УДК 532.59:539.3

ДВИЖЕНИЕ СФЕРЫ В ЖИДКОСТИ ПОД ЛЕДЯНЫМ ПОКРОВОМ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ СЖАТИИ

Л. А. Ткачева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: tkacheva@hydro.nsc.ru

С использованием метода мультипольных разложений в рамках линейной потенциальной теории волн построено решение задачи о движении сферы в идеальной несжимаемой жидкости бесконечной глубины под ледяным покровом при неравномерном сжатии. Исследованы гидродинамические нагрузки, действующие на тело: волновое сопротивление, боковая и подъемная силы, а также прогиб ледяного покрова в зависимости от его толщины, скорости тела, глубины погружения и направления движения.

Ключевые слова: тонкая упругая плавающая пластина, изгибно-гравитационные волны, диполь, мультиполь, волновые силы.

DOI: 10.15372/PMTF20220202

Изучение волновых процессов в море с плавающим ледяным покровом представляет не только теоретический, но и прикладной интерес при оценке влияния льда на стационарные и движущиеся объекты, в том числе подводные. Возбуждение волн колебаниями погруженной в жидкость сферы под ледяным покровом изучалось в работах [1–3], в которых получены зависимости коэффициентов присоединенных масс и демпфирования от волнового числа, глубины погружения, жесткости ледяного покрова. Рассеяние набегающих волн погруженной сферой под ледяным покровом исследовалось в [4, 5]. В работах [6, 7] исследованы гидродинамические силы на погруженной сфере под ледяным покровом при наличии напряжений сжатия при ее прямолинейном и колебательном движении. Во всех указанных работах для построения решения использовалось мультипольное разложение потенциала скорости течения жидкости по сферическим функциям. Ранее такое разложение использовалось в [8] при изучении движения сферы под свободной поверхностью жидкости.

В работах [9, 10] изучено движение в жидкости под ледяным покровом диполя, моделирующего движение тела. Проведено экспериментальное и теоретическое исследование движения тонкого тела [11] и подводной лодки [12] в жидкости под ледяным покровом, тело моделировалось с помощью системы источников и стоков. Возможность разрушения ледяного покрова подводным судном при движении с критической скоростью изучалась в [13] численно и экспериментально. В [14] исследовано поведение ледяного покрова в канале при движении подводного тела.

В настоящей работе с использованием мультипольного разложения построено решение задачи о прямолинейном движении сферы в жидкости под ледяным покровом в случае неравномерного сжатия. Приведено также решение этой задачи для тела, моделируемого диполем при его стационарном и нестационарном движении. Проведено сравнение результатов. Ранее влияние неравномерного сжатия ледяной пластины на структуру изгибно-гравитационных волн и критические скорости изучалось в [15, 16]. Влияние неравномерного сжатия на прогиб и деформации ледяного покрова, а также на волновое сопротивление и боковую силу при движении области давления по ледяному покрову исследовано в [17].

1. Постановка задачи. Ледяной покров моделируется с помощью упругой бесконечной пластины, имеющей постоянную толщину h_1 и находящейся в состоянии неравномерного сжатия. Жидкость полагается идеальной несжимаемой, бесконечной глубины, а ее течение — потенциальным. Рассматривается установившееся движение жидкости и пластины при прямолинейном горизонтальном движении погруженной сферы радиусом a с постоянной скоростью U. Задача решается в линейном приближении.

Введем связанную со сферой подвижную декартову систему координат $Oxyz$ с центром O на верхней границе жидкости, направление оси Ox совпадает с направлением движения, ось Oz направлена вертикально вверх. Центр сферы расположен в точке $(0, 0, -h)$, где $h > 0$ — глубина погружения сферы. Введем сферические координаты (r, θ, ψ), связанные с декартовыми координатами соотношениями

$$x = r\sin\theta\cos\psi, \quad y = r\sin\theta\sin\psi, \quad z = -h + r\cos\theta, \qquad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \psi < 2\pi.$$

Потенциал скорости течения жидкости представим в виде

$$\Phi(x, y, z) = U[\phi(x, y, z) - x].$$

Уравнение для малых вертикальных прогибов пластины w имеет вид

$$D\Delta_2^2 w + Q_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Q_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2Q_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} + \rho_1 h_1 U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho g w - \rho U \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0,$$

$$D = \frac{Eh_1^3}{12(1-\nu^2)}, \qquad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

где Q_1, Q_2, Q_3 — продольные, поперечные и сдвиговые усилия в пластине (сжатие при положительных значениях и растяжение при отрицательных); ρ, ρ_1 — плотности воды и льда; g — ускорение свободного падения; D — цилиндрическая жесткость пластины; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона. Кинематическое условие на верхней границе жидкости записывается в виде

$$-U \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \qquad (z = 0).$$

Используя безразмерные переменные, параметры и функции

$$(x', y', z', r', h') = (x, y, z, r, h)/a; \tag{1.1}$$

$$\beta = \frac{D}{\rho g a^4}, \qquad q_i = \frac{Q_i}{\rho g a^2}, \qquad \delta = \frac{\rho_1 h_1}{\rho a}, \qquad F = \frac{U}{\sqrt{ag}}; \tag{1.2}$$

$$\phi = a\phi', \qquad w = aw'$$

(далее штрихи опускаются), получаем краевую задачу

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \qquad (z < 0); \tag{1.3}$$

$$\Big(\beta\Delta_2^2 + q_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + q_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2q_3 \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} + 1 + \delta F^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big) w - F^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \qquad (z = 0); \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad (z = 0); \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = n_x \qquad (r = 1), \tag{1.6}$$

где n — внутренняя нормаль к телу; n_x — ее компонента по оси Ox.

На бесконечности при $r \to \infty$ возмущенное движение затухает ($\nabla\phi \to 0$). Ставится условие излучения, согласно которому перед телом распространяются только те волны, групповая скорость которых больше скорости тела.

