

УДК 519.635.8; 519.635.4; 517.967; 532.59; 551.5

## Исследование корректности задачи о распространении нелинейных акустико-гравитационных волн в атмосфере от переменного давления на нижней границе\*

Ю.А. Курдяева<sup>1</sup>, С.П. Кшевецкий<sup>1</sup>, Н.М. Гаврилов<sup>2</sup>, Е.В. Голикова<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Балтийский федеральный университет им. И. Канта, ул. Ал. Невского, 14, Калининград, Россия, 236006

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, ул. Ульяновская, Петергоф, Санкт-Петербург, Россия, 198504

<sup>3</sup>Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова Российской академии наук, Пыжевский пер., 3, Москва, Россия, 119017

E-mails: yakurdyeva@gmail.com (Курдяева Ю.А.), SPKshev@gmail.com (Кшевецкий С.П.), n.gavrilov@spbu.ru (Гаврилов Н.М.), E.V.Golikova@gmail.com (Голикова Е.В.)

**Курдяева Ю.А., Кшевецкий С.П., Гаврилов Н.М., Голикова Е.В.** Исследование корректности задачи о распространении нелинейных акустико-гравитационных волн в атмосфере от переменного давления на нижней границе // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2017. — Т. 20, № 4. — С. 393–412.

В настоящее время существуют международные сети микробарографов, с высоким разрешением записывающих волновые вариации давления на поверхности Земли. Это создает интерес к задачам о распространении волн в атмосфере от вариаций атмосферного давления. Рассматривается полная система нелинейных гидродинамических уравнений для атмосферного газа с нижними граничными условиями в виде волнообразных вариаций давления на поверхности Земли. Поскольку амплитуда волн у поверхности Земли мала, при анализе корректности задачи используются линеаризованные уравнения. Методом функционала волновой энергии показано, что в случае отсутствия диссипации решение граничной задачи однозначно определяется переменным полем давления на поверхности Земли. Соответствующая диссипативная задача корректна, если, кроме поля давления, заданы подходящие условия на скорость и температуру на поверхности Земли. Результаты исследования линейных задач обобщены на нелинейные уравнения. В случае изотермической атмосферы задача допускает гармонические по переменным  $x$  и  $t$  аналитические решения. Показано хорошее согласие численных решений с аналитическими. Исследование показало, что в граничной задаче температура и плотность могут быстро изменяться у нижней границы. Приведен пример решения трехмерной задачи с переменным давлением на поверхности Земли, взятом из экспериментальных наблюдений. Разработанные алгоритмы и компьютерные программы могут быть использованы для моделирования атмосферных волн от вариаций давления на поверхности Земли.

**DOI:** 10.15372/SJNM20170404

**Ключевые слова:** численное моделирование, модель атмосферы, акустико-гравитационные волны, нелинейность, корректность, граничная задача, суперкомпьютерная программа.

**Kurdyeva Yu., Kshevetski S., Gavrilov N., Golikova E.** Correctness of the problem of propagation of nonlinear acoustic-gravity waves in the atmosphere from pressure variations on the lower boundary // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2017. — Vol. 20, № 4. — P. 393–412.

Currently, there are international microbarograph networks, with high resolution recording the wave pressure variations on the Earth's surface. This increases the interest in the problems of wave propagation in the atmosphere from variations in the atmospheric pressure. A complete system of nonlinear hydrodynamic equations for an atmospheric gas with lower boundary conditions in the form of wavelike variations on the Earth's

---

\*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 17-05-00574).

surface is considered. Since the wave amplitudes near the Earth's surface are small, linearized equations are used in the analysis of the problem correctness. With the help of the wave energy functional method, it is shown that in the non-dissipative case, the solution of the boundary value problem is uniquely determined by the variable pressure field on the Earth's surface. The corresponding dissipative problem is correct if, in addition to the pressure field, suitable conditions on the velocity and temperature on the Earth's surface are given. In the case of an isothermal atmosphere, the problem admits analytical solutions that are harmonic in the variables  $x$  and  $t$ . A good agreement between numerical solutions and analytical ones is shown. The study has shown that in the boundary value problem, the temperature and density can rapidly vary near the lower boundary. An example of the solution of a three-dimensional problem with variable pressure on the Earth's surface, taken from experimental observations, is given. The developed algorithms and computer programs can be used to simulate the atmospheric waves from pressure variations on the Earth's surface.

**Key words:** *numerical simulation, atmospheric model, acoustic-gravity waves, nonlinearity, correctness, boundary problem, supercomputer program.*

## 1. Введение

Земная атмосфера нестационарна, и в ней постоянно наблюдаются волновые колебания с периодами от долей секунды до нескольких часов, называемые акустико-гравитационными волнами (АГВ) [1–3]. Эти волны могут генерироваться мезомасштабной турбулентностью и конвекцией [4, 5], атмосферными фронтами и струйными потоками [6, 7] с максимумом эффективности на высотах 9–12 км [8]. Возникновение волн часто связано с метеорологическими явлениями [9]. В процессе возникновения и эволюции кучевых облаков происходят фазовые переходы воды с выделением/поглощением тепла, которое являются мощным энергетическим источником волновых процессов [9–14]. Возникшие волны распространяются в среднюю и верхнюю атмосферу и могут разрушаться и образовывать турбулентность или порождать другие неустойчивые явления [15, 16].

Для моделирования распространения АГВ используются численные модели атмосферных процессов. Байкер и Шуберт моделировали распространение нелинейных волн в атмосфере Венеры в области с горизонтальным размером 120 км и с вертикальным размером 48 км [17]. В работах [18, 19] смоделирована неустойчивость Кельвина–Гельмгольца и образование турбулентности разрушающимися волнами в области со сравнительно небольшими вертикальным и горизонтальным размерами; использованные численные методы галеркинско-го типа основаны на преобразовании исходных гидродинамических уравнений в уравнения для спектральных компонент. В работах [20, 21] были развиты двумерные численные модели для моделирования распространения атмосферных волн.

Гаврилов и Кшевецкий [23] построили двумерные численные модели высокого разрешения. Требование точного выполнения фундаментальных законов сохранения в этих моделях является важным и позволяет получать физически приемлемые обобщенные решения уравнений. Гаврилов и Кшевецкий обобщили двумерную модель на трехмерный случай [24] и использовали трехмерную модель для расчета распространения волн от гармонического источника на поверхности Земли.

Кшевецкий и Куличков [25] применили трехмерную нелинейную модель для расчета генерации АГВ процессами нагрева/охлаждения газа при выделении/поглощении тепла при фазовых переходах воды в процессе жизнедеятельности грозового облака. В частности, они изучили связь локального атмосферного давления с формированием и развитием грозового облака. Карпов и Кшевецкий [26], используя численное моделирование, изучали распространение АГВ от локального нестационарного источника на поверхности Земли. Они показали, что инфразвуковые волны, распространяющиеся с тропосферных высот, могут существенно нагревать верхнюю атмосферу.

Одной из сложностей моделирования генерации акустико-гравитационных волн метеорологическими источниками является имеющаяся неопределенность в параметрах источников [25, 27, 28]. Развитие кучевых облаков обусловлено фазовыми переходами воды в атмосфере [29], и эти фазовые переходы являются важным энергетическим источником волн в атмосфере. Кучевые облака очень разнообразны, имеют сложную изменяющуюся со временем пространственную структуру [9, 27, 28, 30]. Очевидно, имеющихся экспериментальных данных часто недостаточно для детального описания таких тепловых источников [25, 27, 28]. Это вынуждает искать другие постановки задачи о распространении волн от приземных источников, которые бы опирались на имеющуюся экспериментальную информацию.

Распространяющиеся в атмосфере АГВ изменяют атмосферное давление, приводя к небольшим, но регистрируемым вариациям приземного давления. Эти волновые вариации атмосферного давления регистрируются микробарографами [9]. В настоящее время в Европе, в Африке, в России имеются сети микробарографов, которые активно расширяются [9]. Представляется интересным использовать имеющуюся экспериментальную информацию по вариациям атмосферного давления для расчета волн в атмосфере с целью изучения этих волн и последующего исследования влияния этих волн на ионосферу и на радиосвязь. Однако задача о распространении волн от вариаций давления на границе нестандартная и требует математического исследования. Мы ставим целью модифицировать численную модель [24, 31, 32, 35] распространения нелинейных АГВ в атмосфере и приспособить ее для расчета волн от экспериментально наблюдаемых вариаций давления на поверхности Земли.

В данной работе мы сначала выполним некоторое исследование гидродинамических уравнений с целью предложить корректную постановку задачи о распространении волн от вариаций давления на поверхности Земли. Нелинейные уравнения сложны для анализа. Однако амплитуда волн у поверхности Земли мала, и это позволяет при исследовании граничной задачи стартовать с изучения линеаризованных уравнений. Мы покажем, что решение граничной задачи с заданным переменным давлением на границе однозначно определяется давлением на границе. Этот факт позволяет поставить задачу о распространении волн от источника в виде флуктуаций атмосферного давления во время грозных явлений. Мы модифицируем численные методы [24, 31, 32, 35] и применим их для решения задачи о распространении волн от переменного давления на поверхности Земли и покажем хорошее совпадение численных решений с точными решениями линеаризованных уравнений гидродинамики

В конце работы мы применим полученные теоретические результаты для решения трехмерной нелинейной задачи о распространении волн от экспериментально наблюдаемых вариаций давления на поверхности Земли.

