Теплофизика и аэромеханика, 2022, том 29, № 2

УДК 532.5.032

Переходное течение Тейлора–Дина в композитном кольцевом пространстве, частично заполненном пористым материалом

Б.К. Джа, Т.С. Юсуф

Университет Ахмаду Белло, Зария, Нигерия

E-mail: basant777@yahoo.co.uk; taiyeee@yahoo.com

Проведено полуаналитическое исследование нестационарного течения Тейлора–Дина в кольцевом пространстве внутри двух концентрических цилиндров, частично заполненных пористым материалом. В данной модели круговой поток создается в результате азимутального градиента давления, а также вращения двух концентрических цилиндров. Уравнение, определяющее поток, обезразмеривается и преобразуется в обыкновенное дифференциальное уравнение с использованием хорошо известной техники преобразования Лапласа. Затем производится обращение преобразования Лапласа с использованием приближения суммы Римана (RSA). Для подтверждения результатов, полученных с использованием неявных конечных разностей (IFD), для стационарного течения в канале выполнено сравнение с точным решением задачи, полученным с помощью подхода RSA. Важно отметить, что управление силой поверхностного сопротивления осуществляется путем подбора подходящих значений параметра β.

Ключевые слова: круговой поток, число Дарси, композитное кольцевое пространство, поток Тейлора–Дина.

Введение

Течение жидкости во вращающемся кольцевом пространстве является одной из самых важных областей исследования механики жидкости из-за сложности процесса и обширного инженерного применения. Интерес к этим исследованиям обусловлен возможностью использования таких течений в различных областях машиностроения, где предусмотрены системы сепарации. Существенное внимание здесь уделяется изучению характеристик потоков во вращающихся системах. Проблемой осевого потока в различных геометрических формах, частично заполненных пористым материалом, занимались многие исследователи, но численных решений для полностью развитого напорного потока в концентрическом кольцевом пространстве, частично заполненном пористым материалом, представлено немного. Авторы [1] обнаружили, что критическая толщина пористого слоя, при которой значение числа Нуссельта достигает минимума, не возникает, если эффективная теплопроводность пористой среды, насыщенной жидкостью, больше, чем теплопроводность жидкости. Влияние подгоночного коэффициента в условиях скачка напряжения (β) в межфазной области между пористой средой и прозрачной жидкостью в канале изучалось в работе [2].

Глубокий анализ полностью развитого напорного потока в канале, частично заполненном пористым материалом, был выполнен в работе [3]. Также в исследовании [4] изучался полностью развитый ламинарный поток естественной конвекции в зазоре между двух соосных вертикальных цилиндров, частично заполненных пористым материалом, при различных постоянных температурах. Было отмечено, что скачок сдвигового напряжения оказывает значительное влияние на скорость жидкости на границе раздела фаз. В работе [5] рассматривалось зависящее от времени течение Куэтта в композитном канале, частично заполненном пористым материалом, с использованием подхода неявной конечной разности при получении решения для основных моделей. Аналогичное исследование было представлено для концентрического цилиндра, где поток жидкости управляется градиентом давления, приложенным в осевом направлении [6]. Результаты показали, что подгоночный коэффициент в условиях скачка напряжения (β) играет важную роль в формировании потока. В работе [7] было представлено обширное исследование «нестационарного естественного конвективного потока с выделением/поглощением тепла в кольцевом зазоре, частично заполненном пористым материалом». Было показано, что при течении среды с тепловыделением в кольцевом пространстве с постоянным тепловым потоком создаются условия для получения оптимального потока массы.

Авторы работы [7] указывали, что известно достаточно много аналитических исследований осциллирующих вследствие наложенного пульсирующего градиента давления течений в каналах различной формы. К ним относятся, например, исследования в параллельных пластинах [8], в круговой геометрии [9 – 11], в прямоугольных каналах [12, 13] и в эллиптической геометрии [14, 15], а также в кольцевой геометрии (см., например, [16]). Авторы [17] представили аналитическое решение уравнений движения ньютоновской жидкости для полностью развитого ламинарного потока между двумя концентрическими цилиндрами и пришли к выводу, что увеличение приведенной частоты вызывает уменьшение амплитуды скорости жидкости. В работе [18] был изучен случай цилиндра с пористой вставкой.

Исследование [19] было посвящено изучению влияния коэффициента β на установившееся течение в композитном канале, частично заполненном насыщенным пористым материалом. Обзор литературы показал, что Куэтт [20] был первым, кто исследовал течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя цилиндрами с одной осью в попытке измерить вязкость жидкости. Впоследствии появилась новаторская работа Тейлора [21], в которой рассматривалась гидродинамическая устойчивость потока между двумя вращающимися цилиндрами. В ней основное внимание уделялось существованию критических значений числа Рейнольдса, приводящих к гидродинамической неустойчивости.

В работе [22] изучалось воздействие пористой вставки на поток во вращающемся кольцевом пространстве с учетом двух критических составляющих скорости. Был сделан вывод, что поверхностное трение на стенке пропорционально параметру толщины пористой вставки ε. Авторы [23] исследовали влияние пористой стенки на гидромагнитный поток в кольцевом зазоре, вызванный однородным магнитным полем. Было показано, что для достижения желаемого охлаждающего эффекта требуются подходящая пористая вставка и магнитное поле.

В работе [24] был представлен «теоретический и экспериментальный обзор для изучения поля течения, возникающего из стержневого микроротора, вращающегося вокруг своего центра неосесимметричным образом». И был сделан вывод, что «эти результаты открывают путь для обсуждения возможного радиального переноса в микрофлюидных устройствах». Авторы [25] представили численное исследование влияния колебаний потока на реакцию пламени в осесимметричной структуре. Согласно их выводам, «наблюдается, что вихревые колебания могут действовать как основной источник возмущений тепловыделения пламени из-за азимутального и радиального наклона вихревых трубок в пограничных слоях смесительного канала и при расширении в камеру сгорания».

Используя метод конечных разностей, авторы [26] численно исследовали влияние магнитной гидродинамики (МГД) на вращающийся поток микрополярной жидкости со свободной поверхностью в цилиндре с пористой стенкой и обнаружили, что влияние магнитного поля в радиальном направлении превосходит воздействие аксиального магнитного поля. В работе [27] было проанализировано, как пористый слой, закрепленный на внешнем цилиндре конфигурации Тейлора – Куэтта, влияет на устойчивость потока и выявлено стабилизирующее действие пористой вставки.

Авторы [28] исследовали влияние однородного пористого слоя на течения Тейлора–Куэтта в концентрических кольцевых трубах с конечным соотношением сторон, включая неньютоновские жидкости. Анализ показал, что пористая стенка оказывает стабилизирующий эффект независимо от рассматриваемой жидкости. Подобные исследования проводились также в работах [29 – 34].

Однако обзор работ, приведенный выше, показал, что переходное течение Тейлора–Дина в композитном кольцевом пространстве должным образом не рассматривается, и, насколько известно авторам, этот вопрос до сих пор не изучался. Таким образом, представленное полуаналитическое исследование основано на знаниях о переходном течении Тейлора – Дина в составном кольцевом пространстве, частично заполненном пористым материалом. Новизна данной работы заключается в исследовании влияния вращения двух концентрических цилиндров на поток в зазоре между ними, частично заполненном пористым материалом. Унифицированная модель, описывающая течение жидкости, частично решается с использованием метода преобразования Лапласа, а затем используется подход RSA для получения числовых значений во временной области.

