

УДК 539.375

ЗАМЕДЛЕНИЕ РОСТА ЩЕЛИ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

А. Б. Мустафаев

Институт математики и механики НАН Азербайджана, AZ1141 Баку, Азербайджан

E-mail: azer_bm@list.ru

Исследуется изменение температурного поля вблизи концов щели переменной ширины под действием неоднородного поля напряжений. Решение краевой задачи о равновесии щели с частично контактирующими берегами (на некоторой части зоны контакта возникает сцепление берегов, а на другой части возможно проскальзывание) при действии внешнего неоднородного поля напряжений, температурного поля и усилий на контактирующих поверхностях щели переменной ширины, сравнимой с перемещениями в упругом состоянии, сводится к задаче линейного сопряжения аналитических функций.

Ключевые слова: щель переменной ширины, неоднородное поле напряжений, температурное поле, контактные напряжения, сцепление, проскальзывание.

DOI: 10.15372/PMTF20170116

Разработка надежных противоаварийных систем представляет собой важную задачу. В настоящее время эффективным способом замедления роста трещин (щелей) является использование температурных полей [1–3]. Результаты работ [3, 4] показывают, что при воздействии температурного поля уменьшается деформация растягиваемой пластины в направлении, перпендикулярном трещине (щели), вследствие чего уменьшается коэффициент интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины. При некотором соотношении физических и геометрических параметров пластины и температурного поля в ней появляются зоны сжимающих напряжений, в которых берега щели на некотором участке входят в контакт и возникают контактные напряжения. Следовательно, создавая температурное поле, можно предотвратить разрушение конструкции.

Пусть в изотропной среде, занимающей плоскость xOy , имеется щель переменной ширины $h(x)$, сравнимой с упругими перемещениями. Ось абсцисс направлена вдоль щели, ось ординат — перпендикулярно ей. На бесконечности действуют напряжения, изменяющиеся как полиномиальные функции декартовых координат x и y . Берега щели свободны от внешних нагрузок. Для замедления роста щели путем нагрева тепловым источником области $S = S_1 + S_2$ (S_1, S_2 — области нагрева вблизи концов щели) до температуры T_0 создается зона сжимающих напряжений (рис. 1). Приняты следующие допущения: все термоупругие характеристики материала пластины не зависят от температуры, материал пластины представляет собой однородную изотропную среду.

Считается, что в начальный момент времени $t = 0$ произвольная область $S = S_1 + S_2$ в плоскости xOy мгновенно нагревается до постоянной температуры $T = T_0$, остальная часть плоскости в начальный момент имеет температуру $T = 0$.

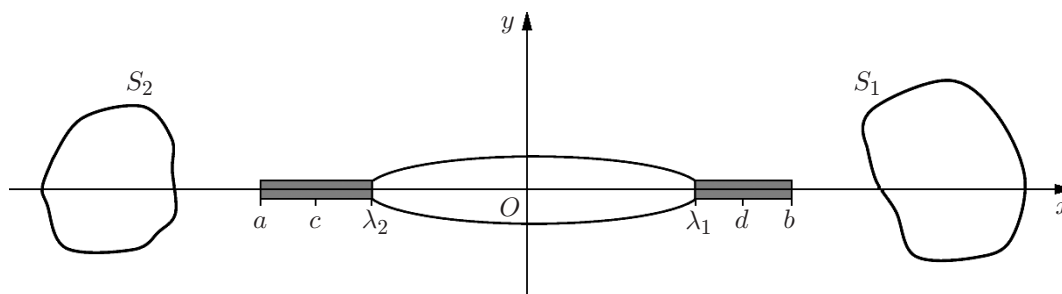


Рис. 1. Схема задачи

Для многих металлических материалов (сталей, алюминиевых сплавов и др.) в диапазоне температур $300 \div 400 \text{ }^\circ\text{C}$ термоупругие характеристики слабо зависят от температуры [5, 6]. Из результатов экспериментов [1] следует, что при нагреве области перед трещиной до температуры $70 \div 100 \text{ }^\circ\text{C}$ рост трещины замедляется (см. также [7, 8]). В работе [8] исследовано изменение напряжений вблизи концов трещины и определены коэффициенты интенсивности напряжений. Установлено, что при некоторых значениях параметров задачи коэффициенты интенсивности напряжений оказываются отрицательными. Это означает, что берега трещины входят в контакт. В случае отрицательных коэффициентов интенсивности напряжений необходимо учитывать частичный контакт берегов трещины в некоторой области вблизи ее вершины.