## 2. Численная модель волновых процессов в атмосфере

### 2.1. Нелинейные гидродинамические уравнения атмосферных процессов

Динамика атмосферы описывается полной системой уравнений термогидродинамики для атмосферного газа [1, 2]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} + \frac{\partial \rho uw}{\partial z} + 2\rho\omega_z v = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \zeta(z) u + \frac{\partial}{\partial z} \zeta(z) \frac{\partial}{\partial z} u, \\
& \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho vw}{\partial z} - 2\rho\omega_z u = -\frac{\partial p}{\partial y} + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \zeta(z) v + \frac{\partial}{\partial z} \zeta(z) \frac{\partial}{\partial z} v, \\
& \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial \rho uw}{\partial x} + \frac{\partial \rho vw}{\partial y} + \frac{\partial \rho w^2}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \zeta(z) w + \frac{\partial}{\partial z} \zeta(z) \frac{\partial}{\partial z} w, \\
& \frac{1}{\gamma - 1} \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial Pu}{\partial x} + \frac{\partial Pv}{\partial y} + \frac{\partial Pw}{\partial z} \right) \\
& = -P \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \kappa(z) T + \frac{\partial}{\partial z} \kappa(z) \frac{\partial}{\partial z} T + Q_0(z) + Q_{\text{viscous}}, \\
& Q_0(z) = -\frac{\partial}{\partial z} \kappa(z) \frac{\partial}{\partial z} T_0(z), \\
& Q_{\text{viscous}} = \zeta(z) \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \right. \\
& \quad \left. \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right).
\end{aligned} \tag{1}$$

В модели (1) (см. [32])  $x, y, z$  — горизонтальные и вертикальная координаты;  $t$  — время;  $\rho$  — плотность;  $u, v, w$  — горизонтальные и вертикальная компоненты скорости;  $T$  — температура;  $P = \frac{\rho RT}{\mu}$  — давление;  $R$  — универсальная газовая постоянная;  $\mu$  — молекулярный вес;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\gamma$  — постоянная адиабаты;  $\xi, \kappa$  — коэффициенты вязкости и теплопроводности;  $T_0(z)$  — вертикальный профиль фоновой температуры атмосферы;  $\omega_z$  — локальная вертикальная компонента угловой скорости вращения Земли.

В модели [23–25, 31, 32] фоновый температурный профиль  $T_0(z)$  берется из известной эмпирической модели атмосферы NRLMSISE-00 [33],  $\rho_0(z) = \frac{\rho_0(0) H(0)}{H(z)} \exp\left(-\int_0^z \frac{dz}{H(z)}\right)$ ,  $H(z) = \frac{RT_0(z)}{g\mu(z)}$ . Кинематическая молекулярная вязкость заимствована из [34]:

$$\zeta(z) = 3.4 \cdot 10^{-7} T(z)^{0.69} / \rho(z).$$

Коэффициент теплопроводности равен коэффициенту вязкости, деленному на число Прандтля  $Pr$ . Аналогичные профили вязкости и теплопроводности использованы в [20, 22]. Мы также учитываем турбулентную теплопроводность и вязкость, вертикальные профили которых имеют максимумы  $10 \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$  около земли и на высоте 100 км и минимум  $0.1 \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$  в стратосфере [36].

В последнем уравнении слагаемое  $Q_0(z)$  является дополнительным источником, обеспечивающим стационарность неизотермической атмосферы в отсутствие возмущений.

Последнее уравнение (для  $P$ ) системы (1) не является законом сохранения. Тем не менее, используемая численная схема интегрирования уравнений системы (1) является консервативной и для нее выполняются сеточные аналоги законов сохранения массы, импульса (при  $g = 0$ ), полной энергии, а также схема удовлетворяет требованию неубывания энтропии. Численная схема подобна известной схеме Лакса–Вендрофа [37] и описана в [35, 38]. Решение уравнений (1) понимается в слабом смысле. Численный метод описывает, в том числе, сверхзвуковые течения газа.

Компьютерная программа AtmoSym [32] для численного решения уравнений системы (1) использует параллельные вычисления. Распараллеливание вычислений осуществляется на трех уровнях. Распределение вычислений по нодам кластера обеспечивается с помощью MPI. На каждой ноде кластера вычисления распараллеливаются с помощью OPENMP. Распараллеливание вычислений в ядрах процессора автоматическое, с использованием SSEх.

Программа AtmoSym многофункциональная и позволяет решать задачи о распространении волн от различных начальных возмущений и источников. Графический интерфейс к AtmoSym написан на Python и установлен на специальном сервере. Управление программой осуществляется в диалоговом режиме через Интернет. Пользователь запускает графическую оболочку и отвечает на вопросы управляющей программы и вводит требуемые данные. После ввода данных управляющая программа сервера направляет вычислительную программу на кластер, компилирует вычислительную программу на кластере, назначает оптимальное число нод кластера, ставит задачу в очередь, следит за ходом выполнения задачи и отправляет данные расчетов пользователю обратно на сервер.

Данное исследование создает необходимую базу для функционального блока в программе AtmoSym, обеспечивающего расчет волн от вариаций атмосферного давления на поверхности Земли.

## 2.2. Граничные условия

Рассматриваемая трехмерная численная модель позволяет рассчитывать распространение волн над поверхностью Земли над территорией с размером до нескольких тысяч километров. В модели задаются периодические граничные условия по горизонтали. Пусть  $L_x, L_y$  — размеры рассматриваемой области вдоль осей  $x$  и  $y$ ; периодические граничные условия записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} u(x = L_x, y, z, t) &= u(x = 0, y, z, t), & u(x, y = L_y, z, t) &= u(x, y = 0, z, t), \\ v(x = L_x, y, z, t) &= v(x = 0, y, z, t), & v(x, y = L_y, z, t) &= v(x, y = 0, z, t), \\ w(x = L_x, y, z, t) &= w(x = 0, y, z, t), & w(x, y = L_y, z, t) &= w(x, y = 0, z, t), \\ \rho(x = L_x, y, z, t) &= \rho(x = 0, y, z, t), & \rho(x, y = L_y, z, t) &= \rho(x, y = 0, z, t), \\ T(x = L_x, y, z, t) &= T(x = 0, y, z, t), & T(x, y = L_y, z, t) &= T(x, y = 0, z, t). \end{aligned} \quad (2)$$

На верхней границе ( $z = 500$  км) расчетной области ставятся граничные условия, стандартные для задач о распространении волновых возмущений в термосфере:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=h} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=h} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=h} = 0, \quad w|_{z=h} = 0. \quad (3)$$

Эти граничные условия обычно оправдываются большими вязкостью и теплопроводностью на высотах около  $z = 500$  км и выше.

Обычно в атмосферных моделях в качестве одного из нижних граничных условий задается вертикальная скорость газа на поверхности Земли

$$w|_{z=0} = f_1(x, y, t). \quad (4)$$

Здесь  $f_1(x, y, t)$  — функция, заданная на поверхности Земли, причем в большинстве задач используется условие непротекания через поверхность Земли, и тогда  $w|_{z=0} = 0$ .

Другие, дополнительные к (4), стандартные нижние граничные условия имеют вид

$$u(x, y, z = 0, t) = 0, \quad v(x, y, z = 0, t) = 0, \quad T(x, y, z = 0, t) = T_0(z = 0). \quad (5)$$

Граничные условия на горизонтальные компоненты скорости требуются вследствие учета вязкости. Граничное условие на температуру связано с учетом теплопроводности. Если бы мы пренебрегли диссипативными членами в (1), граничные условия (5) были бы не нужны.

Мы намерены в качестве одного из нижних граничных условий задавать экспериментально наблюдаемые вариации давления на поверхности Земли:

$$P(x, y, z = 0, t) = \frac{R}{\mu} \rho(x, y, z = 0, t) T(x, y, z = 0, t) = f_2(x, y, t), \quad (6)$$

здесь  $f_2(x, y, t)$  — функция, задаваемая на нижней границе, которую предполагается определять из экспериментальных наблюдений. Вопрос о других условиях на поверхности Земли, которые следует наложить, заслуживает исследования.