2. Решение задачи. Для построения решения будем использовать метод мультипольного разложения [6–8]. Потенциал скорости течения жидкости представим в виде

$$\phi(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\sum_{m=0}^{n} A_n^m \Big(\frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} P_n^m(\cos\theta)\cos(m\psi) + F_n^m \Big) + \\ + \sum_{m=1}^{n} B_n^m \Big(\frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} P_n^m(\cos\theta)\sin(m\psi) + G_n^m \Big) \Big]. \tag{2.1}$$

Здесь первые слагаемые в больших круглых скобках представляют собой трехмерный мультиполь, сферическую функцию, удовлетворяющую уравнению Лапласа в безграничном трехмерном пространстве; функции F_n^m, G_n^m введены для удовлетворения граничных условий при $z = 0$, $z \to -\infty$ и также должны удовлетворять уравнению Лапласа. Члены при $n = 0$ отсутствуют, так как представляют собой источник.

При $z > -h$ справедливо представление

$$\frac{P_n^m(\cos\theta)}{r^{n+1}} \cos(m\psi) = \frac{(-1)^m}{(n-m)!} \int\limits_0^\infty k^n \,\mathrm{e}^{-kr\cos\theta} J_m(kr\sin\theta)\cos(m\psi)\,dk = \\ = \frac{i^m}{2\pi(n-m)!} \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\pi}^{\pi} k^n \cos m\gamma \,\mathrm{e}^{-k(z+h)}\,\mathrm{e}^{ik(x\cos\gamma + y\sin\gamma)}\,d\gamma\,dk,$$

где J_m — функция Бесселя первого рода. Из граничных условий (1.4), (1.5) находим

$$F_n^m = \frac{a^{n+1} i^m}{2\pi(n-m)!} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_0^\infty A(k,\gamma) k^n \cos m\gamma \,\mathrm{e}^{kz}\,\mathrm{e}^{ik(x\cos\gamma + y\sin\gamma)}\,dk\,d\gamma; \tag{2.2}$$

$$G_n^m = \frac{a^{n+1} i^m}{2\pi(n-m)!} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_0^\infty A(k,\gamma) k^n \sin m\gamma \,\mathrm{e}^{kz}\,\mathrm{e}^{ik(x\cos\gamma + y\sin\gamma)}\,dk\,d\gamma; \tag{2.3}$$

$$A(k,\gamma) = \mathrm{e}^{-kh}\, T(k,\gamma)/Z(k,\gamma), \qquad T(k,\gamma) = Z(k,\gamma) + 2F^2 k\cos^2\gamma, \\ Z(k,\gamma) = \beta k^4 - q(\gamma)k^2 + 1 - F^2 k \cos^2\gamma(1 + \delta k), \\ q(\gamma) = q_1\cos^2\gamma + q_2\sin^2\gamma + 2q_3\cos\gamma\sin\gamma. \tag{2.4}$$

В случае если скорость тела больше критической скорости U_*, равной минимальной фазовой скорости изгибно-гравитационных волн, функция $Z(k,\gamma)$ может иметь один или два вещественных положительных корня при $F|\cos\gamma| > F_*$, где $F_* = U_*/\sqrt{ag}$ — число Фруда, соответствующее критической скорости. При $F|\cos\gamma| > F_*$ интеграл по k является интегралом в смысле главного значения.

Критическое значение числа Фруда определяется формулами [15, 16]

$$F_* = \Psi(k_*), \qquad \frac{d\Psi}{dk}(k_*) = 0,$$
$$\Psi(k) = \sqrt{\frac{1}{k(1+\delta k)}\Big(\beta k^4 - q_1 k^2 + 1 - \frac{(q_3 k^2)^2}{\beta k^4 - q_2 k^2 + 1}\Big)}. \tag{2.5}$$

При неравномерном сжатии критическая скорость зависит от направления движения. При повороте системы координат на некоторый угол α продольные, поперечные и сдвиговые усилия в пластине принимают значения

$$\begin{aligned} q_{1\alpha} &= q_1 \cos^2\alpha + q_2 \sin^2\alpha + q_3 \sin 2\alpha, \\ q_{2\alpha} &= q_1 \sin^2\alpha + q_2 \cos^2\alpha - q_3 \sin 2\alpha, \\ q_{3\alpha} &= (q_2 - q_1)\sin 2\alpha/2 + q_3 \cos 2\alpha. \end{aligned} \tag{2.6}$$

При изменении направления движения критическая скорость изгибно-гравитационных волн в случае неравномерного сжатия может измениться в несколько раз.

При неравномерном сжатии возможна ситуация, когда при некоторых значениях угла γ $F|\cos\gamma| > F_*$ и существует два вещественных положительных корня $k_1(\gamma)$, $k_2(\gamma)$, а при других значениях $F|\cos\gamma| < F_*$ и вещественные корни отсутствуют. В таких случаях существуют разделяющие эти области углы γ_i, такие что имеется один кратный вещественный корень $k_i^*(\gamma_i)$ уравнений

$$Z(k_i^*, \gamma_i) = 0, \qquad \frac{\partial Z}{\partial k}(k_i^*, \gamma_i) = 0.$$

При $\gamma = \gamma_i$ корни k_1, k_2 совпадают, но при $F > F_*$ $\partial Z/\partial\gamma(k_i^*, \gamma_i) \neq 0$, а при $F = F_*$ $\partial Z/\partial\gamma(k_i^*, \gamma_i) = 0$. Поэтому при движении тела с критической скоростью решения линейной задачи не существует. В этом случае для получения ограниченного решения необходимо использовать нелинейные модели или учитывать структурное демпфирование.