Полагаем, что в процессе деформирования берега щели в окрестности вершин вступают в контакт на участках $a\lambda_2$ и $\lambda_1 b$ (см. рис. 1). Принимается, что каждая площадка контакта состоит из участков сцепления берегов ac и db и участков $c\lambda_2$ и $\lambda_1 d$, на которых возможно проскальзывание.

Обозначим через L_1 совокупность участков сцепления, через L_2 — совокупность участков проскальзывания, через L_3 — совокупность участков берегов щели, свободной от нагрузки.

В процессе нагружения пластины в зонах, где берега щели входят в контакт, возникают нормальные $p_y(x)$ и касательные $p_{xy}(x)$ напряжения, значения которых заранее неизвестны и подлежат определению.

Для рассматриваемой задачи, в которой напряжения изменяются как полиномиальные функции декартовых координат на бесконечности, граничные условия на берегах щели имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_y - i\tau_{xy} &= 0 && \text{на } L_3, \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= p_y - ip_{xy} && \text{на } L_1, \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= (1 - if)p_y && \text{на } L_2, \end{aligned} \tag{1}$$

где $f(x)$ — коэффициент трения.

Полагается, что на участках проскальзывания действуют силы сухого трения (закон трения принимается в форме Амонтона — Кулона).

Основные соотношения задачи должны быть дополнены уравнениями для перемещений берегов щели в зонах контакта

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (v^+ - v^-) &= -h'(x) && \text{на } L_1 + L_2, \\ \frac{\partial}{\partial x} (u^+ - u^-) &= 0 && \text{на } L_1, \end{aligned} \tag{2}$$

где $u^+ - u^-$, $v^+ - v^-$ — касательная и нормальная составляющие величины раскрытия берегов щели.

Размеры зон контакта заранее неизвестны и подлежат определению.

Модель контакта при наличии трения и сцепления впервые предложена в работе [9]. Обзор работ, посвященных исследованию взаимодействия берегов трещин, приведен в [10, 11]. Изучены также задачи о телах с трещинами с учетом возможности контакта берегов [12–19].

Используя принцип суперпозиции, напряженное состояние в плоскости с щелью представим в виде

$$\sigma_x = \sigma_{x_0} + \sigma_x^0 + \sigma_x^1, \quad \sigma_y = \sigma_{y_0} + \sigma_y^0 + \sigma_y^1, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy_0} + \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}^1. \quad (3)$$

Здесь σ_{x_0} , σ_{y_0} , τ_{xy_0} — компоненты тензора напряжений в плоскости без разреза в случае, когда на бесконечности действуют напряжения, изменяющиеся как полиномиальные функции декартовых координат x и y ; σ_x^0 , σ_y^0 , τ_{xy}^0 — решение задачи термоупругости для плоскости без щели; σ_x^1 , σ_y^1 , τ_{xy}^1 — компоненты тензора напряжений, возникающих в плоскости со щелью под действием нагрузок, приложенных только на берегах щели.

Для напряжений σ_{x_0} , σ_{y_0} , τ_{xy_0} имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{x_0} + \sigma_{y_0} &= 4 \operatorname{Re} \Phi_0(z), \quad z = x + iy, \\ \sigma_{y_0} - \sigma_{x_0} - 2i\tau_{xy_0} &= \Phi_0(z) + \Omega_0(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi_0'(z)}, \\ \Phi_0(z) &= A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \dots + A_m, \\ \Omega_0(z) &= B_0 z^m + B_1 z^{m-1} + B_2 z^{m-2} + \dots + B_m. \end{aligned} \quad (4)$$

Функции (4) в зависимости от значений коэффициентов A_j и B_j ($j = 0, 1, \dots, m$) определяют напряженное состояние в плоскости в отсутствие щели и теплового источника.

Для определения напряжений σ_x^0 , σ_y^0 , τ_{xy}^0 решается задача термоупругости для плоскости без щели. Сначала находим распределение температуры в плоскости. Для этого решается краевая задача теории теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_* \Delta T, \quad T = \begin{cases} T_0, & x \in S, y \in S, \\ 0, & x \notin S, y \notin S, \end{cases} \quad t = 0, \quad (5)$$

где Δ — оператор Лапласа; a_* — температуропроводность материала плоскости.

В случае обобщенного плоского напряженного состояния полагается, что боковые поверхности пластины теплоизолированы.