### 2.3. Корректность линеаризованной недиссипативной граничной задачи

Нелинейная система уравнений (1) сложна для анализа. Вследствие большой плотности атмосферного газа у поверхности Земли амплитуда волн у поверхности Земли мала. Поэтому использование линеаризованных уравнений в исследовании корректности задачи оправдано. Линеаризованная система уравнений для случая двух пространственных измерений получается из (1) стандартно и имеет следующий вид [39, 40]:

$$\begin{aligned} (\rho_0 \Psi)_t + (\rho_0 u)_x + (\rho_0 w)_z &= 0, \\ (\rho_0 u)_t + \rho_0 g H (\Psi + \Phi)_x &= 0, \\ (\rho_0 w)_t + (\rho_0 g H (\Psi + \Phi))_z + \rho_0 g \Psi &= 0, \\ (\rho_0 \Phi)_t + (\gamma - 1) ((\rho_0 u)_x + (\rho_0 w)_z) + \frac{\alpha}{H} \rho_0 w &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

В системе уравнений (7)  $\Psi = \frac{\rho(x, z, t) - \rho_0(z)}{\rho_0(z)}$ ,  $\Phi = \frac{T(x, z, t) - T_0(z)}{T_0(z)}$ ,  $H = \frac{RT_0(z)}{g\mu}$  — высота однородной атмосферы,  $\alpha = \left( \gamma - 1 + \gamma \frac{dH(z)}{dz} \right)$ ,  $\gamma$  — показатель адиабаты. При выводе уравнений (7) мы предполагали отсутствие ветра, что оправдано, поскольку у поверхности Земли ветер слабый. Мы пренебрегли также вязкостью и теплопроводностью; до высоты 100 км диссипативные эффекты слабые [1]. Мы рассматриваем двумерную систему уравнений; анализ трехмерной задачи аналогичен, но формулы более громоздкие. В двумерном варианте мы опустили члены кориолисовой силы.

Поскольку мы рассматриваем задачу о генерации волн граничным режимом, начальные условия соответствуют отсутствию волн при  $t = 0$  и имеют следующий вид:

$$\Psi(x, z, t = 0) = 0, \quad u(x, z, t = 0) = 0, \quad w(x, z, t = 0) = 0, \quad \Phi(x, z, t = 0) = 0. \quad (8)$$

Условия на горизонтальных границах следуют из (2) и являются периодическими:

$$\begin{aligned} u(L_x, z, t) &= u(0, z, t), & w(L_x, z, t) &= w(0, z, t), \\ \Psi(L_x, z, t) &= \Psi(0, z, t), & \Phi(L_x, z, t) &= \Phi(0, z, t). \end{aligned} \quad (9)$$

На верхней границе ставится условие непротекания

$$w(x, z = h, t) = 0. \quad (10)$$

На нижней границе накладывається условие

$$\Delta P(x, z = 0, t) = \rho_0(0)gH(0) (\Psi(x, z = 0, t) + \Phi(x, z = 0, t)) = f_3(x, t), \quad (11)$$

следующее из (6). Величина  $\Delta P = \rho_0(z)gH(z) (\Psi + \Phi)$  имеет смысл волновой добавки к фоновому давлению  $P_0(z) = \rho_0(z)gH(z)$ ,  $f_3(x, t)$  — функция, задаваемая на нижней поверхности, которую предполагается определять из экспериментальных наблюдений.

**Теорема 1.** *Непрерывное решение системы уравнений (7) с начальными условиями (8) и граничными условиями (9)–(11) единственно.*

**Доказательство.** Пусть, наоборот, существуют два различных решения:  $\chi_1 = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ u_1 \\ w_1 \\ \Phi_1 \end{pmatrix}$

и  $\chi_2 = \begin{pmatrix} \Psi_2 \\ u_2 \\ w_2 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}$ . Рассмотрим разность  $\Delta\chi = \begin{pmatrix} \tilde{\Psi} \\ \tilde{u} \\ \tilde{w} \\ \tilde{\Phi} \end{pmatrix}$  этих решений, где  $\tilde{\Psi} = \Psi_1 - \Psi_2$ ,

$\tilde{\Phi} = \Phi_1 - \Phi_2$ ,  $\tilde{u} = u_1 - u_2$ ,  $\tilde{w} = w_1 - w_2$ . Функция  $\Delta\chi$  удовлетворяет уравнению (7), начальным условиям (8), граничным условиям (9)–(11), причем  $f_3(x, t) = 0$  в (11).

Мы используем известный закон сохранения волновой энергии для уравнений (7) в дифференциальной форме, который в случае двух измерений имеет следующий вид [1]:

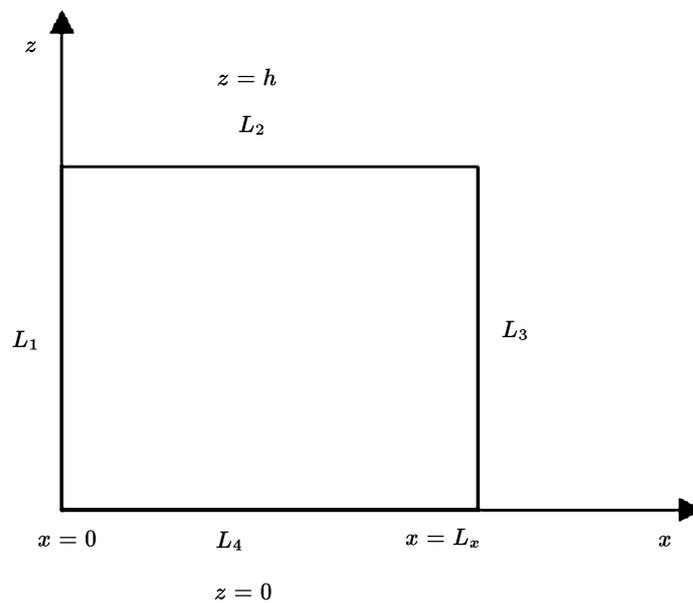
$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} &= 0, & e &= \frac{1}{2} \rho_0(z) \left( (u^2 + w^2) + gH(z) \frac{(\Psi + \Phi)^2}{\gamma} + gH(z) \frac{(\Phi - (\gamma - 1)\Psi)^2}{\gamma\alpha(z)} \right), \\ \vec{j} &= (\rho_0 gH (\Psi + \Phi) u, \rho_0 gH (\Psi + \Phi) w). \end{aligned} \quad (12)$$

Соотношение (12) выводится так. Первое и четвертое уравнение системы (7) складываются; результат умножается на  $\frac{gH(z)}{\gamma}$ . Затем из четвертого уравнения вычитается первое, умноженное на  $(\gamma - 1)$ ; результат умножается на  $\frac{gH(z)}{\gamma\alpha(z)}$ . Второе уравнение умножается на  $u$ , третье уравнение умножается на  $w$ . Все четыре полученных соотношения складываются и результат преобразуется к виду (12).

Для линейных уравнений разность решений  $\Delta\chi = \chi_1 - \chi_2$  является решением и удовлетворяет (12). Запишем соотношение (12) для решения  $\Delta\chi$  и проинтегрируем полученное соотношение по области  $Q = \Omega \times [0, t]$ , где  $\Omega = [0, L_x] \times [0, h]$ . Применим теорему Остроградского–Гаусса и используем начальные условия (8). Получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_0(z) \left( \tilde{u}^2 + \tilde{w}^2 + gH(z) \frac{(\tilde{\Psi} + \tilde{\Phi})^2}{\gamma} + gH(z) \frac{(\tilde{\Phi} - (\gamma - 1)\tilde{\Psi})^2}{\gamma\alpha(z)} \right) d\Omega \\ & = - \int_0^t \int_S \rho_0 gH (\tilde{\Psi} + \tilde{\Phi}) \tilde{v} d\vec{S} dt, \quad \tilde{v} = (\tilde{u}, \tilde{w}). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $S$  — граница области  $\Omega$ ,  $d\vec{S} = \vec{n} dS$ ,  $\vec{n}$  — наружный нормальный вектор к границе  $S$ . Контур интегрирования  $S$  показан на рисунке 1.



**Рис. 1.** Область  $\Omega$  и контур интегрирования  $S = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$

Рассмотрим интеграл по границе области в правой части (13). Интеграл по участку  $L_2$  контура  $S$  равен нулю в силу (10). Вследствие периодических условий (9), интеграл по границе  $L_1$  равен интегралу по границе  $L_3$  с противоположным знаком. Таким образом, соотношение (13) упрощается и преобразуется в

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_0(z) \left( \tilde{u}^2 + \tilde{w}^2 + gH(z) \frac{(\tilde{\Psi} + \tilde{\Phi})^2}{\gamma} + gH(z) \frac{(\tilde{\Phi} - (\gamma - 1)\tilde{\Psi})^2}{\gamma\alpha(z)} \right) d\Omega \\ & = \int_0^t \int_{L_4} \rho_0(0) gH(0) (\tilde{\Psi}(x, z=0, t) + \tilde{\Phi}(x, z=0, t)) \tilde{w}(x, z=0, t) dx dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Вследствие  $(\tilde{\Psi}(x, z=0, t) + \tilde{\Phi}(x, z=0, t)) = 0$ , интеграл в правой части (14) равен нулю, и тогда из левой части соотношения (14) следует  $\chi_1 = \chi_2$ . То есть решение единственно.  $\square$