Для выполнения условия (1.6) на сфере выражения для функций F_n^m, G_n^m представим в виде разложения по сферическим функциям. Для этого используем формулу [18]

$$\mathrm{e}^{kr(\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi)} = \sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m'=0}^{n'} \varepsilon_{m'}(-i)^{m'} \frac{(kr)^{n'}}{(n'+m')!} P_{n'}^{m'}(\cos\theta)\cos m'\psi,$$

где $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_m = 2$ при $m > 0$. Тогда

$$F_n^m = -\frac{a^{n+1}}{2\pi(n-m)!}\sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m'=0}^{n'} \varepsilon_{m'}\frac{r^{n'}}{(n'+m')!} P_{n'}^{m'}(\cos\theta)\times$$
$$\times[\cos m'\psi\; I(m,n,m',n') + \sin m'\psi\; J(m,n,m',n')],$$

$$G_n^m = -\frac{a^{n+1}}{2\pi(n-m)!}\sum_{n'=0}^{\infty}\sum_{m'=0}^{n'} \varepsilon_{m'}\frac{r^{n'}}{(n'+m')!} P_{n'}^{m'}(\cos\theta)\times$$
$$\times[\cos m'\psi\; J(m',n',m,n) + \sin m'\psi\; S(m,n,m',n')].$$

При четных значениях $m - m'$ имеем

$$I(m,n,m',n') = -2(-1)^{(m-m')/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{vp}\int_0^{\infty} A(k,\gamma)k^{n+n'}\,\mathrm{e}^{-kh}\cos m\gamma\cos m'\gamma\; d\gamma\, dk,$$

$$J(m,n,m',n') = -2(-1)^{(m-m')/2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{vp} \int\limits_0^\infty A(k,\gamma) k^{n+n'} \mathrm{e}^{-kh} \cos m\gamma \sin m'\gamma \, d\gamma \, dk,$$

$$S(m,n,m',n') = -2(-1)^{(m-m')/2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{vp} \int\limits_0^\infty A(k,\gamma) k^{n+n'} \mathrm{e}^{-kh} \sin m\gamma \sin m'\gamma \, d\gamma \, dk,$$

при нечетных значениях $m - m'$ имеем

$$I(m,n,m',n') = (-1)^{(m-m'-1)/2} 2\pi \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} \cos m\gamma \cos m'\gamma \sum_{j=1}^{2} (-1)^j k_j^{n+n'} \, \mathrm{e}^{-2k_j h} \, \frac{T(k_j,\gamma)}{Z'(k_j,\gamma)} \, d\gamma,$$

$$J(m,n,m',n') = (-1)^{(m-m'-1)/2} 2\pi \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} \cos m\gamma \sin m'\gamma \sum_{j=1}^{2} (-1)^j k_j^{n+n'} \, \mathrm{e}^{-2k_j h} \, \frac{T(k_j,\gamma)}{Z'(k_j,\gamma)} \, d\gamma,$$

$$S(m,n,m',n') = (-1)^{(m-m'-1)/2} 2\pi \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} \sin m\gamma \sin m'\gamma \sum_{j=1}^{2} (-1)^j k_j^{n+n'} \, \mathrm{e}^{-2k_j h} \, \frac{T(k_j,\gamma)}{Z'(k_j,\gamma)} \, d\gamma$$

(vp — интеграл в смысле главного значения; (γ_1, γ_2) — область углов γ, при которых $F|\cos\gamma| > F_*$).

Из граничного условия (1.6), используя условие ортогональности сферических функций, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{n+1}{a} A_n^m + \frac{n\varepsilon_m}{2\pi} \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=0}^{n'} \frac{a^{n+n'}}{(n+m)!(n'-m')!} \times \\
\times [I(m',n',m,n) A_{n'}^{m'} + J(m',n',m,n) B_{n'}^{m'}] = \delta_{n1}\delta_{m1}, \\
\frac{n+1}{a} B_n^m + \frac{n\varepsilon_m}{2\pi} \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=0}^{n'} \frac{a^{n+n'}}{(n+m)!(n'-m')!} \times \\
\times [J(m,n,m',n') A_{n'}^{m'} + S(m',n',m,n) B_{n'}^{m'}] = 0,
\end{gathered} \tag{2.7}$$

где $B_n^m = 0$ при $m = 0$.

Система (2.7) решается методом редукции, при этом оставляется конечное число членов. После определения коэффициентов A_n^m, B_n^m находим действующие на тело гидродинамические силы и величину прогиба ледяного покрова. Используя уравнения системы (2.7), потенциал скорости течения жидкости на сфере можно представить в виде

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{2n+1}{n} P_n^m(\cos\theta)(A_n^m \cos m\psi + B_n^m \sin m\psi) + x. \tag{2.8}$$

Гидродинамические силы, действующие на сферу, находим с помощью интеграла Бернулли путем интегрирования по поверхности сферы. В размерных переменных формула для сил принимает вид

$$F_j = -\frac{1}{2} \rho U^2 \int\limits_S \nabla(\phi - x) \nabla(\phi - x) n_j \, dS. \tag{2.9}$$

В случае сферы моменты сил в идеальной жидкости равны нулю.

Градиент в сферической системе координат имеет вид

$$\nabla = \boldsymbol{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{i}_\psi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \psi}.$$

Производная по радиусу на сфере известна из условия (1.6). Остальные производные в (2.9) при $r = 1$ можно вычислить из выражения (2.8). Безразмерные коэффициенты сил: волновое сопротивление, боковая сила и подъемная сила

$$R = -\frac{F_1}{\pi \rho g a^3}, \qquad S = \frac{F_2}{\pi \rho g a^3}, \qquad L = \frac{F_3}{\pi \rho g a^3} \text{ —}$$