1. Математическая модель

Рассматривается нестационарный, полностью развитый и несжимаемый азимутальный поток в двух соосно вращающихся цилиндрах, заполненных прозрачной жидкостью и однородным пористым слоем, имеющими проницаемую тонкую границу раздела. Предполагается, что жидкость занимает интервал $d' \le r' \le r_0$, в то время как интервал $r_i \le r' \le d'$ заполнен пористым материалом с равномерной проницаемостью, насыщенным жидкостью. Радиусы внутреннего и внешнего цилиндров соответственно задаются как r_i и r_0 (см. рис. 1). Движению жидкости способствуют азимутальный градиент давления и круговое движение соединенных цилиндров. По аналогии с исследованием, представленным авторами [17], размерные математические уравнения, используемые в настоящей работе, могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{\partial u'_{\mathrm{p}}}{\partial t'} = \nu_{\mathrm{eff}}\left[\frac{\partial^2 u'_{\mathrm{p}}}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'}\frac{\partial u'_{\mathrm{p}}}{\partial r'} - \frac{u'_{\mathrm{p}}}{r'^2}\right] - \frac{\nu}{k'}u'_{\mathrm{p}} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta}\frac{1}{r'} \quad \text{для} \quad r_i \le r' \le d', \tag{1}$$

$$\frac{\partial u'_{\mathrm{f}}}{\partial t'} = \nu\left[\frac{\partial^2 u'_{\mathrm{f}}}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'}\frac{\partial u'_{\mathrm{f}}}{\partial r'} - \frac{u'_{\mathrm{f}}}{r'^2}\right] - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta}\frac{1}{r'} \quad \text{для} \quad d' \le r' \le r_0. \tag{2}$$

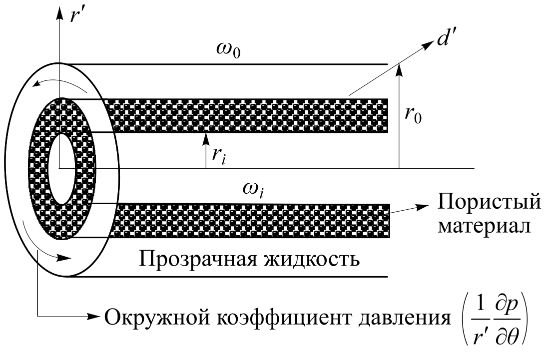

Рис. 1. Схема конфигурации потока и системы координат.

Начальное и граничное условия для моделей, представленных выше, запишутся как

$$t' \le 0: \; u'_{\mathrm{p}} = u'_{\mathrm{f}} = 0 \quad \text{для} \quad r_i \le r' \le r_0,$$

$$t' > 0: \begin{bmatrix} u'_{\mathrm{p}} = r_i\omega_i & \text{при} \quad r' = r_i \\ u'_{\mathrm{f}} = r_0\omega_0 & \text{при} \quad r' = r_0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Условие на границе раздела, задается в виде

$$t' > 0: \begin{bmatrix} u'_{\mathrm{p}} = u'_{\mathrm{f}} = u'_i \\ \nu_{\mathrm{eff}}\left[\dfrac{\partial u'_{\mathrm{p}}}{\partial r'} - \dfrac{u'_{\mathrm{p}}}{r'}\right] - \nu\left[\dfrac{\partial u'_{\mathrm{f}}}{r'} - \dfrac{u'_{\mathrm{f}}}{r'}\right] = \dfrac{\beta\nu}{\sqrt{k'}}u'_p \end{bmatrix} \quad \text{при} \quad r' = d'.$$

Используем следующие величины в уравнениях (1) – (3):

$$R = \frac{r'}{r_i}, \quad t = \frac{\nu t'}{r_i^2}, \quad \gamma = \frac{\nu_{\mathrm{eff}}}{\nu}, \quad \mathrm{Da} = \frac{r_i^2}{k'}, \quad U_{\mathrm{p}} = U_{\mathrm{f}} = \frac{\left(u'_{\mathrm{p}}; u'_{\mathrm{f}}\right)}{r_i\,\omega_i},$$

$$P = -\frac{1}{\rho\nu\omega_i}\cdot\frac{\partial p}{\partial\theta}, \quad d = \frac{d'}{r_i}, \quad \lambda = \frac{r_0}{r_i}, \quad U_i = \frac{u'_i}{U_0}, \quad \omega = \frac{\omega_0}{\omega_i}. \tag{4}$$

Уравнения (1) и (2) в безразмерной форме могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{\partial U_{\mathrm{p}}}{\partial t} = \gamma\left[\frac{\partial^2 U_{\mathrm{p}}}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial U_{\mathrm{p}}}{\partial R} - \frac{U_{\mathrm{p}}}{R^2}\right] - \frac{U_{\mathrm{p}}}{\mathrm{Da}} + \frac{P}{R} \quad \text{для} \quad 1 \le R \le d, \tag{5}$$

$$\frac{\partial U_{\mathrm{f}}}{\partial t} = \gamma\left[\frac{\partial^2 U_{\mathrm{f}}}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial U_{\mathrm{f}}}{\partial R} - \frac{U_{\mathrm{f}}}{R^2}\right] - \frac{U_{\mathrm{f}}}{\mathrm{Da}} + \frac{P}{R} \quad \text{для} \quad d \le R \le \lambda. \tag{6}$$

Эти уравнения решаются при соблюдении следующих безразмерных начальных и граничных условий:

$$t \le 0: U_{\mathrm{p}} = U_{\mathrm{f}} = 0 \;\; \text{для} \;\; 1 \le R \le \lambda,$$

$$t > 0: \begin{bmatrix} U_{\mathrm{p}} = 1 & \text{при} \quad R = 1 \\ U_{\mathrm{f}} = \omega\lambda & \text{при} \quad R = \lambda \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Условия безразмерности на границе раздела задаются как

$$t>0:\left[\begin{array}{l} U_{\mathrm{p}}=U_{\mathrm{f}}=U_i \\ \gamma\left[\dfrac{\partial U_{\mathrm{p}}}{\partial R}-\dfrac{U_{\mathrm{p}}}{R}\right]-\left[\dfrac{\partial U_{\mathrm{f}}}{\partial R}-\dfrac{U_{\mathrm{f}}}{R}\right]=\dfrac{\beta}{\sqrt{\mathrm{Da}}}U_{\mathrm{p}} \end{array}\right] \text{ при } R=d.$$

Уравнения (5) – (7) преобразуются с использованием метода преобразования Лапласа $\bar{U}_{\mathrm{p}}(R,\eta)=\int\limits_0^\infty U_{\mathrm{p}}(R,t)\mathrm{e}^{-\eta t}dt$ *и* $\bar{U}_{\mathrm{f}}(R,\eta)=\int\limits_0^\infty U_{\mathrm{f}}(R,t)\mathrm{e}^{-\eta t}dt$ (где $\eta>0$ — параметр Лапласа) при соблюдении начальных условий. С помощью этого преобразования получаем:

$$\frac{d^2\bar{U}_{\mathrm{p}}}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{d\bar{U}_{\mathrm{p}}}{dR}-\frac{\bar{U}_{\mathrm{p}}}{R^2}-\frac{1}{\gamma}\left[\frac{1}{\mathrm{Da}}+\gamma\right]\bar{U}_{\mathrm{p}}=-\frac{P}{\gamma\eta R}, \tag{8}$$

$$\frac{d^2\bar{U}_{\mathrm{f}}}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{d\bar{U}_{\mathrm{f}}}{dR}-\frac{\bar{U}_{\mathrm{f}}}{R^2}-\eta\bar{U}_{\mathrm{f}}=-\frac{P}{\eta R}. \tag{9}$$

Граничные условия принимают вид:

$$t>0:\left[\begin{array}{lll} \bar{U}_{\mathrm{p}}=1/\eta & \text{при} & R=1 \\ \bar{U}_{\mathrm{f}}=\lambda\omega/\eta & \text{при} & R=\lambda \end{array}\right]. \tag{10}$$