## 2.4. Корректность линеаризованной диссипативной граничной задачи

Линеаризованная система уравнений для случая двух пространственных измерений с учетом диссипативных слагаемых получается из (1) стандартно и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 (\rho_0 \Psi)_t + (\rho_0 u)_x + (\rho_0 w)_z &= 0, \\
 (\rho_0 u)_t + \rho_0 g H (\Psi + \Phi)_x &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \zeta(z) u + \frac{\partial}{\partial z} \zeta(z) \frac{\partial}{\partial z} u, \\
 (\rho_0 w)_t + (\rho_0 g H (\Psi + \Phi))_z + \rho_0 g \Psi &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \zeta(z) w + \frac{\partial}{\partial z} \zeta(z) \frac{\partial}{\partial z} w, \\
 \frac{gH}{\gamma - 1} \left[ (\rho_0 \Phi)_t + (\gamma - 1) ((\rho_0 u)_x + (\rho_0 w)_z) + \frac{\alpha}{H} \rho_0 w \right] &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \kappa(z) T_0 \Phi + \frac{\partial}{\partial z} \kappa(z) \frac{\partial}{\partial z} T_0 \Phi.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Для упрощения будем считать, что  $\frac{dT_0(z)}{dz} = 0$ , в этом случае  $\alpha = (\gamma - 1)$ . Снабдим систему уравнений (15) начальными условиями (8), граничными условиями (9) и верхними граничными условиями, следующими из (3):

$$\left. \frac{\partial(T_0 \Phi)}{\partial z} \right|_{z=h} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=h} = 0, \quad w|_{z=h} = 0. \tag{16}$$

**Теорема 2.** *Непрерывно-дифференцируемое решение системы уравнений (15), удовлетворяющее начальным условиям (8), граничным условиям (9), (16), (11) и условиям*

$$u(x, z = 0, t) = 0, \quad \frac{\partial w(x, z = 0, t)}{\partial z} = 0, \quad \Phi(x, z = 0, t) = 0, \quad \Psi(x, z = 0, t) = \frac{f_3(x, t)}{\rho_0(0)gH(0)}, \tag{17}$$

*единственно.*

Здесь  $f_3(x, t)$  — функция, заданная на нижней границе, и имеющая смысл вариаций давления на нижней границе:  $f_3(x, t) = \Delta P(x, z = 0, t)$ .

**Доказательство.** Из системы уравнений (15) при помощи тех же операций, что использовались при выводе энергетического соотношения (12), получается обобщающее соотношение:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} &= q, \\
 q &= \frac{gH\Phi}{\gamma - 1} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \kappa(z) + \frac{\partial}{\partial z} \kappa(z) \frac{\partial}{\partial z} \right) T_0 \Phi + u \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \zeta(z) + \frac{\partial}{\partial z} \zeta(z) \frac{\partial}{\partial z} \right) u + \\
 &\quad w \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \zeta(z) + \frac{\partial}{\partial z} \zeta(z) \frac{\partial}{\partial z} \right) w.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Как и в предыдущем случае, для линейных уравнений разность решений  $\Delta \chi = \chi_1 - \chi_2$  является решением и удовлетворяет (18). Запишем соотношение (18) для решения  $\Delta \chi$  и проинтегрируем его по области  $Q = \Omega \times [0, t]$ , где  $\Omega = [0, L_x] \times [0, h]$ . Применим теорему Остроградского–Гаусса и используем начальные условия (8). Здесь, как и в предыдущем случае, интеграл  $\int_0^t \int_S \rho_0 g H (\tilde{\Psi} + \tilde{\Phi}) \vec{v} d\vec{S} dt$  преобразуется в (14). Диссипативные слагаемые в правой части преобразуются с помощью интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} q d\Omega = & - \int_0^t \int_{L_4} (\tilde{u}\xi(z)\tilde{u}_z) \Big|_{z=0} dx dt - \int_0^t \int_{\Omega} \xi(z)(\tilde{u}_x)^2 dx dz dt - \int_0^t \int_{\Omega} \xi(z)(\tilde{u}_z)^2 dx dz dt - \\
& \int_0^t \int_{L_4} (\tilde{w}\xi(z)\tilde{w}_z) \Big|_{z=0} dx dt - \int_0^t \int_{\Omega} \xi(z)(\tilde{w}_x)^2 dx dz dt - \int_0^t \int_{\Omega} \xi(z)(\tilde{w}_z)^2 dx dz dt + \\
& \frac{gHT_0}{\gamma - 1} \left( - \int_0^t \int_{L_4} (\tilde{\Phi}k(z)\tilde{\Phi}_z) \Big|_{z=0} dx dt - \int_0^t \int_{\Omega} k(z)(\tilde{\Phi}_x)^2 dx dz dt - \right. \\
& \left. \int_0^t \int_{\Omega} k(z)(\tilde{\Phi}_z)^2 dx dz dt \right). \tag{19}
\end{aligned}$$

При выводе (19) мы учли, что интегралы по участкам  $L_1$  и  $L_3$  (см. рис. 1) имеют противоположные знаки и сокращаются вследствие периодических граничных условий (9). Интеграл по участку  $L_4$  равен нулю вследствие верхних граничных условий (16).

Таким образом, приходим к соотношению

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_0(z) \left( \tilde{u}^2 + \tilde{w}^2 + gH \frac{(\tilde{\Psi} + \tilde{\Phi})^2}{\gamma} + gH \frac{(\tilde{\Phi} - (\gamma - 1)\tilde{\Psi})^2}{\gamma\alpha} \right) d\Omega + \\
& \int_0^t \int_{\Omega} \zeta(z) \left( \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \right)^2 \right) d\Omega dt + \\
& \int_0^t \int_{\Omega} \kappa(z) T_0 \left( \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z} \right)^2 \right) d\Omega dt \\
& = \int_0^t \int_{L_4} [\rho_0 g H (\tilde{\Psi} + \tilde{\Phi}) \tilde{w}] \Big|_{z=0} dx dt + \int_0^t \int_{L_4} \zeta(0) \left( \tilde{u} \frac{d\tilde{u}}{dz} + \tilde{w} \frac{d\tilde{w}}{dz} \right) \Big|_{z=0} dx dt + \\
& \int_0^t \int_{L_4} \kappa(0) T_0 \left( \tilde{\Phi} \frac{d\tilde{\Phi}}{dz} \right) \Big|_{z=0} dx dt. \tag{20}
\end{aligned}$$

Вследствие  $(\tilde{\Psi}(x, z=0, t) + \tilde{\Phi}(x, z=0, t)) = 0$  и нижних граничных условий (17), интеграл в правой части (20) равен нулю, и тогда из левой части (20) следует  $\chi_1 = \chi_2$ . То есть решение единственно.  $\square$

## 2.5. Постановка нелинейной граничной задачи

Опираясь на проведенный анализ линеаризованной задачи, мы можем предложить следующую постановку нелинейной задачи:

- распространение волн описывается системой нелинейных уравнений (1),
- условия на горизонтальных границах даются формулами (2),
- начальными условиями являются условия отсутствия волн:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t = 0) = 0, \quad v(x, y, z, t = 0) = 0, \quad w(x, y, z, t = 0) = 0, \\ \rho(x, y, z, t = 0) = \rho_0(z), \quad T(x, y, z, t = 0) = T_0(z), \end{aligned} \quad (21)$$

- верхние граничные условия даются формулами (3),
- нижние граничные условия:

$$\begin{aligned} u(x, y, z = 0, t) = 0, \quad v(x, y, z = 0, t) = 0, \quad \frac{\partial w(x, y, z = 0, t)}{\partial z} = 0, \\ T(x, y, z = 0, t) = T_0(0), \quad \rho(x, y, z = 0, t) = \frac{f_2(x, y, t)}{gH(0)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь  $f_2(x, y, t)$  — функция из (6), определенная на нижней границе и имеющая смысл поля давления на нижней границе,  $f_2(x, y, t) = P(x, y, z = 0, t)$ .

Корректность этой нелинейной задачи и качество численного моделирования мы проверим экспериментально с помощью решения тестовых задач.

## 2.6. Сравнение численных решений нелинейной модели с аналитическими решениями линеаризованной модели

### 2.6.1. Аналитические решения линеаризованной недиссипативной модели

В случае изотермической атмосферы ( $T_0 = \text{const}$ ) плотность изменяется с высотой экспоненциально,  $\rho_0(z) = \rho_{00} \exp\left(-\frac{z}{H_0}\right)$ ,  $H_0 = \frac{RT_0}{g\mu}$ . В этом случае плотность в уравнениях (7) сокращается и уравнения становятся с постоянными коэффициентами и решаются аналитически. Соответствующие аналитические решения хорошо изучены [1] и представляют собой акустические и внутренние гравитационные волны. Рассмотрим монохроматические волны, зависящие от  $x$  и  $t$  через аргумент  $S = kx + mz - \omega t$ . Пусть для определенности

$$\Psi(x, z, t) + \Phi(x, z, t) = C e^{\frac{z}{2H}} \cos(S). \quad (23)$$

Учитывая зависимость остальных полей от  $x$  и  $t$  через переменную  $S$ , несложно получить из системы уравнений (7) выражения для всех величин рассматриваемой волны:

$$\begin{aligned} u = CgH(k/w) \exp(z/2H) \sin(S), \\ w = A(\Psi + \Phi) + BH \frac{d}{dz}(\Psi + \Phi), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\Psi(x, z, t) = C e^{\frac{z}{2h}} \left[ \left( \frac{gH_0 k^2}{\omega^2} + \frac{mA}{\omega} \right) \sin(S) + \left( \frac{4m^2 H_0^2 B + 2A + B}{4H_0 \omega} \right) \cos(S) \right],$$

$$\Phi(x, z, t) = C e^{\frac{z}{2h}} \left[ \left( 1 - \frac{gH_0 k^2}{\omega^2} - \frac{mA}{\omega} \right) \sin(S) - \left( \frac{4m^2 H_0^2 B + 2A + B}{4H_0 \omega} \right) \cos(S) \right],$$

где

$$A = -\frac{(4\gamma m^2 H_0^2 - \gamma + 2)(-\omega^2 + \gamma g H_0 k^2)}{m\omega(-4\gamma + 4 + \gamma^2 + 4\gamma^2 m^2 H_0^2)}, \quad B = -\frac{2(\gamma - 2)(-\omega^2 + \gamma g H_0 k^2)}{m\omega(-4\gamma + 4 + \gamma^2 + 4\gamma^2 m^2 H_0^2)}.$$

Здесь  $k$  и  $m$  — волновые числа, связанные с частотой  $\omega$  дисперсионным соотношением

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \gamma g H_0 \left( m^2 + k^2 + \frac{1}{4H_0^2} \right) \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4k^2(\gamma - 1)}{\gamma^2 H_0^2 \left( m^2 + k^2 + \frac{1}{4H_0^2} \right)^2}} \right). \quad (25)$$

Знак “+” в дисперсионном соотношении (25) соответствует акустическим волнам, а знак “-” соответствует внутренним гравитационным волнам [1].