определяются формулами

$$R = 2F^2 \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{\varepsilon_m} \frac{n+2}{n+1} \frac{(n+m+2)!}{(n-m)!} (A_n^m A_{n+1}^{m+1} + B_n^m B_{n+1}^{m+1}) -$$

$$- \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-2} \frac{1}{\varepsilon_m} \frac{n+1}{n} \frac{(n+m)!}{(n-m-2)!} (A_n^m A_{n-1}^{m+1} + B_n^m B_{n-1}^{m+1}) \Big),$$

$$S = F^2 \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{\varepsilon_m} \frac{n+2}{n+1} \frac{(n+m+2)!}{(n-m)!} A_n^m B_{n+1}^{m+1} +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-2} \frac{1}{\varepsilon_m} \frac{n+1}{n} \frac{(n+m)!}{(n-m-2)!} A_n^m B_{n-1}^{m+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \frac{n+2}{n+1} \frac{(n+m+2)!}{(n-m)!} B_n^m A_{n+1}^{m+1} -$$

$$- \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-2} \frac{n+1}{n} \frac{(n+m)!}{(n-m-2)!} B_n^m A_{n-1}^{m+1} \Big),$$

$$L = 4F^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{\varepsilon_m} \frac{n+2}{n+1} \frac{(n+m+1)!}{(n-m)!} (A_n^m A_{n+1}^{m+1} + B_n^m B_{n+1}^{m+1}),$$

где $B_n^m = 0$ при $m = 0$.

Из уравнений (1.5), (2.1)–(2.3) находим прогиб пластины

$$w(x,y) = \frac{2F^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{a^{n+1}}{(n-m)!} (A_n^m W_n^m(x,y) + B_n^m V_n^m(x,y)).$$

При четных m имеем

$$\left\{ \begin{array}{c} W_n^m(x,y) \\ V_n^m(x,y) \end{array} \right\} = -(-1)^{m/2} \Big[\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\gamma \left\{ \begin{array}{c} \cos m\gamma \\ \sin m\gamma \end{array} \right\} \times$$

$$\times \text{vp} \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin k(x\cos\gamma + y\sin\gamma)}{Z(k,\gamma)} k^{n+1} \mathrm{e}^{-kh} \, dk \, d\gamma +$$

$$+ \pi \sum_{j=1}^{2} (-1)^j k_j^{n+1} \mathrm{e}^{-k_j h} \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} \left\{ \begin{array}{c} \cos m\gamma \\ \sin m\gamma \end{array} \right\} \frac{\cos\gamma \cos k_j(x\cos\gamma + y\sin\gamma)}{Z'(k,j)} \, d\gamma \Big],$$

при нечетных m —

$$\left\{\begin{array}{c} W_n^m(x,y) \\ V_n^m(x,y) \end{array}\right\} = (-1)^{(m+1)/2}\Big[\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\gamma \left\{\begin{array}{c} \cos m\gamma \\ \sin m\gamma \end{array}\right\} \times$$

$$\times \operatorname{vp}\int\limits_0^\infty \frac{\cos k(x\cos\gamma + y\sin\gamma)}{Z(k,\gamma)}\, k^{n+1}\,\mathrm{e}^{-kh}\,dk\,d\gamma -$$

$$-\pi\sum_{j=1}^2 (-1)^j k_j^{n+1}\mathrm{e}^{-k_jh}\int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2}\left\{\begin{array}{c} \cos m\gamma \\ \sin m\gamma \end{array}\right\}\frac{\cos\gamma\sin k_j(x\cos\gamma + y\sin\gamma)}{Z'(k,j)}\,d\gamma\Big].$$

Здесь (γ_1, γ_2) — область значений углов, при которых функция $Z(k,\gamma)$ имеет корни. При докритической скорости движения сферы $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

3. Моделирование движущегося тела диполем. Рассматривается начально-краевая задача о движении диполя, который в момент времени $t = 0$ начинает действовать и двигаться с постоянной скоростью U. Интенсивность диполя μ равна [19]

$$\mu = 2\pi a^3 U.$$

Представим потенциал скорости течения жидкости в неподвижной системе координат в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1,$$

$$\varphi_0 = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{\sqrt{(x-Ut)^2 + y^2 + (z+h)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-Ut)^2 + y^2 + (z-h)^2}}\Big),$$

где φ_0 — потенциал исходного диполя и диполя, отраженного от верхней границы в бесконечном объеме жидкости [19]; φ_1 — дополнительный потенциал.

Используя формулы (1.1), (1.2), перейдем к безразмерным переменным

$$\varphi = a\sqrt{ag}\,\varphi', \qquad w = aw', \qquad t' = t\sqrt{g/a}, \qquad \mu' = F$$

(далее штрихи опускаются). Потенциал φ_1 удовлетворяет уравнению Лапласа (1.3), а условия на верхней границе жидкости записываются в виде

$$\Big(\beta\Delta_2^2 + q_1\frac{\partial^2}{\partial x^2} + q_2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2q_3\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + 1 + \delta\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big)w + \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = -\frac{\partial\varphi_0}{\partial t} \qquad (z = 0); \qquad (3.1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \qquad (z = 0). \qquad (3.2)$$

В начальный момент времени задаются условия покоя

$$w(x,y,0) = w_t(x,y,0) = 0, \qquad \varphi(x,y,z,0) = 0.$$

Применяя преобразование Фурье по переменным x, y:

$$W(k_1,k_2,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-i(k_1x+k_2y)}\,w(x,y,t)\,dx\,dy,$$

$$\Phi_i(k_1,k_2,z,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-i(k_1x+k_2y)}\,\varphi_i(x,y,z,t)\,dx\,dy, \qquad i = 0, 1,$$

получаем

$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2} - k^2\Phi_1 = 0, \quad k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \qquad \Phi_1 = A(k_1, k_2, t)\mathrm{e}^{kz}.$$

Из условия (3.2) находим

$$W_t = kA, \qquad \Phi_1 = \frac{W_t\,\mathrm{e}^{kz}}{k}, \qquad \frac{\partial\Phi_1}{\partial t}\Big|_{z=0} = \frac{W_{tt}}{k}.$$

Уравнение (3.1) преобразуем следующим образом:

$$W_{tt} + \omega^2(k,\gamma)W = -\frac{k}{1+\delta k}\,\frac{\partial\Phi_0}{\partial t}\Big|_{z=0}, \qquad \omega(k,\gamma) = \sqrt{\frac{k(\beta k^4 - q(\gamma)k^2 + 1)}{1+\delta k}} \tag{3.3}$$

($q(\gamma)$ определяется формулой (2.4)).