При этом условие на границе раздела жидкость – пористая среда задается формулой

$$t>0:\left[\begin{array}{l} \bar{U}_{\mathrm{p}}=\bar{U}_{\mathrm{f}}=U_i \\ \gamma\left[\dfrac{\partial\bar{U}_{\mathrm{p}}}{\partial R}-\dfrac{\bar{U}_{\mathrm{p}}}{R}\right]-\left[\dfrac{\partial\bar{U}_{\mathrm{f}}}{\partial R}-\dfrac{\bar{U}_{\mathrm{f}}}{R}\right]=\dfrac{\beta}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\bar{U}_{\mathrm{p}} \end{array}\right] \text{ при } R=d.$$

Преобразовав уравнения (8) и (9) с помощью выражений

$$\bar{U}_{\mathrm{p}}=\bar{U}_{\mathrm{p}h}+\frac{P}{\eta\left(1/\mathrm{Da}+\eta\right)R} \quad \text{и} \quad \bar{U}_{\mathrm{f}}=\bar{U}_{\mathrm{f}h}+\frac{P}{\eta^2 R}, \tag{11}$$

решаем их затем с использованием модифицированной функции Бесселя в области Лапласа, задаваемой уравнениями

$$\bar{U}_{\mathrm{p}}=C_1I_1(\delta R)+C_2K_1(\delta R)+\frac{P}{\eta\left((1/\mathrm{Da})+\eta\right)R}, \tag{12}$$

$$\bar{U}_{\mathrm{f}}=C_3I_1\left(\sqrt{\eta}R\right)+C_4K_1\left(\sqrt{\eta}R\right)+\frac{P}{\eta^2R}, \tag{13}$$

где $\delta=\sqrt{\dfrac{1}{\gamma}\left(\dfrac{1}{\mathrm{Da}}+\eta\right)}$, I_n — это модифицированная функция Бесселя первого рода, а K_n — модифицированная функция Бесселя второго рода порядка n. Применяя далее (10) к (12) и (13), находим, что константы C_1, C_2, C_3, C_4, U_i задаются формулами

$$C_1=\frac{x_4}{x_1}-U_ix_5,\quad C_2=\frac{x_2}{x_1}+U_ix_2,\quad C_3=\frac{x_9}{x_6}-U_ix_{10},\quad C_4=\frac{x_7}{x_6}+U_ix_8,$$

$$U_i = \frac{\left(\dfrac{x_{11}x_4}{x_1} - \dfrac{x_{12}x_2}{x_1} - x_{12} + \dfrac{x_{15}x_7 - x_{14}x_9}{x_6} + x_{16}\right)}{\left(\beta/\sqrt{\mathrm{Da}} + x_{11}x_5 + x_{12}x_3 - x_{14}x_{10} - x_{15}x_8\right)},$$

где $x_1 = I_1(\delta)K_1(d\delta) - I_1(d\delta)K_1(\delta)$, $x_2 = \dfrac{P}{\eta\left(1/\mathrm{Da}+\eta\right)}\left[I_1(d\delta) - \dfrac{I_1(\delta)}{d}\right]$, $x_3 = \dfrac{I_1(\delta)}{x_1}$,

$$x_4 = \frac{K_1(d\delta)}{\eta} + \frac{P}{\eta\left(1/\mathrm{Da}+\eta\right)}\left[\frac{K_1(\delta)}{d} - K_1(d\delta)\right], \quad x_5 = \frac{K_1(\delta)}{x_1},$$

$$x_6 = I_1\left(\lambda\sqrt{\eta}\right)K_1\left(d\sqrt{\eta}\right) - I_1\left(d\sqrt{\eta}\right)K_1\left(\lambda\sqrt{\eta}\right), \quad x_7 = \frac{P}{\eta^2}\left[\frac{I_1\left(d\sqrt{\eta}\right)}{\lambda} - \frac{I_1\left(\lambda\sqrt{\eta}\right)}{d}\right] - \frac{\lambda\omega I_1\left(d\sqrt{\eta}\right)}{\eta},$$

$$x_8 = \frac{I_1\left(\lambda\sqrt{\eta}\right)}{x_6}, \quad x_9 = \frac{P}{\eta^2}\left[\frac{K_1\left(\lambda\sqrt{\eta}\right)}{d} - \frac{K_1\left(d\sqrt{\eta}\right)}{\lambda}\right] - \frac{\lambda\omega K_1\left(d\sqrt{\eta}\right)}{\eta}, \quad x_{10} = \frac{K_1\left(\lambda\sqrt{\eta}\right)}{x_6},$$

$$x_{11} = \gamma\delta I_2(d\delta), \quad x_{12} = \gamma\delta K_2(d\delta), \quad x_{13} = \frac{2\gamma P}{d^2\eta\left(1/\mathrm{Da}+\eta\right)}, \quad x_{14} = \sqrt{\eta}I_2\left(d\sqrt{\eta}\right),$$

$$x_{15} = \sqrt{\eta}K_2\left(d\sqrt{\eta}\right), \quad x_{16} = \frac{2P}{d^2\eta^2}.$$

1.1. *Поверхностное трение*

Касательное напряжение на внутреннем цилиндре (R = 1) в области Лапласа оценивается соотношением $R\dfrac{d}{dR}\left(\dfrac{\bar{U}_{\mathrm{p}}}{R}\right)\Bigg|_{R=1}$, а на внешнем цилиндре ($R = \lambda$) оно оценивается как $R\dfrac{d}{dR}\left(\dfrac{\bar{U}_{\mathrm{f}}}{R}\right)\Bigg|_{R=\lambda}$. Тогда эти величины задаются соответственно как

$$\bar{\tau}_1 = R\frac{d}{dR}\left(\frac{\bar{U}_{\mathrm{p}}}{R}\right)\Bigg|_{R=1} = \delta\left[C_1 I_2(\delta) - C_2 K_2(\delta) - \frac{2}{\delta\eta\left(1/\mathrm{Da}+\eta\right)}\right], \tag{15}$$

$$\bar{\tau}_\lambda = -R\frac{d}{dR}\left(\frac{\bar{U}_{\mathrm{f}}}{R}\right)\Bigg|_{R=\lambda} = \sqrt{\eta}\left[C_4 K_2\left(\sqrt{\eta}\lambda\right) - C_3 I_2\left(\sqrt{\eta}\lambda\right) + \frac{2}{\eta\lambda^2}\right]. \tag{16}$$

Обратное преобразование Лапласа к уравнениям (12) – (16) проводится для получения численного решения во временной области. Обзор литературы показывает, что известных аналитических средств обращения решений области Лапласа во временную область с использованием модифицированной функции Бесселя не существует. Исходя из этого, применим численную процедуру, используемую в работах [5] и [35], которая основана на приближении суммы Римана. В этой численной схеме функции в области Лапласа могут быть обращены во временную область:

$$Z(R,t)=\frac{e^{\varepsilon t}}{t}\left[\frac{1}{2}\bar{Z}(R,\varepsilon)+\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{M}\bar{Z}\left(R,\varepsilon+\frac{\mathrm{i}k\pi}{t}\right)(-1)^k\right],\quad 1\le R\le\lambda, \tag{17}$$

где $i=\sqrt{-1}$ и Re относятся к действительной части члена с суммированием. M — количество членов в приближении суммы Римана, а ε соответствует действительной части контура Бромвича, которая используется при обращении преобразований Лапласа. Точность этой численной схемы зависит от значений ε и M. Согласно [36], значение εt, которое наилучшим образом соответствует результату, равно 4,7.