Знак  $m$  в (24) выберем таким образом, чтобы групповая скорость волн была направлена вверх, что соответствует распространению волн от поверхности Земли. Для акустических волн  $\frac{\partial \omega_A}{\partial m} \approx \frac{\gamma g H m}{\omega_A}$  и при  $\omega_A > 0$  нужно брать  $m > 0$ . Для внутренних гравитационных волн  $\frac{\partial \omega_G}{\partial m} \approx -\frac{\omega_G m}{\left(m^2 + k^2 + \frac{1}{4H^2}\right)}$ , и при  $\omega_G > 0$  нужно брать  $m < 0$ .

Волну, создаваемую произвольным переменным давлением на нижней границе, можно построить в виде суперпозиции волн вида (24) с различными  $k$  и  $\omega$ . Поэтому рассмотрение решения (24) достаточно для проверки программы.

По аналитическому решению (24) вычислим давление на нижней границе, т. е. функцию  $f_2(x, y, t)$  из (22):

$$f_2(x, y, t) = P_0(0) (1 + \Psi(x, z = 0, t) + \Phi(x, z = 0, t)) = P_0(0) (1 + C \sin(kx - \omega t)). \quad (26)$$

Это выражение (26) использовано нами в тестовых расчетах по нелинейной модели (1) с граничными условиями (22), (2), (3) и начальными условиями (21).

Ожидается, что на малых высотах, где нелинейные и диссипативные эффекты малы, с увеличением  $t$  установится стационарное решение (24).

### 2.6.2. Сравнение численных решений с аналитическими

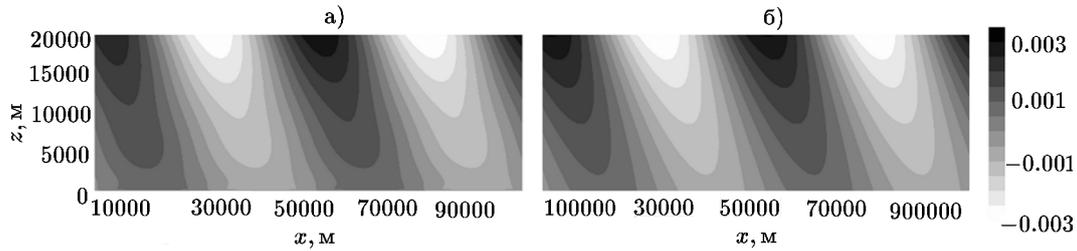
Для проверки правильности постановки нелинейной граничной задачи (п. 2.5) и тестирования программы проведена серия тестовых расчетов по нелинейной модели (1) с граничными условиями (22), (26), (2), (3) и начальными условиями (21).

В тестовых расчетах  $H_0 = \frac{RT_0}{g\mu} = 8000$  м,  $L_x = 10^6$  м,  $k = \frac{20\pi}{L_x}$ ,  $\omega = \frac{2\pi}{120}$  с<sup>-1</sup> для акустических волн и  $\omega = \frac{2\pi}{3600}$  с<sup>-1</sup> для внутренних гравитационных волн. Чтобы исключить влияние переходного режима на расчеты, граничный источник (26) умножается на функцию  $q = 1 - \exp(-t/\tau)$ , где  $\tau = 2$  мин; это обеспечивает постепенное включение источника (26) и уменьшает АГВ, обусловленные переходным режимом от отсутствия волн к стационарному решению (24).

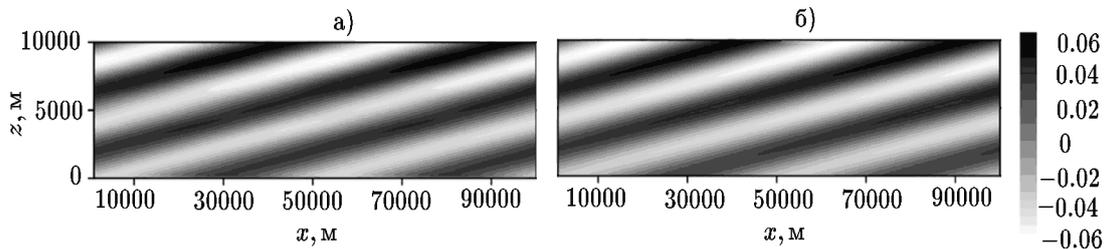
Полученные численные решения сравниваются с аналитическими решениями (24).

На рис. 2 показано волновое возмущение поля температур для численного решения по нелинейной диссипативной модели и для аналитического решения линеаризованных недиссипативных уравнений для случая, когда граничный источник возбуждает акустическую волну. Форма волны, вычисленная численно, совпадает с формой волны, даваемой аналитическими формулами. Отклонения в значениях поля температуры не превышают нескольких процентов.

На рис. 3 показано волновое возмущение поля температур для нелинейной диссипативной модели и для аналитического решения линеаризованных недиссипативных уравнений для случая, когда граничный источник возбуждает внутреннюю гравитационную волну. Форма волны, вычисленная численно, совпадает с формой волны, даваемой аналитическими формулами. Отклонения в значениях поля температуры не превышают нескольких процентов и численно практически совпадает с аналитическим. То есть численное и аналитическое решения практически идентичны.

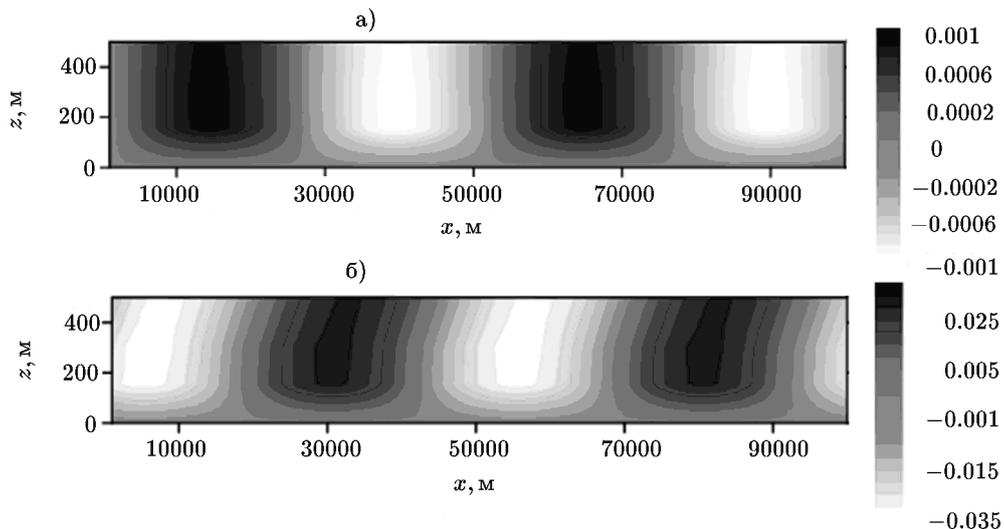


**Рис. 2.** Температурное возмущение ( $^{\circ}\text{K}$ ) вблизи поверхности Земли, обусловленное акустической волной, распространяющейся от переменного давления (26) на поверхности Земли;  $t \approx 16$  мин; а) численное решение, б) аналитическое решение (24)



**Рис. 3.** Температурное возмущение ( $^{\circ}\text{K}$ ) вблизи поверхности Земли, обусловленное внутренней гравитационной волной, распространяющейся от переменного давления (26) на поверхности Земли;  $t \approx 4$  час; а) численное решение, б) аналитическое решение (24)

Аналитическое решение (24) получено для недиссипативной модели, в то время как численная модель учитывает теплопроводность, и на поверхности Земли температура постоянна вследствие (22). Поскольку теплопроводность атмосферного газа мала, у поверхности Земли должен возникнуть тонкий переходный слой, в рамках которого возмущение температуры должно быстро перейти от нулевого значения на поверхности Земли к волновому решению (24) для недиссипативной модели.



