1 \approx 5,41$, лежащие вне отрезка $[u_0, u_1]$ ($u_1 = -u_0 \approx 4,41$). При $t = 0,238 > t_*$ помимо вещественных корней $k^2 = -k^1 \approx 4,0647$ (в этом случае $u_1 = -u_0 \approx 3,15$) имеются комплексные корни $k^3 = -k^4 \approx 0,0046i$. С увеличением времени абсолютные значения комплексных корней возрастают, в частности, при $t = 0,3$ имеем $k^3 = -k^4 \approx 0,168i$.

Таким образом, в процессе эволюции течения тип системы уравнений (7) может изменяться, что соответствует возникновению длинноволновой неустойчивости при некотором распределении скорости u по ширине канала.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Стокер Дж. Дж.** Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
2. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
3. **Овсянников Л. В.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн / Л. В. Овсянников, Н. И. Макаренко, В. И. Налимов и др. Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1985.
4. **Ляпидевский В. Ю.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости / В. Ю. Ляпидевский, В. М. Тешуков. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
5. **Тешуков В. М.** О гиперболичности уравнений длинных волн // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, № 3. С. 555–562.
6. **Тешуков В. М.** Длинные волны в завихренной баротропной жидкости // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 17–26.
7. **Benney D. J.** Some properties of long nonlinear waves // Stud. Appl. Math. 1973. V. 52. P. 45–50.
8. **Захаров В. Е.** Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи // Функцион. анализ и его прил. 1980. Т. 14, вып. 2. С. 15–24.
9. **Тешуков В. М., Стерхова М. М.** Характеристические свойства системы уравнений сдвигового течения с немонотонным профилем скорости // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 3. С. 53–59.
10. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию 5/XI 2008 г.