1.2. *Верификация метода*

В данном разделе проверяется схема RSA, используемая для инвертирования уравнений (12) – (16). Для верификации метода авторы получили точное решение для стационарного течения, которое можно рассматривать как предельный случай нестационарного течения при большом значении t. В уравнениях (5) и (6) положим $\frac{\partial()}{\partial t}=0$, тогда получим

$$\frac{d^2U_\mathrm{p}}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{dU_\mathrm{p}}{dR}-\frac{U_\mathrm{p}}{R^2}-\frac{U_\mathrm{p}}{\gamma\mathrm{Da}}=-\frac{P}{\gamma R}, \tag{18}$$

$$\frac{d^2U_\mathrm{f}}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{dU_\mathrm{f}}{dR}-\frac{U_\mathrm{f}}{R^2}=-\frac{P}{R} \tag{19}$$

при соблюдении граничных условий

$$\begin{aligned} U_\mathrm{p}&=1 \quad \text{при}\quad R=1,\\ U_\mathrm{f}&=\omega\lambda \quad \text{при}\quad R=\lambda \end{aligned} \tag{20}$$

и при условии, задаваемом как

$$\begin{bmatrix} U_\mathrm{p}=U_f=U_i \\ \gamma\left[\frac{dU_\mathrm{p}}{dR}-\frac{U_\mathrm{p}}{R}\right]-\frac{dU_\mathrm{f}}{dR}-\frac{U_\mathrm{f}}{R}=\frac{\beta}{\sqrt{\mathrm{Da}}}U_\mathrm{p} \end{bmatrix} \text{при } R=d. \tag{21}$$

Точное решение (18) и (19) получается путем применения соответственно подходящего преобразования $U_\mathrm{p}=U_{\mathrm{p}h}+P\mathrm{Da}/R$ и $R=\mathrm{e}^{\xi}$. В результате получим

$$U_\mathrm{p}=C_5I_1(\xi R)+C_6K_1(\xi R)+\frac{P\mathrm{Da}}{R}, \tag{22}$$

$$U_\mathrm{p}=C_7R+\frac{C_8}{R}-\frac{Pr\ln(R)}{2}, \tag{23}$$

$$\xi=\frac{1}{\sqrt{\gamma\mathrm{Da}}}.$$

Применяя уравнения (20) и (21) к уравнениям (22) и (23), определим константы C_5, C_6, C_7, и C_8:

$$C_5=\frac{y_4}{y_1}+U_i\,y_5,\quad C_6=\frac{y_3}{y_1}-U_i\,y_2,\quad C_7=\frac{y_9}{y_6}+U_i\,y_{10},\quad C_8=\frac{y_7}{y_6}-U_iy_8,$$

где

$$U_i = \frac{\left(\dfrac{y_{11}y_4}{y_1} - \dfrac{y_{12}y_3}{y_1} + \dfrac{2y_7}{d^2 y_6} - x_{13}\right)}{\left(\dfrac{\beta}{\sqrt{\mathrm{Da}}} - y_{11}y_5 - y_{12}y_2 + \dfrac{2y_8}{d^2}\right)}. \tag{24}$$

Константы y_1, y_2, y_3, y_4, …, y_{12}, присутствующие в приведенных выше уравнениях, составляют

$$y_1 = I_1(d\zeta)K_1(\zeta) - I_1(\zeta)K_1(d\zeta), \quad y_2 = \frac{I_1(\zeta)}{y_1}, \quad y_3 = I_1(d\zeta)\left(1 - P\,\mathrm{Da}\right) + \frac{P\mathrm{Da}}{d} I_1(\zeta),$$

$$y_4 = K_1(d\zeta)\left(P\,\mathrm{Da} - 1\right) - \frac{P\mathrm{Da}}{d} K_1(\zeta), \quad y_5 = \frac{K_1(\zeta)}{y_1}, \quad y_6 = d^2 - \lambda^2,$$

$$y_7 = \omega\lambda^2 d^2 + \frac{P\lambda^2 d^2}{2}\ln\left(\lambda/d\right), \quad y_8 = \frac{\lambda^2 d}{y_6}, \quad y_9 = -\lambda^2\omega + \frac{P}{2}\left(d^2\ln(d) - \lambda^2\ln(\lambda)\right),$$

$$y_{10} = \frac{d}{y_6}, \quad y_{11} = \zeta I_2(d\zeta), \quad y_{12} = \zeta K_2(d\zeta), \quad y_{13} = \frac{2P\mathrm{Da}}{d^2}\sqrt{\frac{\gamma}{\mathrm{Da}}} - \frac{P}{2}.$$

Чтобы в дальнейшем установить точность схемы RSA, уравнения (5)–(8) снова решаются с использованием неявной конечно-разностной схемы. Важно отметить, что установлено хорошее согласование со значениями, полученными с помощью численной схемы, и со значениями, полученными с помощью аппроксимации суммы Римана на больших временах, а также с решением в замкнутой форме. Более того, значения, полученные с использованием неявного метода конечных разностей в переходном состоянии, в значительной степени согласуются со значениями, полученными с использованием приближения суммы Римана, когда время стремится к нулю (см. табл. 1 и 2).

3. Полученные результаты и обсуждение

Чтобы определить зависимость решения основного уравнения от различных входящих параметров, которые включают подгоночный коэффициент в условиях скачка напряжения (β), коэффициент вязкости (γ), время (t), число Дарси (Da), межфазное радиальное

Таблица 1

Численное значение установившейся скорости для различных значений R и Da (d = 1,5, β = 0,7, γ = 1, λ = 2, P = 0, ω = 1)

R	Da	Аппроксимация суммы Римана	Неявная конечная разность	Точное решение
1,2	10^{-1}	0,9702	0,9702	0,9703
	10^{-2}	0,1725	0,1726	0,1727
	10^{-3}	0,0017	0,0017	0,0017
1,4	10^{-1}	1,3434	1,3434	1,3433
	10^{-2}	0,3643	0,3643	0,3643
	10^{-3}	0,0174	0,0173	0,0173
1,6	10^{-1}	1,7565	1,7565	1,7564
	10^{-2}	1,1556	1,1556	1,1555
	10^{-3}	0,7485	0,7485	0,7485
1,8	10^{-1}	1,8732	1,8733	1,8734
	10^{-2}	1,5914	1,5913	1,5915
	10^{-3}	1,4003	1,4004	1,4005

Таблица 2

Численное значение установившейся скорости переходного состояния для различных значений t и Da ($\beta = 0{,}7$, $\gamma = 1$, $\lambda = 2$, $d = 1{,}5$, $P = 0$, $\omega = 1$, $R = 1{,}5$)

R	Da	Аппроксимация суммы Римана	Неявная конечная разность	Точное решение
0,08	10^{-1}	0,7015	0,7014	1,7027
	10^{-2}	0,5536	0,5536	0,9238
	10^{-3}	0,3152	0,3151	0,3961
0,2	10^{-1}	1,4114	1,4114	1,7027
	10^{-2}	0,8760	0,8761	0,9238
	10^{-3}	0,3932	0,3932	0,3961
0,4	10^{-1}	1,6698	1,6698	1,7027
	10^{-2}	0,9223	0,9223	0,9238
	10^{-3}	0,3962	0,3961	0,3961
0,6	10^{-1}	1,7026	1,7026	1,7027
	10^{-2}	0,9238	0,9238	0,9238
	10^{-3}	0,3962	0,3962	0,3961

расстояние (d), отношение радиусов (λ) и отношение угловой скорости (ω), обобщенное решение для прозрачной и для пористой областей преобразуется в код MATLAB и впоследствии используется для создания линейных графиков для распределения скорости жидкости и касательного напряжения на обеих поверхностях. Для подтверждения достоверности численного подхода, представленного в настоящем исследовании, приведены табл. 1 и 2. Профили скорости для двух значений градиента давления ($P = 0$ и $P = 10$) показаны соответственно на рис. 2*a* и 2*b*. Рис. 2*b* демонстрирует, что в дополнение к вращению цилиндров наличие сопротивления давления увеличивает круговой поток жидкости, в то время как при $P = 0$ (см. рис. 2*a*) движение жидкости вызывается