**Рис. 4.** Смоделированные температурные возмущения ( $^{\circ}\text{K}$ ) около поверхности Земли, образованные: а) акустической волной при  $t \approx 16$  мин и б) внутренней гравитационной волной при  $t \approx 4$  час

На рис. 4 с большим разрешением показаны температурные возмущения вблизи нижней границы для акустической и внутренней гравитационной волн. Можно увидеть быст-

рый переход от нулевого возмущения температуры на границе к волновым полям, соответствующим моделируемым АГВ. Как видно из расчетов, толщина переходного слоя не превышает 100 м, что значительно меньше вертикальных масштабов рассматриваемых волн.

Разумное совпадение аналитического и численного решений говорит о правильности постановки нелинейной граничной задачи (п. 2.5) и о приемлемом качестве численного моделирования.

### 2.7. Моделирование волн от наблюдаемых локальных вариаций давления

Чтобы протестировать трехмерную численную модель с реальными данными, мы использовали данные изменения поверхностного давления со временем, записанные микробарографом Института физики атмосферы им. Обухова в окрестности Москвы (55.7° N, 37.6° E) 9 апреля 2016 г., показанные на рис. 5.

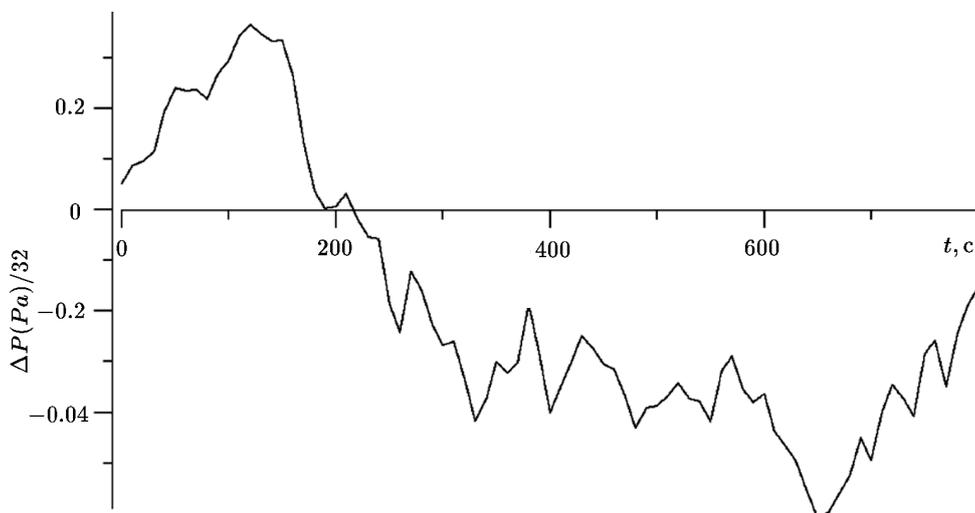


Рис. 5. Вариации давления вблизи Москвы 9 апреля 2016 г.

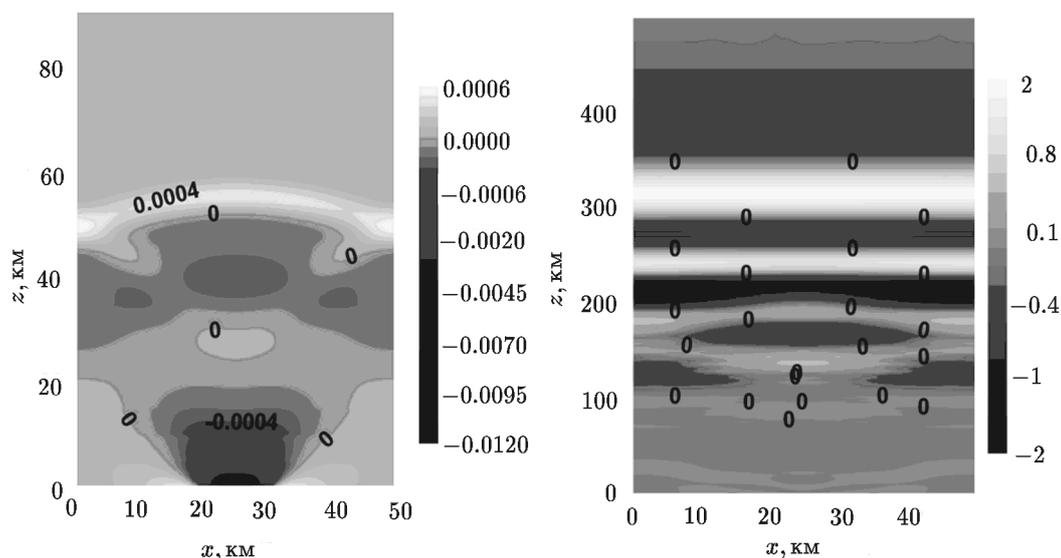
Предполагая волновой источник локализованным в окрестности точки измерения  $(x_0, y_0)$ , мы берем поверхностное давление в виде

$$\Delta P(x, y, z = 0, t) = \exp\left(-\frac{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)}{l^2}\right) f(t),$$

где  $l = 2$  км — ширина источника. Другие нижние граничные условия те же, что в п. 2.5.

Смоделированное поле температурных возмущений для  $t = 3$  мин показана в левой части рис. 6. На рисунке можно увидеть акустические волны с амплитудой, увеличивающейся с высотой, распространяющиеся от источника. Малость амплитуды объясняется сравнительно спокойными метеорологическими условиями в районе станции и тем, что наблюдаемые вариации атмосферного давления медленные и в основном возбуждают внутренние гравитационные волны. Групповая скорость распространения внутренних гравитационных волн мала по сравнению со скоростью звука, и поэтому наибольшая амплитуда атмосферного возмущения наблюдается вблизи источника. В правой части рис. 6 показан фрагмент возмущения поля температур волной, распространяющейся

от того же источника при  $t \approx 13$  мин. Этого времени достаточно для формирования внутренних гравитационных волн недалеко от источника, и мы видим четкие лепестки, исходящие от источника. Это характерная картина внутренних гравитационных волн, распространяющихся от локального источника.



**Рис. 6.** Температурное возмущение ( $^{\circ}\text{K}$ ) вследствие распространения АГВ от наблюдаемых вариаций давления, показанных на рис. 5 при  $t = 3$  мин (слева) и  $t = 13$  мин (справа)

### 3. Заключение

В работе поставлена и исследована задача о распространении акустико-гравитационных волн от переменного давления, заданного на поверхности Земли. Проведено сравнение численных результатов с аналитическими решениями линейной теории АГВ.

Математическое исследование показало, что решение задачи о распространении акустико-гравитационных волн от вариаций плотности и температуры на поверхности Земли однозначно определяется переменным давлением на поверхности Земли, но не зависит от деталей задания температуры и плотности. Численно смоделированные акустические и внутренние гравитационные волны, возбуждаемые гармоническими вариациями давления, подтвердили теоретические результаты.

Задача о распространении волн малой амплитуды от гармонического источника, заданного на нижней границе, может быть решена аналитически в случае изотермической атмосферы. Мы сравнили численные решения с аналитическими и продемонстрировали хорошее согласие численных решений с аналитическими.

Разумное согласие параметров волн, вычисленных с помощью численного моделирования, с аналитическими решениями можно рассматривать как свидетельство адекватного описания волновых процессов нелинейной численной моделью.

Показан пример численного решения задачи о распространении волн от локального граничного источника вариаций атмосферного давления.

Развитые методы и программа могут быть полезны для решения задач о вертикальном распространении волн в атмосфере от вариаций атмосферного давления и для рас-

чета воздействия этих волн на среднюю и высокую атмосферу и на ионосферу.

Численные расчеты выполнены на суперкомпьютерах БФУ им. Канта и “Ломоносов” МГУ.