Пусть области S_1 и S_2 являются произвольными односвязными областями с центрами $O_k(L_k^*, C_k^*)$ (см. рис. 1). Решение задачи теории теплопроводности имеет вид

$$T(x, y, t) = \frac{T_0}{4\pi a_*} \left[\iint_{S_1} \exp\left(-\frac{R^2}{4a_* t}\right) d\xi d\eta + \iint_{S_2} \exp\left(-\frac{R^2}{4a_* t}\right) d\xi d\eta \right],$$

где $R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$.

При определении температурного поля для упрощения задачи не учитывается возмущенное температурное поле, возникающее вследствие наличия трещины.

Считается, что в случае пластины ее внешние поверхности теплоизолированы, т. е. потерями тепла на поверхности пластины пренебрегается. Для учета этих потерь вместо уравнения (5) следует решать уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_* \Delta T - m^2 T,$$

где $m^2 = 2a_* \delta / (\lambda h)$; δ — коэффициент теплообмена между пластиной и средой; λ — теплопроводность; h — толщина пластины.

Таким образом, в случае теплообмена со средой через боковые поверхности пластины полученное решение нужно умножить на $\exp(-m^2t)$.

Для термоупругого потенциала перемещений находим

$$F(x, y, t) = \frac{(1 + \nu)\alpha T_0}{4\pi} \left\{ \int_0^t \frac{1}{\tau} \left[\iint_S \exp\left(-\frac{R^2}{4a_*\tau}\right) d\xi d\eta \right] d\tau - 2 \iint_S \ln\left(\frac{1}{R}\right) d\xi d\eta \right\},$$

где $S = S_1 + S_2$; ν — коэффициент Пуассона материала; α — температурный коэффициент линейного расширения.

Компоненты тензора напряжений $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ выражаются через термоупругий потенциал перемещений по известным формулам [20] и имеют вид

$$\sigma_x^0 = -\mu(1 + \nu)\alpha T_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \iint_S \frac{1}{R^4} \left[(x - \xi)^2 - (y - \eta)^2 + 2(y - \eta)^2 \Gamma\left(2, \frac{R^2}{4a_*t}\right) - R^2 \exp\left(-\frac{R^2}{4a_*t}\right) \right] d\xi d\eta \right\},$$

$$\sigma_y^0 = -\mu(1 + \nu)\alpha T_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \iint_S \frac{1}{R^4} \left[(y - \eta)^2 - (x - \xi)^2 + 2(x - \xi)^2 \Gamma\left(2, \frac{R^2}{4a_*t}\right) - R^2 \exp\left(-\frac{R^2}{4a_*t}\right) \right] d\xi d\eta \right\},$$

$$\tau_{xy}^0 = -\frac{\mu(1 + \nu)\alpha T_0}{2\pi} \iint_S \frac{4(x - \xi)(y - \eta)}{R^2} \left[1 - \Gamma\left(2, \frac{R^2}{4a_*t}\right) \right] d\xi d\eta,$$

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt,$$

где μ — модуль сдвига материала пластины.

С учетом (3) граничные условия задачи (1) для напряжений на берегах щели принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 &= -(\sigma_{y0} - i\tau_{xy0}) - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) && \text{на } L_3, \\ \sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 &= p_y - ip_{xy} - (\sigma_{y0} - i\tau_{xy0}) - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) && \text{на } L_1, \\ \sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 &= (1 - if)p_y - (\sigma_{y0} - i\tau_{xy0}) - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) && \text{на } L_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Компоненты тензора напряжений $\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1$ и компоненты вектора перемещений u_1, v_1 выразим через две кусочно-аналитические функции комплексной переменной $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ [21]:

$$\begin{aligned} \sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 &= \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)}, \\ 2\mu \frac{\partial}{\partial x} (u_1 + iv_1) &= \varkappa \Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)} \end{aligned} \quad (7)$$

($\varkappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ в случае плоского напряженного состояния, $\varkappa = 3 - 4\nu$ в случае плоской деформации).