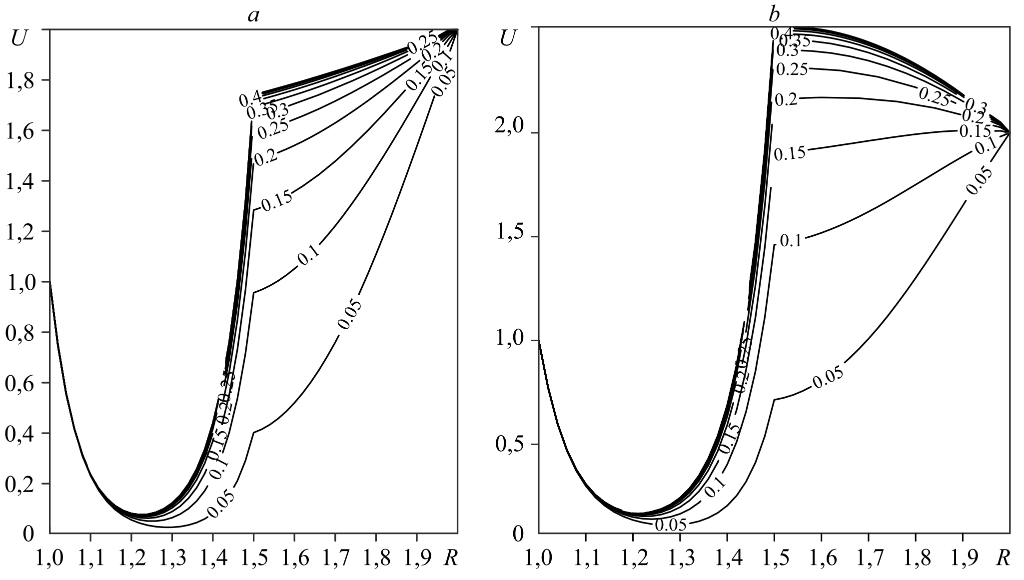

Рис. 2. Профили скорости при различных значениях t.

$P = 0$ (*a*), 10 (*b*); Da = 0,01, $\omega = 1$, $\beta = 0{,}7$, $\gamma = 0{,}5$, $d = 1{,}5$, $\lambda = 2$.

исключительно вращением цилиндров. На рис. 2*a* азимутальная скорость оказывается почти линейной на участке, занятом чистой жидкостью. Оба рисунка показывают, что азимутальная скорость увеличивается со временем t до достижения устойчивого состояния.

На рис. 3*a* – 3*d* представлены пространственные распределения профилей скорости для различных значений t и Da. На рис. 3*a* и 3*b* показано увеличение движения жидкости в области, заполненной пористым материалом, что может быть связано со значением числа Дарси, указанным на рисунках. В частности, значение Da = 1 (рис. 3*a*) свидетельствует, что количество пористого материала минимально или внутренний цилиндр имеет большие радиусы, что указывает на меньшее препятствие потоку в азимутальном направлении, в отличие от того, что можно видеть на рис. 3*d*, где движение жидкости

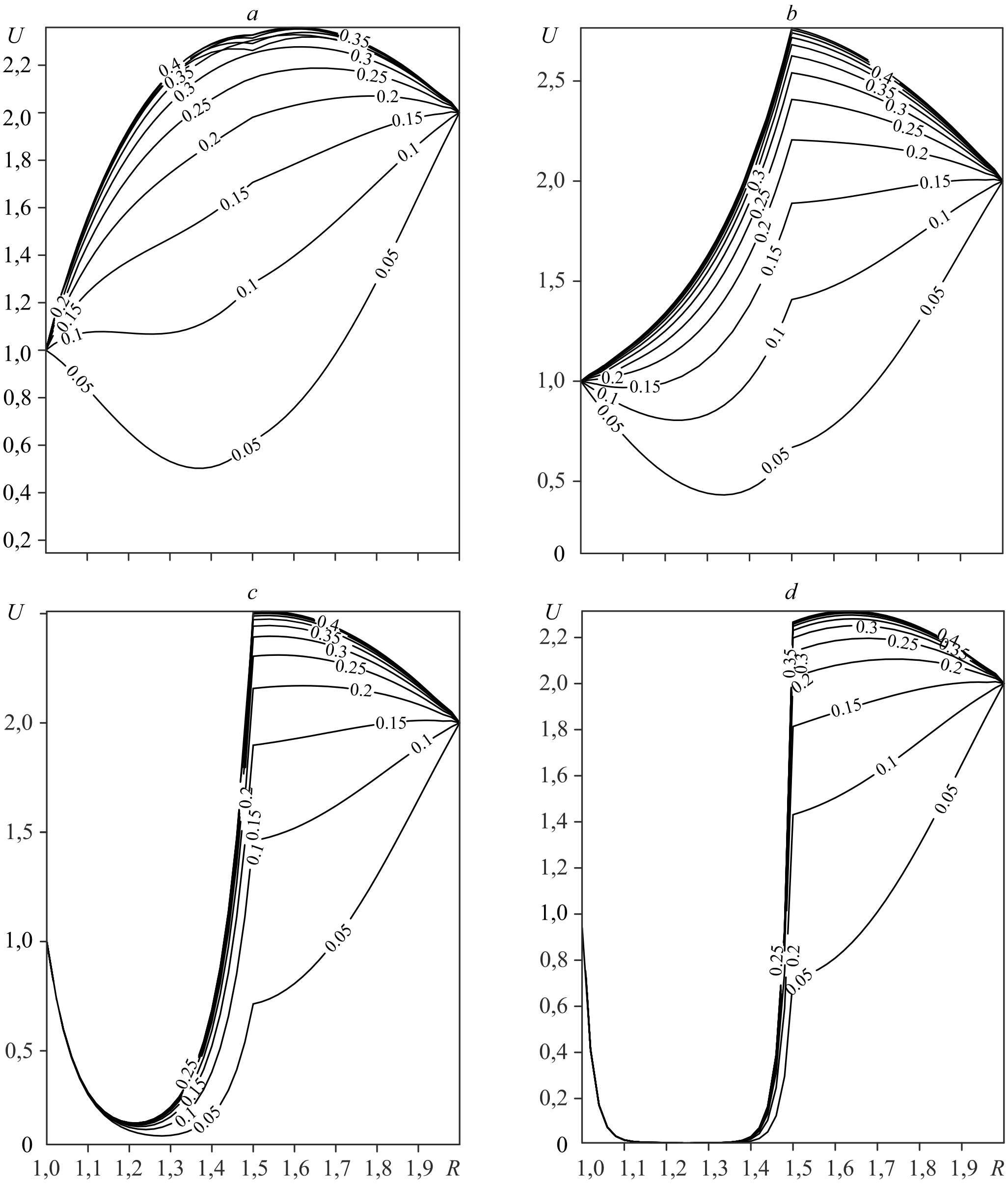

Рис. 3. Профили скорости при различных значениях t.
Da = 1 (*a*), 0,1 (*b*), 0,01 (*c*), 0,001 (*d*); $P = 10$, $\omega = 1$, $\beta = 0{,}7$, $\gamma = 0{,}5$, $d = 1{,}5$, $\lambda = 2$.

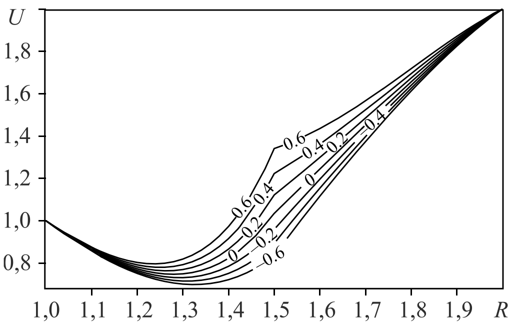

Рис. 4. Профили скорости при различных значениях β.
$P = 10$, $\mathrm{Da} = 0{,}01$, $\omega = 1$, $t = 0{,}1$, $\gamma = 0{,}5$, $d = 1{,}5$, $\lambda = 2$.