Потенциал Φ_0 принимает вид

$$\Phi_0(k_1, k_2, 0, t) = \frac{ik_1F}{k}\,\mathrm{e}^{-kh}\,\mathrm{e}^{-ik_1Ft}.$$

Решение уравнения (3.3) запишем в виде

$$W(k_1, k_2, t) = -\frac{ik_1F\,\mathrm{e}^{-kh}}{1+\delta k}\int\limits_0^t \cos\omega(t-\tau)\,\mathrm{e}^{-ik_1F\tau}\,d\tau =$$

$$= \frac{k_1F\,\mathrm{e}^{-kh}}{2(1+\delta k)}\,\mathrm{e}^{-ik_1Ft}\Big(\frac{1-\mathrm{e}^{i(k_1F-\omega)t}}{k_1F-\omega} + \frac{1-\mathrm{e}^{i(k_1F+\omega)t}}{k_1F+\omega}\Big).$$

Применяя обратное преобразование Фурье, находим

$$w(x,y,t) = \frac{F}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{k_1\,\mathrm{e}^{-kh}\,\mathrm{e}^{i(k_1(x-Ft)+k_2y)}}{1+\delta k}\Big(\frac{1-\mathrm{e}^{i(k_1F-\omega)t}}{k_1F-\omega} + \frac{1-\mathrm{e}^{i(k_1F+\omega)t}}{k_1F+\omega}\Big)\,dk_1\,dk_2.$$

В системе координат, движущейся вместе с диполем, вводя переменную $x' = x - Ft$, получаем

$$w(x',y,t) = \frac{F}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{k_1\,\mathrm{e}^{-kh}\,\mathrm{e}^{i(k_1x'+k_2y)}}{1+\delta k}\Big(\frac{1-\mathrm{e}^{i(k_1F-\omega)t}}{k_1F-\omega} + \frac{1-\mathrm{e}^{i(k_1F+\omega)t}}{k_1F+\omega}\Big)\,dk_1\,dk_2.$$

Переходя к пределу при $t \to \infty$, после преобразований находим установившееся решение

$$w(x',y) = -\frac{F^2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{k^2\,\mathrm{e}^{-kh}\cos^2\gamma\cos\big(k(x'\cos\gamma + y\sin\gamma)\big)\,d\gamma\,dk}{\beta k^4 - q(\gamma)k^2 + 1 - kF^2\cos^2\gamma\,(1+\delta k)}.$$

Функция $\omega(k,\gamma)$ в (3.3) представляет собой дисперсионное соотношение для изгибно-гравитационных волн. Для того чтобы значения частоты были вещественными, при всех значениях угла γ должно выполняться условие $q(\gamma) < 2\sqrt{\beta}$, обеспечивающее устойчивость ледяной пластины [20].

4. Результаты численных расчетов. Численные расчеты для ледяного покрова и погруженной сферы проводились при следующих значениях входных параметров: $E = 5$ ГПа, $\rho = 1025$ кг/м^3, $\rho_1 = 922{,}5$ кг/м^3, $\nu = 0{,}3$, $a = 5$ м. Толщина льда равна $h_1 = 1$; 2 м, глубина погружения тела $h = 7{,}5$; 10,0 м, т. е. в безразмерных переменных

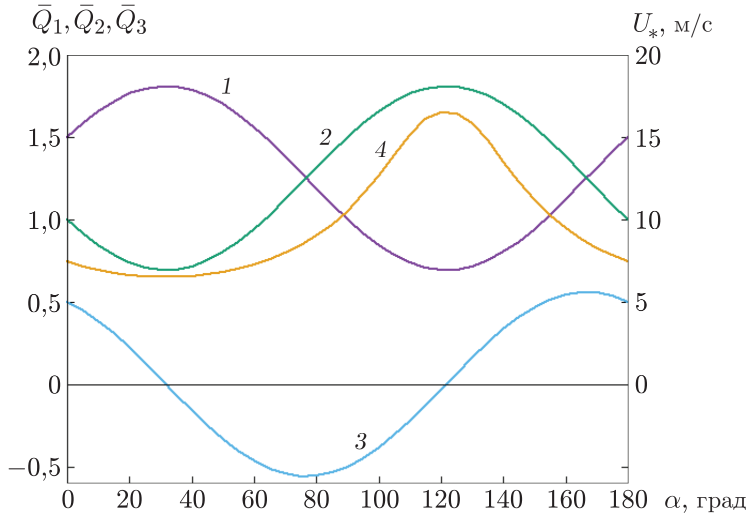

Рис. 1. Зависимости коэффициентов сжатия $\bar{Q}_1$ (*1*), $\bar{Q}_2$ (*2*), $\bar{Q}_3$ (*3*) и критических скоростей U_* (*4*) от угла направления движения при $h_1 = 2$ м, $h = 10$ м

$h' = 1{,}5$; 2,0. Сжимающие усилия в пластине заданы в виде $Q_i = \bar{Q}_i\sqrt{\rho g D}$, $\bar{Q}_1 = 1{,}5$, $\bar{Q}_2 = 1$, $\bar{Q}_3 = 0{,}5$. Менялись скорость движения сферы U и угол направления движения α. В расчетах для сферы число мультиполей в разложении принято равным $N = 5$, при этом порядок системы (2.7) равен 35. При дальнейшем увеличении числа N получаем результаты, графически совпадающие с приведенными.