## Литература

1. **Gossard E.E., Hooke W.H.** Waves in the Atmosphere. — Amsterdam-Oxford-New York: Elsevier Sci. Publ. Co., 1975.
2. **Beer T.** Atmospheric Waves. — London: Adam Hilder, 1974.
3. **Григорьев Г.И.** Акустико-гравитационные волны в атмосфере Земли // Известия ВУЗов. Радиофизика. — 1999. — Т. 17, № 1. — С. 3–23.
4. **Fritts D.C., Alexander M.J.** Gravity wave dynamics and effects in the middle atmosphere // Rev. Geophys. — 2003. — Vol. 41. — P. 1003. — (Doi: 10.1029/2001RG000106).
5. **Fritts D.C., Vadas S. L, Wan K., and Werne J.A.** Mean and variable forcing of the middle atmosphere by gravity waves // J. Atmos. Sol.-Terr. Phys. — 2006. — Vol. 68. — P. 247–265.
6. **Plougonven R., Snyder Ch.** Inertial gravity waves spontaneously generated by jets and fronts. Part I: different baroclinic life cycles // J. of the Atmospheric Sciences. — 2007. — Vol. 64. — P. 2502–2520.
7. **Plougonven R., Zhang F.** Internal gravity waves from atmospheric jets and fronts // Rev. Geophys. — 2014. — Vol. 52. — P. 33–76. — (Doi: 10.1002/2012RG000419).
8. **Medvedev A.S., Gavrilov N.M.** The nonlinear mechanism of gravity wave generation by meteorological motions in the atmosphere // J. Atmos. Terr. Phys. — 1995. — Vol. 57. — P. 1221–1231.
9. **Blanc E., Farges T., Le Pichon A., and Heinrich P.** Ten year observations of gravity waves from thunderstorms in western Africa // J. of Geophysical Research: Atmospheres. — 2014. — Vol. 119. — P. 6409–6418. — (Doi: 10.1002/2013JD020499).
10. **Pierce A.D., Coroniti S.C.** A mechanism for the generation of acoustic-gravity waves during thunder-storm formation // Nature. — 1966. — Vol. 210. — P. 1209–1210. — (Doi: 10.1038/2101209a0).
11. **Balachandran N.K.** Gravity waves from thunderstorms // Monthly weather review. — 1980. — Vol. 108. — P. 804–816.
12. **Alexander M., May P., and Beres J.** Gravity waves generated by convection in the Darwin area during the Darwin Area Wave Experiment // J. of Geophysical Research. — 2004. — Vol. 109, № D20S04. — P. 1–11.
13. **Miller D.V.** Thunderstorm induced gravity waves as a potential hazard to commercial aircraft // Presented at the American Meteorological Society 79th Annual conference, Windham Anatole Hotel, Dallas, TX, January 10-15. — Dallas: American Meteorological Society, 1999.
14. **Fovell R., Durran D., and Holton J.R.** Numerical simulation of convectively generated stratospheric gravity waves // J. of the Atmospheric Sciences. — 1992. — Vol. 49, № 16. — P. 1427–1442.
15. **Gavrilov N.M., Yudin V.A.** Model for coefficients of turbulence and effective Prandtl number produced by breaking gravity waves in the upper atmosphere // J. of Geophysical Research. — 1992. — Vol. 97. — P. 7619–7624. — (Doi: 10.1029/92JD00185).
16. **Gavrilov N.M., Fukao S.** A comparison of seasonal variations of gravity wave intensity observed by the MU radar with a theoretical model // J. of the Atmospheric Sciences. — 1999. — Vol. 56. — P. 3485–3494. — (Doi: 10.1175/1520-0469(1999)056<3485:ACOSVO>2.0.CO;2).

17. **Baker D., Schubert G.** Convectively generated internal gravity waves in the lower atmosphere of Venus. Part II: mean wind shear and wave-mean flow interaction // *J. of the Atmospheric Sciences*. — 2000. — Vol. 57. — P. 200–215.
18. **Fritts D.C., Garten J.F.** Wave breaking and transition to turbulence in stratified shear flows // *J. of the Atmospheric Sciences*. — 1996. — Vol. 53. — P. 1057–1085.
19. **Andreassen O., Hvidsten O., Fritts D., and Arendt S.** Vorticity dynamics in a breaking internal gravity wave. Part 1. Initial instability evolution // *J. Fluid. Mech.* — 1998. — Vol. 367. — P. 27–46.
20. **Yu Y., Hickey M.P., and Liu Y.** A numerical model characterizing internal gravity wave propagation into the upper atmosphere // *Adv. Space Res.* — 2009. — Vol. 44. — P. 836–46. — (Doi: 10.1016/j.asr.2009.05.014).
21. **Liu X., Xu J., Liu H.L., and Ma R.** Nonlinear interactions between gravity waves with different wavelengths and diurnal tide // *J. of Geophysical Research*. — 2008. — Vol. 113, № D08112. — (Doi: 10.1029/2007JD009136).
22. **Liu H.L., Foster B.T., Hagan M.E., McInerney J.M., Maute A., Qian L., Richmond A.D., Roble R.G., Solomon S.C., Garcia R.R., Kinnison D., Marsh D.R., Smith A.K., Richter J., Sassi F., and Oberheide J.** Thermosphere extension of the whole atmosphere community climate model // *J. of Geophysical Research*. — 2010. — Vol. 115, № A12302. — (Doi: 10.1029/2010JA015586).
23. **Gavrilov N.M., Kshevetskii S.P.** Numerical modeling of propagation of breaking nonlinear acoustic-gravity waves from the lower to the upper atmosphere // *Adv. Space Res.* — 2013. — Vol. 51. — P. 1168–1174. — (Doi: 10.1016/j.asr.2012.10.023).
24. **Gavrilov N.M., Kshevetskii S.P.** Numerical modeling of the propagation of nonlinear acoustic-gravity waves in the middle and upper atmosphere // *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. — 2014. — Vol. 50, iss. 1. — P. 66–72. — (Doi: 10.1134/S0001433813050046).
25. **Kshevetskii S.P., Kulichkov S.N.** Effects that internal gravity waves from convective clouds have on atmospheric pressure and spatial temperature-disturbance distribution // *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. — 2015. — Vol. 51, № 1. — P. 42–48. — (Doi: 10.1134/S0001433815010065).
26. **Karpov I.V., Kshevetskii S.P.** Formation of large-scale disturbances in the upper atmosphere caused by acoustic gravity wave sources on the earth's surface // *Geomagnetism and Aeronomy*. — 2014. — Vol. 54, № 4. — P. 553–562. — (Doi: 10.1134/S0016793214040173).
27. **Jonson R.H., Young G.S.** Heat and moisture budgets of tropical mesoscale anvil clouds // *J. of the Atmospheric Sciences*. — 1983. — Vol. 80. — P. 2138–2147.
28. **Sao Sabbas F.T., Rampinelli V.T., and Santiago J.** Characteristics of sprite and gravity wave convective sources present in satellite IR images during the SpreadFEx 2005 in Brazil // *Ann. Geophys.* — 2009. — Vol. 27. — P. 1279–1293.
29. **Ермаков В.И., Стожков Ю.И.** Физика грозových облаков. — М.: ФИАН, 2004.
30. **Lehmiller G.S., Bluestein H.B., Neiman P.J., Ralf F.M., and Feltz F.W.** Wind structure in a supercell thunder storm as a measured by a UHF wind profiler // *Mon. Weather Rev.* — 2001. — Vol. 129. — P. 1968–1986.
31. **Gavrilov N.M., Kshevetskii S.P., and Koval A.V.** Verifications of the high-resolution numerical model and polarization relations of atmospheric acoustic-gravity wave // *Geosci. Model Dev.* — 2015. — Vol. 8. — P. 1831–1838. — (Doi: 10.5194/gmd-8-1831-2015).
32. “AtmoSym” model of atmospheric processes. — 2016. — <http://atmos.kantiana.ru>.
33. **Picone J.M., Hedin A.E., Drob D.P., and Aikin A.C.** NRL-MSISE-00 empirical model of the atmosphere: statistical comparisons and scientific issues // *J. of Geophysical Research*. — 2002. — Vol. 107, № A12. — (Doi: 10.1029/2002JA009430).

34. **Banks P.M., Kockarts G.** Aeronomy. Part B.— New York: Elsevier, 1973.
35. **Gavrilov N.M., Kshevetskii S.P.** Three-dimensional numerical simulation of nonlinear acoustic-gravity wave propagation from the troposphere to the thermosphere // *Earth Planets Space*. — 2014. — Vol. 66, № 88. — (Doi: 10.1186/1880-5981-66-88).
36. **Gavrilov N.M.** Estimates of turbulent diffusivities and energy dissipation rates from satellite measurements of spectra of stratospheric refractivity perturbations // *Atmos. Chem. Phys.* — 2013. — Vol. 13. — P. 12107–12116. — (Doi: 10.5194/acp-13-12107-2013).
37. **Lax P.D., Wendroff B.** Hyperbolic systems of conservation laws // *Comm. Pure Appl. Math.* — 1960. — Vol. 13. — P. 217–237.
38. **Gavrilov N.M., Kshevetskii S.P.** Dynamical and thermal effects of nonsteady nonlinear acoustic-gravity waves propagating from tropospheric sources to the upper atmosphere // *Adv. Space Res.* — 2015. — Vol. 55. — (Doi: 10.1016/j.asr.2015.01.033).
39. **Kshevetskii S.P.** Modelling of propagation of internal gravity waves in gases // *Comp. Math. Math. Phys.* — 2001. — Vol. 41. — P. 295–310.
40. **Kshevetskii S.P.** Internal gravity waves in nonexponentially density-stratified fluids // *Comp. Math. Math. Phys.* — 2002. — Vol. 42, № 10. — P. 1510–1521.