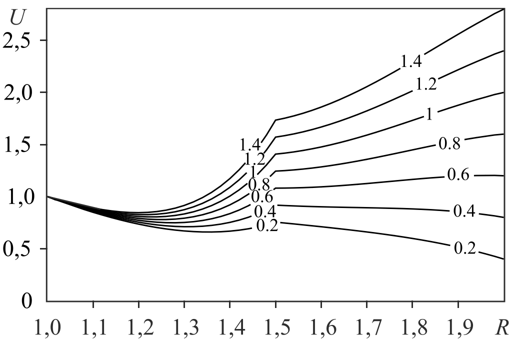

Рис. 5. Профили скорости при различных значениях ω.
$\mathrm{Da} = 0{,}01$, $\beta = 0{,}7$, $t = 0{,}1$, $\gamma = 0{,}5$, $d = 1{,}5$, $\lambda = 2$.

почти отсутствует. Как правило, скорость жидкости увеличивается в свободной области, это может быть связано с силой давления из-за азимутального градиента давления. На рис. 4 показано поведение жидкости с изменением значения β. При увеличении β наблюдается значительное увеличение скорости, что наиболее важно на границе раздела жидкостей. Кроме того, видно, что для каждого значения β скорость падает до своего минимального значения в направлении от поверхности внутреннего цилиндра, а затем начинает расти по мере приближения к границе раздела жидкостей с последующим увеличением по направлению ко внутренней поверхности внешнего цилиндра.

Влияние угловой скорости (ω) на азимутальный поток показано на рис. 5. Из рисунка видно, что изменения ω не оказывают заметного влияния на внешнюю поверхность внутреннего цилиндра. Однако увеличение ω существенно влияет на скорость вблизи границы раздела и во всей прозрачной жидкости. Изменение межфазной скорости (U_i) относительно различных управляющих параметров представлено на рис. 6–9. Рис. 6 показывает, что при различных значений Da U_i увеличивается со временем t, пока не будет достигнуто устойчивое состояние. Из рис. 7 видно, что, когда значение d приближается к значению λ, межфазная скорость становится выше для различных значений t. Обнаружено, что она достигает стационарного состояния быстрее в условиях преобладания области, заполненной пористым материалом, наличие которого сокращает время достижения стационарного состояния; обратное наблюдается, когда в потоке преобладает

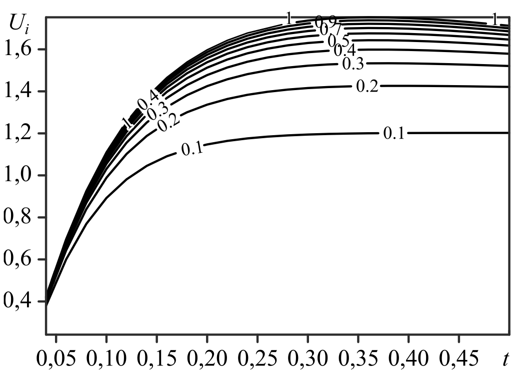

Рис. 6. Скорость на межфазной границе при различных значениях Da и t.
$\beta = -0{,}4$, $\gamma = 0{,}5$, $d = 1{,}5$, $\lambda = 2$.

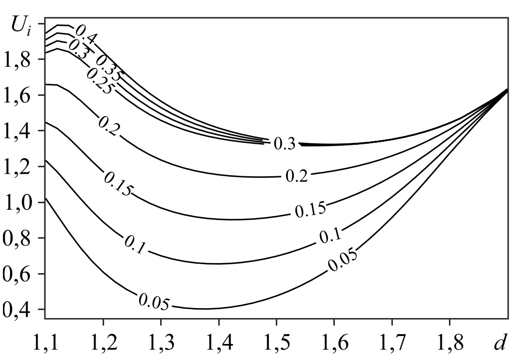

Рис. 7. Скорость на межфазной границе при различных значениях d и t.
$\mathrm{Da} = 0{,}01$, $\beta = 0{,}7$, $\gamma = 0{,}5$, $\omega = 1$, $\lambda = 2$.

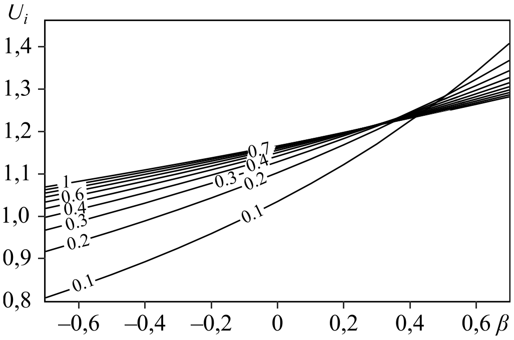

Рис. 8. Скорость на межфазной границе при различных значениях β и Da.

$t = 0{,}1$, $d = 1{,}5$, $\gamma = 0{,}5$, $\omega = 1$, $\lambda = 2$.

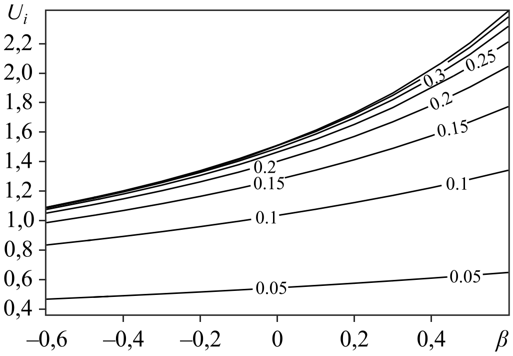

Рис. 9. Скорость на межфазной границе при различных значениях β и t.

Da = 0,01, $d = 1{,}5$, $\gamma = 0{,}5$, $\omega = 1$, $\lambda = 2$.

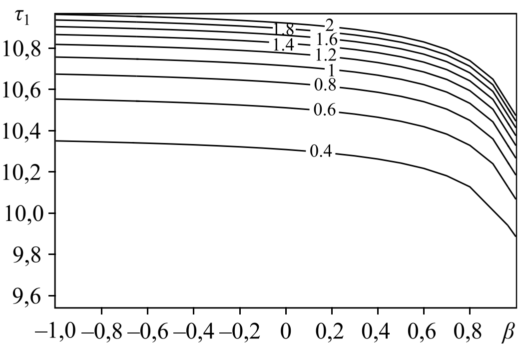

Рис. 10. Профиль поверхностного трения на внутреннем цилиндре ($\lambda = 2$) при различных значениях β и t.

Da = 0,01, $d = 1{,}5$, $\gamma = 0{,}5$, $\omega = 1$.

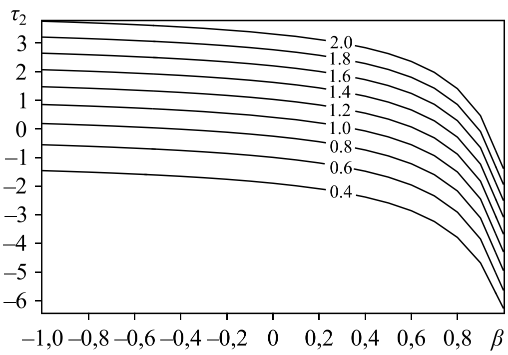

Рис. 11. Профиль поверхностного трения на внешнем цилиндре ($\lambda = 2$) при различных значениях β и t.

Da = 0,01, $d = 1{,}5$, $\gamma = 0{,}5$, $\omega = 1$.