На рис. 1 приведены зависимости вычисляемых по формулам (2.5), (2.6) безразмерных коэффициентов сжатия и критической скорости изгибно-гравитационных волн от угла направления движения α. Видно, что экстремальные значения критической скорости достигаются при $\bar{Q}_3 = 0$. Максимальное и минимальное значения критической скорости различаются приблизительно в 2,5 раза.

На рис. 2 представлены изолинии прогиба ледяного покрова при нестационарном движении диполя в моменты времени $t\sqrt{g/a} = 5$, 50, 100, а также для установившегося движения сферы при $\alpha = 0°$, скорости $U = 10$ м/с (сверхкритической), толщине льда $h_1 = 2$ м, глубине погружения $h = 2a$. Видно, что картины изолиний для установившегося движения сферы и диполя при $t\sqrt{g/a} = 100$ практически совпадают. При уменьшении глубины погружения до значения $h = 1{,}5a$ также наблюдается практически полное совпадение изолиний. Таким образом, использование диполя позволяет достаточно точно моделировать воздействие движущейся сферы на ледяной покров. На рис. 2 видно, что изгибно-гравитационные волны распространяются как за сферой, так и перед ней. Наличие сдвиговых напряжений в ледяной пластине приводит к нарушению симметрии прогиба.

На рис. 3 показаны изолинии прогиба ледяного покрова при движении сферы под углом $\alpha = 120°$ со скоростью $U = 10$ м/с. В этом случае скорость является докритической. Картина волнового поля приведена в системе координат, в которой согласно (2.6) параметры коэффициентов сжатия равны $\bar{Q}_1 = 0{,}69$, $\bar{Q}_2 = 1{,}81$, $\bar{Q}_3 = 0{,}03$. Величина прогиба льда максимальна вблизи сферы и быстро затухает, волновые движения в дальнем поле не возникают.

Исследовались также волновые силы, действующие на сферу. В работе [17], в которой изучалось движение нагрузки по ледяному покрову с неравномерным сжатием, установлено, что силы сжатия и направление движения оказывают значительное влияние на вол-

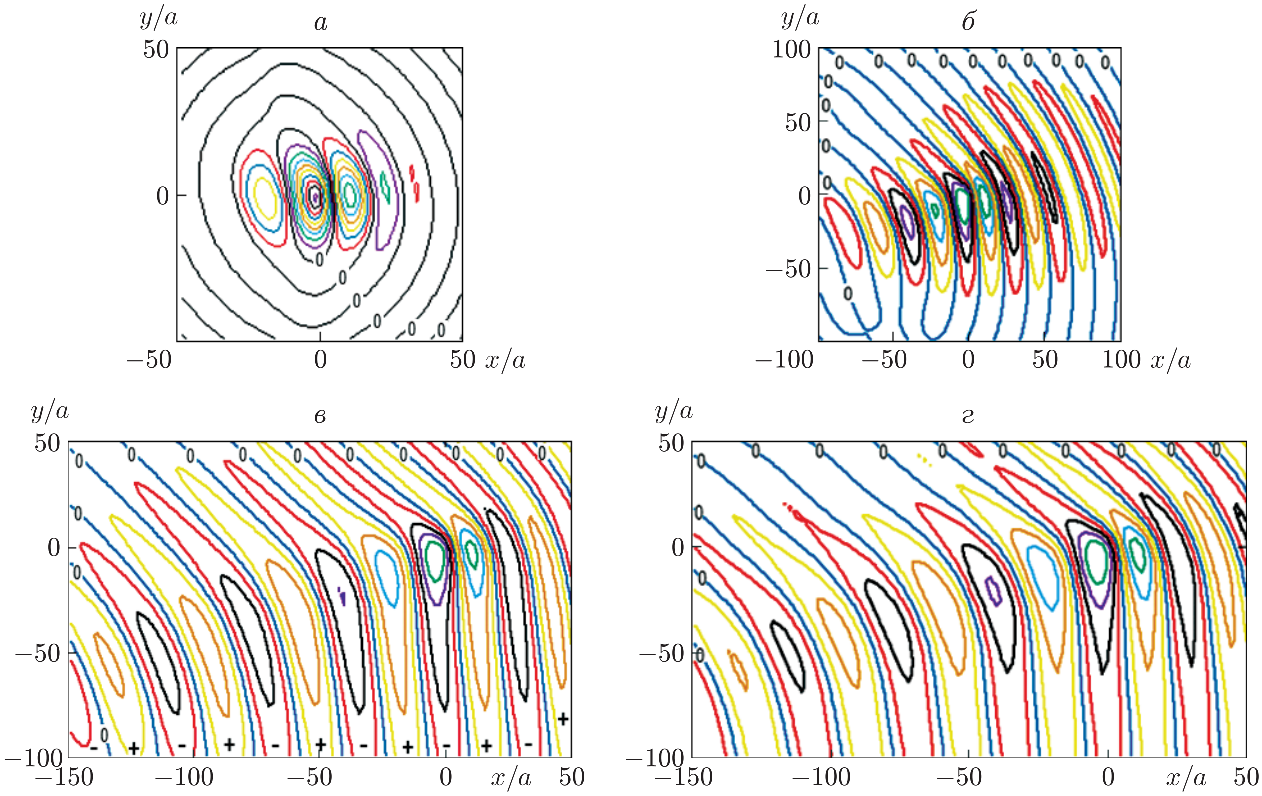

Рис. 2. Изолинии прогиба ледяного покрова w/a при $h_1 = 2$ м, $h = 10$ м, $\alpha = 0°$: *а*–*в* — нестационарное движение диполя в различные моменты времени (*а* — $t\sqrt{g/a} = 5$, *б* — $t\sqrt{g/a} = 50$, *в* — $t\sqrt{g/a} = 100$), *г* — установившееся движение сферы; *а* — с шагом 0,001 в диапазоне $-0{,}009 \div 0{,}006$, *б*–*г* — с шагом 0,003 в диапазоне $-0{,}012 \div 0{,}012$; 0 — линии нулевого уровня