*Поступила в редакцию 20 марта 2017 г.,  
в окончательном варианте 17 июня 2017 г.*

### Литература в транслитерации

1. **Gossard E.E., Hooke W.H.** Waves in the Atmosphere. — Amsterdam-Oxford-New York: Elsevier Sci. Publ. Co., 1975.
2. **Beer T.** Atmospheric Waves. — London: Adam Hilder, 1974.
3. **Grigor'ev G.I.** Akustiko-gravitatsionnye volny v atmosfere Zemli // *Izvestiya VUZov. Radiofizika*. — 1999. — Т. 17, № 1. — С. 3–23.
4. **Fritts D.C., Alexander M.J.** Gravity wave dynamics and effects in the middle atmosphere // *Rev. Geophys.* — 2003. — Vol. 41. — P. 1003. — (Doi: 10.1029/2001RG000106).
5. **Fritts D.C., Vadas S. L, Wan K., and Werne J.A.** Mean and variable forcing of the middle atmosphere by gravity waves // *J. Atmos. Sol.-Terr. Phys.* — 2006. — Vol. 68. — P. 247–265.
6. **Ploogonven R., Snyder Ch.** Inertial gravity waves spontaneously generated by jets and fronts. Part I: different baroclinic life cycles // *J. of the Atmospheric Sciences*. — 2007. — Vol. 64. — P. 2502–2520.
7. **Plougonven R., Zhang F.** Internal gravity waves from atmospheric jets and fronts // *Rev. Geophys.* — 2014. — Vol. 52. — P. 33–76. — (Doi: 10.1002/2012RG000419).
8. **Medvedev A.S., Gavrilov N.M.** The nonlinear mechanism of gravity wave generation by meteorological motions in the atmosphere // *J. Atmos. Terr. Phys.* — 1995. — Vol. 57. — P. 1221–1231.
9. **Blanc E., Farges T., Le Pichon A., and Heinrich P.** Ten year observations of gravity waves from thunderstorms in western Africa // *J. of Geophysical Research: Atmospheres*. — 2014. — Vol. 119. — P. 6409–6418. — (Doi: 10.1002/2013JD020499).
10. **Pierce A.D., Coroniti S.C.** A mechanism for the generation of acoustic-gravity waves during thunder-storm formation // *Nature*. — 1966. — Vol. 210. — P. 1209–1210. — (Doi: 10.1038/2101209a0).
11. **Balachandran N.K.** Gravity waves from thunderstorms // *Monthly weather review*. — 1980. — Vol. 108. — P. 804–816.

12. **Alexander M., May P., and Beres J.** Gravity waves generated by convection in the Darwin area during the Darwin Area Wave Experiment // *J. of Geophysical Research.* — 2004. — Vol. 109, № D20S04. — P. 1–11.
13. **Miller D.V.** Thunderstorm induced gravity waves as a potential hazard to commercial aircraft // Presented at the American Meteorological Society 79th Annual conference, Windham Anatole Hotel, Dallas, TX, January 10-15. — Dallas: American Meteorological Society, 1999.
14. **Fovell R., Durran D., and Holton J.R.** Numerical simulation of convectively generated stratospheric gravity waves // *J. of the Atmospheric Sciences.* — 1992. — Vol. 49, № 16. — P. 1427–1442.
15. **Gavrilov N.M., Yudin V.A.** Model for coefficients of turbulence and effective Prandtl number produced by breaking gravity waves in the upper atmosphere // *J. of Geophysical Research.* — 1992. — Vol. 97. — P. 7619–7624. — (Doi: 10.1029/92JD00185).
16. **Gavrilov N.M., Fukao S.** A comparison of seasonal variations of gravity wave intensity observed by the MU radar with a theoretical model // *J. of the Atmospheric Sciences.* — 1999. — Vol. 56. — P. 3485–3494. — (Doi: 10.1175/1520-0469(1999)056<3485:ACOSVO>2.0.CO;2).
17. **Baker D., Schubert G.** Convectively generated internal gravity waves in the lower atmosphere of Venus. Part II: mean wind shear and wave-mean flow interaction // *J. of the Atmospheric Sciences.* — 2000. — Vol. 57. — P. 200–215.
18. **Fritts D.C., Garten J.F.** Wave breaking and transition to turbulence in stratified shear flows // *J. of the Atmospheric Sciences.* — 1996. — Vol. 53. — P. 1057–1085.
19. **Andreassen O., Hvidsten O., Fritts D., and Arendt S.** Vorticity dynamics in a breaking internal gravity wave. Part 1. Initial instability evolution // *J. Fluid. Mech.* — 1998. — Vol. 367. — P. 27–46.
20. **Yu Y., Hickey M.P., and Liu Y.** A numerical model characterizing internal gravity wave propagation into the upper atmosphere // *Adv. Space Res.* — 2009. — Vol. 44. — P. 836–46. — (Doi: 10.1016/j.asr.2009.05.014).
21. **Liu X., Xu J., Liu H.L., and Ma R.** Nonlinear interactions between gravity waves with different wavelengths and diurnal tide // *J. of Geophysical Research.* — 2008. — Vol. 113, № D08112. — (Doi: 10.1029/2007JD009136).
22. **Liu H.L., Foster B.T., Hagan M.E., McInerney J.M., Maute A., Qian L., Richmond A.D., Roble R.G., Solomon S.C., Garcia R.R., Kinnison D., Marsh D.R., Smith A.K., Richter J., Sassi F., and Oberheide J.** Thermosphere extension of the whole atmosphere community climate model // *J. of Geophysical Research.* — 2010. — Vol. 115, № A12302. — (Doi: 10.1029/2010JA015586).
23. **Gavrilov N.M., Kshevetskii S.P.** Numerical modeling of propagation of breaking nonlinear acoustic-gravity waves from the lower to the upper atmosphere // *Adv. Space Res.* — 2013. — Vol. 51. — P. 1168–1174. — (Doi: 10.1016/j.asr.2012.10.023).
24. **Gavrilov N.M., Kshevetskii S.P.** Numerical modeling of the propagation of nonlinear acoustic-gravity waves in the middle and upper atmosphere // *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics.* — 2014. — Vol. 50, iss. 1. — P. 66–72. — (Doi: 10.1134/S0001433813050046).
25. **Kshevetskii S.P., Kulichkov S.N.** Effects that internal gravity waves from convective clouds have on atmospheric pressure and spatial temperature-disturbance distribution // *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics.* — 2015. — Vol. 51, № 1. — P. 42–48. — (Doi: 10.1134/S0001433815010065).
26. **Karpov I.V., Kshevetskii S.P.** Formation of large-scale disturbances in the upper atmosphere caused by acoustic gravity wave sources on the earth's surface // *Geomagnetism and Aeronomy.* — 2014. — Vol. 54, № 4. — P. 553–562. — (Doi: 10.1134/S0016793214040173).
27. **Jonson R.H., Young G.S.** Heat and moisture budgets of tropical mesoscale anvil clouds // *J. of the Atmospheric Sciences.* — 1983. — Vol. 80. — P. 2138–2147.

28. **Sao Sabbas F.T., Rampinelli V.T., and Santiago J.** Characteristics of sprite and gravity wave convective sources present in satellite IR images during the SpreadFEx 2005 in Brazil // *Ann. Geophys.*— 2009.— Vol. 27.— P. 1279–1293.
29. **Ermakov V.I., Stozhkov Yu.I.** *Fizika grozovyh oblakov.*— M.: FIAN, 2004.
30. **Lehmiller G.S., Bluestein H.B., Neiman P.J., Ralf F.M., and Feltz F.W.** Wind structure in a supercell thunder storm as a measured by a UHF wind profiler // *Mon. Weather Rev.*— 2001.— Vol. 129.— P. 1968–1986.
31. **Gavrilov N.M., Kshevetskii S.P., and Koval A.V.** Verifications of the high-resolution numerical model and polarization relations of atmospheric acoustic-gravity wave // *Geosci. Model Dev.*— 2015.— Vol. 8.— P. 1831–1838.— (Doi: 10.5194/gmd-8-1831-2015).
32. “AtmoSym” model of atmospheric processes.— 2016.— <http://atmos.kantiana.ru>.
33. **Picone J.M., Hedin A.E., Drob D.P., and Aikin A.C.** NRL-MSISE-00 empirical model of the atmosphere: statistical comparisons and scientific issues // *J. of Geophysical Research.*— 2002.— Vol. 107, № A12.— (Doi: 10.1029/2002JA009430).
34. **Banks P.M., Kockarts G.** *Aeronomy. Part B.*— New York: Elsevier, 1973.
35. **Gavrilov N.M., Kshevetskii S.P.** Three-dimensional numerical simulation of nonlinear acoustic-gravity wave propagation from the troposphere to the thermosphere // *Earth Planets Space.*— 2014.— Vol. 66, № 88.— (Doi: 10.1186/1880-5981-66-88).
36. **Gavrilov N.M.** Estimates of turbulent diffusivities and energy dissipation rates from satellite measurements of spectra of stratospheric refractivity perturbations // *Atmos. Chem. Phys.*— 2013.— Vol. 13.— P. 12107–12116.— (Doi: 10.5194/acp-13-12107-2013).
37. **Lax P.D., Wendroff B.** Hyperbolic systems of conservation laws // *Comm. Pure Appl. Math.*— 1960.— Vol. 13.— P. 217–237.
38. **Gavrilov N.M., Kshevetskii S.P.** Dynamical and thermal effects of nonsteady nonlinear acoustic-gravity waves propagating from tropospheric sources to the upper atmosphere // *Adv. Space Res.*— 2015.— Vol. 55.— (Doi: 10.1016/j.asr.2015.01.033).
39. **Kshevetskii S.P.** Modelling of propagation of internal gravity waves in gases // *Comp. Math. Math. Phys.*— 2001.— Vol. 41.— P. 295–310.
40. **Kshevetskii S.P.** Internal gravity waves in nonexponentially density-stratified fluids // *Comp. Math. Math. Phys.*— 2002.— Vol. 42, № 10.— P. 1510–1521.