область прозрачной жидкости. В переходном состоянии межфазная скорость при $\beta < 0{,}4$ увеличивается вместе с Da, тогда как при $\beta > 0{,}4$ наблюдается уменьшение U_i в зависимости от Da, а при $\beta = 0{,}4$ никакого эффекта не наблюдается (см. рис. 8). На рис. 9 показано, что U_i увеличивается как при росте β, так и при увеличении t. Более того, устойчивое состояние U_i достигается быстрее при отрицательных значениях β.

На рис. 10 – 15 показано изменение поверхностного трения как на внешней поверхности внутреннего цилиндра, так и на внутренней поверхности внешнего цилиндра при различных параметрах потока. Рис. 10 и 11 иллюстрируют влияние изменения коэффициента β и параметра t на обеих поверхностях. Из этих рисунков видно, что сила сопротивления

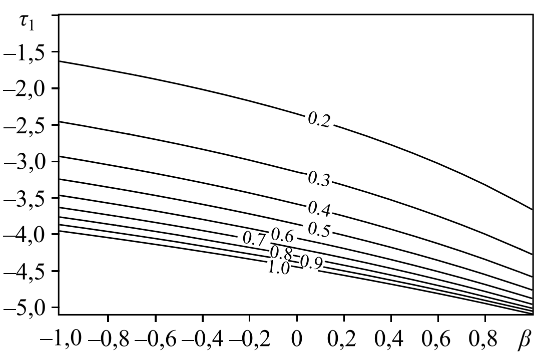

Рис. 12. Профиль поверхностного трения на внутреннем цилиндре ($\lambda = 1$) при различных значениях β и Da.

$t = 0{,}2$, $d = 1{,}5$, $\gamma = 1$, $\lambda = 1$, $\omega = 1$.

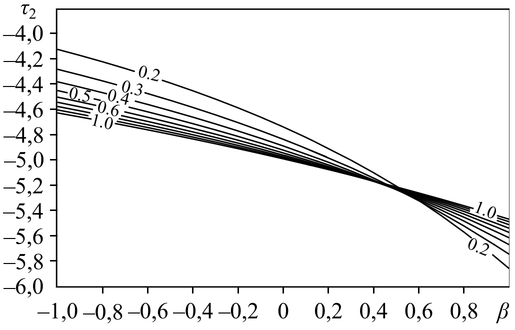

Рис. 13. Профиль поверхностного трения на внешнем цилиндре ($\lambda = 2$) при различных значениях β и Da. $t = 0{,}2$, $d = 1{,}5$, $\gamma = 1$, $\lambda = 1$, $\omega = 1$.

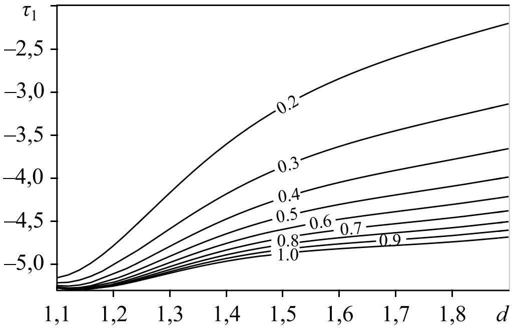

Рис. 14. Профиль поверхностного трения на внутреннем цилиндре ($\lambda = 1$) при различных значениях Da и d. $\beta = 0{,}7$, $d = 1{,}5$, $\gamma = 0{,}5$, $\omega = 1$.

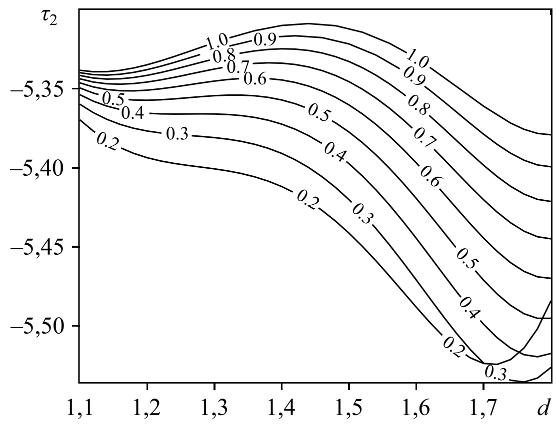

Рис. 15. Профиль поверхностного трения на внешнем цилиндре ($\lambda = 2$) при различных значениях Da и d. $\beta = 0{,}7$, $d = 1{,}5$, $\gamma = 0{,}5$, $\omega = 1$.

на внешней поверхности внутреннего цилиндра выше по сравнению с силой трения на внутренней поверхности внешнего цилиндра. Численное сравнение показывает, что выбор Da = 0,01 увеличивает силу трения на поверхностях. Следовательно, для минимизации поверхностного трения на обеих поверхностях подходит большое значение Da. Этот вывод подтверждается графиками на рис. 12 и 13. Видно, что поверхностное трение на обеих стенках уменьшается с увеличением Da. Важно отметить, что силы поверхностного сопротивления также могут быть уменьшены путем выбора подходящих значений подгоночного коэффициента в условии скачка напряжения (β).

На рис. 14 и 15 показано влияние числа Дарси (Da) и изменения положения межфазного радиального расстояния (d). На рис. 14 показано, что поверхностное трение уменьшается с увеличением Da. Кроме того, поверхностное трение на внутреннем цилиндре может быть уменьшено за счет увеличения области, занимаемой прозрачной жидкостью. Обратная ситуация наблюдается на внутренней поверхности внешнего цилиндра.

Заключение

Авторами теоретически исследовано нестационарное течение несжимаемой жидкости Тейлора–Дина в составном кольцевом зазоре с использованием полуаналитического решения, включающего метод преобразования Лапласа и RSA-подход. Также для проверки точности и эффективности численной схемы в работе применялись метод неявных конечных разностей и решение в замкнутой форме для установившейся скорости. Результаты, полученные с помощью численных схем на больших временах, показали отличное согласование с решением в замкнутой форме. Необходимо отметить, что численные значения, полученные с помощью приближения суммы Римана (RSA), согласуются со значениями, полученными с использованием неявных конечных разностей в переходном состоянии (см. табл. 1 и 2). Результаты показали, что значения межфазного радиального расстояния d и подгоночного коэффициента в условиях скачка напряжения β, а также силы трения на цилиндрических стенках играют важную роль в азимутальном потоке. Также обнаружено, что движение жидкости усиливается вращением двух цилиндров. Чтобы минимизировать касательное напряжение на поверхности внутреннего цилиндра, требуется резкое уменьшение сечения пространства, заполненного насыщенным пористым материалом. Обратная ситуация наблюдается на внешнем цилиндре.

Список обозначений

d — безразмерное межфазное радиальное расстояние,
d' — размерное межфазное радиальное расстояние, м,
Da — число Дарси,
I_1 — модифицированная функция Бесселя первого порядка первого рода,
I_2 — модифицированная функция Бесселя второго порядка первого рода,
k' — проницаемость пористой среды, м^2,
K_1 — модифицированная функция Бесселя первого порядка второго рода,
K_2 — модифицированная функция Бесселя второго порядка второго рода,
r_i — радиус внутреннего цилиндра, м,
r_0 — радиус внешнего цилиндра, м,
r' — размерная радиальная координата, м,
R — безразмерная радиальная координата,
t — безразмерное время,
t' — размерное время, с,
U — безразмерная скорость,
u' — размерная скорость, м/с,
U_0 — эталонная скорость, м/с.

Греческие символы

β — подгоночный коэффициент в условиях скачка напряжения, Па,
γ — коэффициент вязкости,
λ — соотношение радиусов (r_0/r_i),
ν_{eff} — эффективная кинематическая вязкость пористой среды, м^2/с,
ν — кинематическая вязкость жидкости, м^2/с,
ω — угловая скорость, м^2/с,
ρ — плотность, кг/м^3.

Подстрочные индексы

f — область жидкости,
p — пористая область,
i — граница между прозрачной жидкостью и пористой областью.