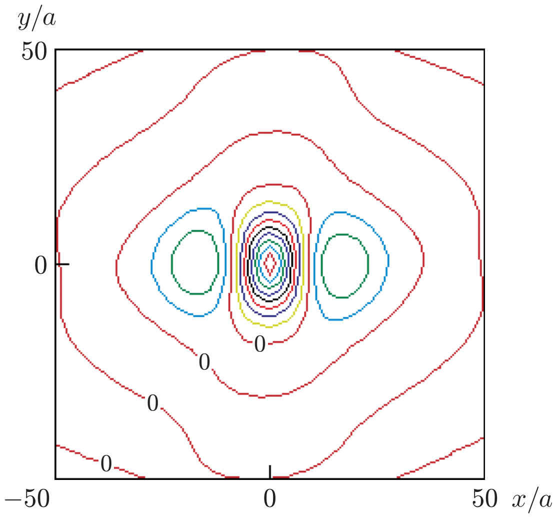

Рис. 3. Изолинии прогиба ледяного покрова w/a при $h_1 = 2$ м, $h = 10$ м, $\alpha = 120°$ и установившемся движении сферы с шагом 0,001 в диапазоне $-0{,}008 \div 0{,}002$; 0 — линии нулевого уровня

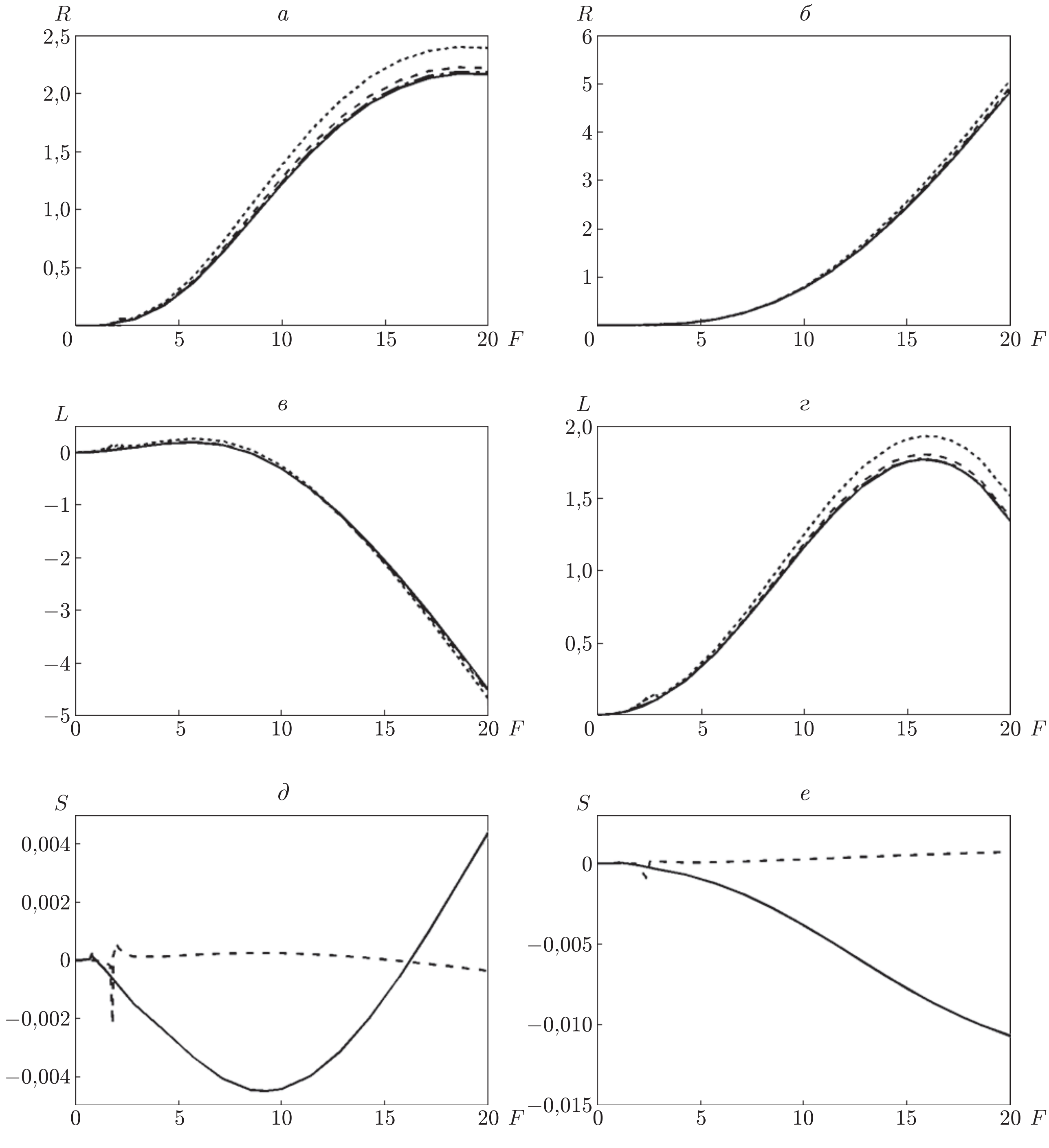

Рис. 4. Зависимости безразмерных волновых сил R (*а*, *б*), L (*в*, *г*), S (*д*, *е*) от числа Фруда F для ледяного покрова толщиной $h_1 = 1$ м (*а*, *в*, *д*) и $h_1 = 2$ м (*б*, *г*, *е*): сплошные линии — $\alpha = 0°$ ($\bar{Q}_j$ см. на рис. 1), штриховые — $\alpha = 120°$ ($\bar{Q}_j$ см. на рис. 1), пунктирные — в отсутствие сил сжатия ($\bar{Q}_j = 0$), штрихпунктирные — при среднем равномерном сжатии ($\bar{Q}_1 = \bar{Q}_2 = 1{,}25$, $\bar{Q}_3 = 0$)

новое сопротивление и боковую силу, значение боковой силы имеет тот же порядок, что и волновое сопротивление. На рис. 4 представлены зависимости безразмерных волновых сил от числа Фруда F при движении сферы под ледяным покровом толщиной $h_1 = 1$, 2 м при $\alpha = 0$, 120°, а также при отсутствии сжатия ($\bar{Q}_i = 0$) и равномерном среднем сжатии ($\bar{Q}_1 = \bar{Q}_2 = 1{,}25$, $\bar{Q}_3 = 0$), глубине погружения $h = 2a$. Видно, что изменение направления движения практически не оказывает влияния на волновое сопротивление и подъемную силу, учет равномерного осредненного сжатия дает близкие результаты. Боковые силы малы.

При уменьшении глубины погружения сферы до $h = 1{,}5a$ при $h_1 = 2$ м, $\alpha = 0°$ значения волновых сил увеличились в несколько раз: волновое сопротивление — приблизительно в два раза, подъемная сила — приблизительно в шесть раз. При этом максимальный прогиб ледяного покрова увеличился незначительно, так как дополнительная энергия взаимодействия распространяется по большой площади поверхности пластины.

Заключение. Построено решение задачи о прямолинейном равномерном движении сферы в жидкости под ледяным покровом с неравномерным сжатием, а также о нестационарном и установившемся движении диполя, моделирующего сферу. Исследованы зависимости амплитуд прогиба ледяного покрова, гидродинамических сил, действующих на тело, от скорости, направления движения, глубины погружения. Показано, что использование диполя позволяет моделировать влияние движущейся сферы на прогиб ледяного покрова при глубинах погружения порядка 1,5 радиуса. Волновое сопротивление и подъемная сила, действующие на сферу, практически не зависят от направления движения, при учете сил осредненного равномерного сжатия получены близкие результаты. Подъемная сила при различных значениях числа Фруда может иметь разные знаки.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Das D., Mandal B. N.** Water wave radiation by a sphere submerged in water with an ice-cover // Arch. Appl. Mech. 2008. V. 78. P. 649–661.
2. **Das D., Mandal B. N.** Wave radiation by a sphere submerged in a two-layer ocean with an ice-cover // Appl. Ocean Res. 2010. V. 32. P. 358–366.
3. **Mohapatra S., Bora S. N.** Radiation of water waves by a sphere in an ice-covered two-layer fluid of finite depth // J. Adv. Res. Appl. Math. 2010. V. 2, N 1. P. 46–63.
4. **Das D., Thakur N.** Water wave scattering by a sphere submerged in uniform finite depth water with an ice-cover // Marine Structures. 2013. V. 30. P. 63–73.
5. **Das D., Thakur N.** Wave scattering by a sphere submerged in a two-layer fluid with an ice-cover // Intern. J. Appl. Math. Engng Sci. 2014. V. 8, N 1. P. 45–63.
6. **Стурова И. В.** Движение погруженной сферы в жидкости под ледяным покровом // Прикл. математика и механика. 2012. Т. 7, вып. 3. С. 406–417.
7. **Sturova I. V.** Unsteady three-dimensional sources in deep water with an elastic cover and their applications // J. Fluid Mech. 2013. V. 730. P. 392–418. DOI: 10.1017/jfm.2013.303.
8. **Wu G. X.** Radiation and diffraction by a submerged sphere advancing in water waves of finite depth // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1995. V. 448. P. 29–54.
9. **Савин А. А., Савин А. С.** Пространственная задача о возмущении ледяного покрова движущимся в жидкости диполем // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2015. № 5. С. 16–23.
10. **Ильичев А. Т., Савин А. С.** Процесс установления системы плоских волн на ледовом покрове над диполем, равномерно движущимся в толще идеальной жидкости // Теорет. и мат. физика. 2017. Т. 193, № 3. С. 455–465.

11. **Погорелова А. В., Козин В. М., Земляк В. Л.** Движение тонкого тела в жидкости под плавающей пластиной // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 1. С. 32–44.
12. **Pogorelova A. V., Zemlyak V. L., Kozin V. M.** Moving of a submarine under an ice cover in fluid of finite depth // J. Hydrodynamics. 2019. V. 31, N 3. P. 562–569. DOI: 10.1007/s42241-018-0143-1.
13. **Козин В. М., Чижиумов С. Д., Земляк В. Л.** Исследование влияния ледовых условий на эффективность резонансного способа разрушения ледяного покрова, реализуемого подводными судами // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 3. С. 147–157.
14. **Shishmarev K., Khabakhpasheva T., Korobkin A.** Ice response to an underwater body moving in a frozen channel // Appl. Ocean Res. 2019. V. 91. 101877.
15. **Букатов А. Е., Жарков В. В., Завьялов Д. Д.** Трехмерные изгибно-гравитационные волны при неравномерном сжатии // ПМТФ. 1991. № 6. С. 51–57.
16. **Букатов А. Е.** Волны в море с плавающим ледяным покровом. Севастополь: Морской гидрофиз. ин-т, 2017.
17. **Стурова И. В.** Движение нагрузки по ледяному покрову с неравномерным сжатием // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2021. № 4. С. 63–72.
18. **Davis A. M. J.** Short surface waves in the presence of a submerged sphere // SIAM J. Appl. Math. 1974. V. 27, N 3. P. 464–478.
19. **Кочин Н. Е.** Теоретическая гидромеханика / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. М.: Гостехтеоретиздат, 1955.
20. **Хейсин Д. Е.** Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеоиздат, 1967.

Поступила в редакцию 15/IV 2021 г.,
после доработки — 15/IV 2021 г.
Принята к публикации 28/VI 2021 г.