Список литературы

1. **Chikh S., Boumedien A., Bouhadef K., Lauriat G.** Non-darcian forced convection analysis In an annulus partially filled with a porous material // Numer. Heat Transfer. Part A: Applications: Intern. J. Comput. and Methodology. 1995. Vol. 28, No. 6. P. 707–722.
2. **Kuznetsov A.V.** Analytical investigation of the fluid flow in the interface region between a porous medium and a clear fluid in channels partially filled with a porous medium // Applied Scientific Research. 1996. Vol. 56. P. 53–67.

3. **Poulikakos D., Kazmierczak M.** Forced convection in a duct partially filled with a porous material // ASME J. Heat Transfer. 1987. Vol. 109. P. 653–662.
4. **Paul T., Singh A.K.** Natural convection between coaxial vertical cylinders partially filled with a porous material // Forsch. Ing.-Wes. (Eng. Res.). 1998. Vol. 64. P. 157–162.
5. **Jha B.K., Odengle J.O.** Unsteady couette flow in a composite channel partially filled with porous material: a semi-analytical approach // Transport Porous Media. 2015. Vol. 107. P. 219–234.
6. **Jha B.K., Odengle J.O.** A semi-analytical solution for start-up flow in an annulus partially filled with porous material // Transport Porous Media. 2016. Vol. 114. P. 49–64.
7. **Yusuf T.S., Jha B.K.** A semi-analytical solution for time-dependent natural convection flow with heat generation/absorption in an annulus partially filled with porous material // Multidiscipline Modeling in Materials and Structures. 2018. Vol. 14, No. 5. P. 1042–1063.
8. **Dryden H.L., Murnaghan F.D., Bateman H.** Hydrodynamics. New York: Dover Publications, Inc., 1956. 634 p.
9. **Richardson E.G., Tyler E.** The transverse velocity gradient near the mouths of pipes in which an alternating flow is established // Proc. Phys. Soc. London. 1929. Vol. 42. P. 1–15.
10. **Gupta R.K., Gupta K.** Steady flow of an elastico-viscous fluid in porous coaxial circular cylinder // Ind. J. Pure and Applied Math. 1996. Vol. 27, No. 4. P. 423–434.
11. **Samal R.C., Biswal T.** Fluctuating flow of a second order fluid between two coaxial circular pipes // IERT. 2015. Vol. 4, No. 2. P. 433–441.
12. **Drake D.G.** On the flow in a channel due to a periodic pressure gradient // Quart. J. of Mech. and Applied Math. 1965. Vol. 18, No. 1. P. 1–10.
13. **Fan C., Chao B.T.** Unsteady laminar incompressible flow through rectangular ducts // ZAMP. 1965. Vol. 16, No. 3. P. 351–360.
14. **Khamrui S.R.** The motion of the Newtonian fluids between two circular cylinders // Bull. Cal. Math. Soc. 1957. Vol. 49. P. 57.
15. **Haslam M., Zamir M.** Pulsatile flow in tubes of elliptic cross sections // Annals Biomedical Engng. 1998. Vol. 26, No. 5. P. 780–787.
16. **Tsangaris S.** Oscillatory flow of an incompressible viscous-fluid in a straight annular pipe // J. Mech. Theor. Appl. 1984. Vol. 3, No. 3. P. 467–478.
17. **Tsangaris S., Vlachakis N.W.** Exact solution for the pulsating finite gap Dean flow // Applied Mathematical Modelling. 2007. Vol. 31. P. 1899–1906.
18. **Tsangaris S., Kondaxakis D., Vlachakis N.W.** Exact solution of the Navier–Stokes equations for the pulsating Dean flow in a channel with porous walls // Intern. J. of Engng Sci. 2006. Vol. 44. P. 1498–1509.
19. **Kuznetsov A.V.** Influence of the stress jump condition at the porous medium/clear fluid interface on a flow at a porous wall // Int. Comm. Heat Mass Transf. 1997. Vol. 24, No. 3. P. 401–410.
20. **Couette M.** Etudes sur le frottement des liquides // Ann. Chemical Physics. 1890. Vol. 21, No. 6. P. 433–510.
21. **Taylor G.I.** Stability of viscous liquid contained between two rotating cylinders // Philos. Trans. Soc. London. A. 1923. Vol. 223. P. 289–343.
22. **Channabasappa M.N., Umapathy K.G., Nayak I.V.** Effect of porous lining on the flow between two concentric rotating cylinders // Proc. Indian Acad. Sci. 1979. Vol. 88, No. 2. P. 163–167.
23. **Bathaiah D., Venugopal R.** Effect of porous lining on the MHD flow between two concentric rotating cylinders under the influence of a uniform magnetic field // Acta Mechanica. 1982. Vol. 44. P. 141–158.
24. **Kohler J., Friedrich J., Ostendorf A., Gurevich E.L.** Characterization of azimuthal and radial velocity fields induced by rotors in flows with a low Reynolds number // Phys. Rev. E. 2016. Vol. 93. P. 023108–023115.
25. **Acharya V., Lieuwen T.** Effect of azimuthal flow fluctuations on flow and flame dynamics of axisymmetric swirling flames // Phys. Fluids. 2015. Vol. 27. P. 105106–105113.
26. **Nagaraju G., Kaladhar K., Sai K.S.** Magnetohydrodynamics effect on rotating free surface flow of micropolar fluid in a cylindrical container with porous lining // Int. J. Dynamical Systems and Differential Equations. 2015. Vol. 5, No. 3. P. 191–205.
27. **Subotic M.F., Lai C.** Flows between rotating cylinders with a porous lining // J. Heat Transf. 2008. Vol. 130. P. 102601–102611.
28. **Khali S., Nebbali R., Bouhadef K.** Effect of a porous layer on Newtonian and power-law fluids flows between rotating cylinders using lattice Boltzmann method // J. Braz. Soc. Mech. Sci. Engng. 2017. Vol. 39. P. 3881–2895.
29. **Paul T., Singh A.K.** Effect of interracial stress jump condition on free convective flow between vertical walls partially filled with porous medium // Modelling, Simulation & Control (personal communication). 1998.
30. **AI–Nimr M.A., Darabsch T.T.** Analytical solution for transient laminar fully developed free convection in open-ended vertical concentric porous annuli // ASME J. Heat Transfer. 1995. Vol. 117. P. 762–764.
31. **Kuznetsov A.V.** Analysis of a non-thermal equilibrium fluid flow in a concentric tube annulus filled with a porous medium // Intern. Com. Heat Mass Transfer. 1996. Vol. 23. P. 929–938.

32. **Kuznetsov A.V.** Analytical investigation of the fluid flow in the interface region between a porous medium and a clear fluid in channels partially filled with a porous medium // Applied Scientific Research. 1996. Vol. 56. P. 53–67.
33. **Constantin A., Johnson R.S.** An exact steady purely azimuthal equatorial flow with a free surface // J. Phys. Oceanography. 2016. Vol. 46. P. 1935–1945.
34. **Constantin A., Johnson R.S.** An exact steady purely azimuthal flow as a model for the Antarctic Circumpolar, Current // J. Phys. Oceanography. 2016. Vol. 46. P. 3585–3594.
35. **Jha B.K., Yusuf T.S.** Transient free convective flow in an annular porous medium: A semi-analytical approach // Engng. Sci. and Technology, an Intern. J. 2016. Vol. 19. P. 1936–1948.
36. **Tzou D.Y.** Macro to microscale heat transfer: the lagging behavior. London: Taylor and Francis, 1997. 576 p.

Статья по поступила в редакцию 21 января 2021 г.,
после переработки — 8 апереля 2021 г.,
принята к публикации 18 мая 2021 г.,
после дополнительной доработки — 20 ноября 2021 г.