На основе граничных условий (6) получаем задачу линейного сопряжения с разрывными коэффициентами [21]

$$\begin{aligned} [\Phi(t) + \Omega(t)]^+ + [\Phi(t) + \Omega(t)]^- &= 2f(t), \\ [\Phi(t) - \Omega(t)]^+ - [\Phi(t) - \Omega(t)]^- &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} f(t) &= p_y - ip_{xy} - f_0(t) \quad \text{на } L_1, \\ f(t) &= (1 - if)p_y - f_0(t) \quad \text{на } L_2, \\ f(t) &= -f_0(t) \quad \text{на } L_3, \quad f_0(t) = \sigma_{y0} - i\tau_{xy0} + \sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0. \end{aligned}$$

Решение задачи (8) в классе всюду ограниченных функций записывается в виде

$$\Phi(z) = \Omega(z) = \frac{\sqrt{(z-a)(z-b)}}{2\pi i} \int_a^b \frac{f(t)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}(t-z)} dt. \quad (9)$$

При $z \rightarrow \infty$ $X(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)} = z + O(1/z)$. Корень под знаком интеграла в (9) представляет собой ветвь соответствующей функции, выделяемой приведенным условием на верхнем берегу щели.

Для определения λ_1 и λ_2 имеем два соотношения, являющихся условиями разрешимости краевой задачи (8) в классе всюду ограниченных функций [21]:

$$\int_a^b \frac{f(t)}{X^+(t)} dt = 0, \quad \int_a^b \frac{tf(t)}{X^+(t)} dt = 0. \quad (10)$$

В соотношения (9), (10) входят неизвестные контактные напряжения $p_y(x)$ и $p_{xy}(x)$.

Используя вторую формулу в (7) и граничные значения функций $\Phi(z)$, $\Omega(z)$, на участке $a \leq x \leq b$ получаем следующее равенство:

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \frac{2\mu}{1 + \varkappa} \left(\frac{\partial}{\partial x} (u_1^+ - u_1^-) + i \frac{\partial}{\partial x} (v_1^+ - v_1^-) \right). \quad (11)$$

Используя формулы Сохоцкого — Племеля [22], с учетом (9) находим

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = -\frac{i\sqrt{(x-a)(b-x)}}{\pi} \int_a^b \frac{f(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)}(t-x)} dt. \quad (12)$$

Подставляя выражение (12) в левую часть уравнения (11) с учетом соотношений (2), после ряда преобразований получаем два сингулярных интегральных уравнения относительно неизвестных функций $p_y(x)$ и $p_{xy}(x)$

$$-\frac{X_1^+(x)}{\pi} \left(\int_{L_1+L_2} \frac{p_y(t)}{X_1^+(t)(t-x)} dt - \int_a^b \frac{f_y(t)}{X_1^+(t)(t-x)} dt \right) = -\frac{2\mu}{1 + \varkappa} h'(x); \quad (13)$$

$$\int_{L_1} \frac{p_{xy}(t)}{X_1^+(t)(t-x)} dt + \int_{L_2} \frac{fp_y(t)}{X_1^+(t)(t-x)} dt - \int_a^b \frac{f_{xy}(t)}{X_1^+(t)(t-x)} dt = 0, \quad (14)$$

где $X_1^+(t) = \sqrt{(t-a)(b-t)}$; $f_y(t) = \text{Re } f_0(t)$; $f_{xy}(t) = \text{Im } f_0(t)$.

Решение интегральных уравнений (13), (14) можно получить, решив соответствующую задачу Римана [22]. Решая интегральное уравнение (13) с учетом ограниченности контактных напряжений на концах площадок контакта, находим формулу для расчета нормальных напряжений $p_y(x)$

$$p_y(x) = \frac{X_1^+(x)X_2^+(x)}{\pi^2} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*(\tau)}{X_2^+(x)(\tau-x)} d\tau, \tag{15}$$

где

$$X_2^+(t) = \sqrt{(x-a)(\lambda_1-x)(x-\lambda_2)(b-x)},$$

$$f_*(\tau) = f_y^*(\tau) + \frac{2\pi\mu}{1+\nu} \frac{h'(\tau)}{X_1^+(\tau)}, \quad f_y^*(\tau) = - \int_a^b \frac{\sigma_{y0} + \sigma_y^0}{X_1^+(t)(t-\tau)} dt.$$

Аналогично, решая интегральное уравнение (14), получаем формулу для расчета касательных напряжений на участке сцепления берегов щели

$$p_{xy}(x) = \frac{X_1^+(x)X_3^+(x)}{\pi^2} \int_{L_1} \frac{f_{xy}^*(\tau)}{X_3^+(x)(\tau-x)} d\tau, \tag{16}$$

где

$$X_3^+(t) = \sqrt{(x-a)(c-x)(x-d)(b-x)}, \quad f_{xy}^*(x) = \int_{L_2} \frac{fp_y(t)}{X_1^+(t)(t-x)} dt - \int_a^b \frac{\tau_{xy0} + \tau_{xy}^0}{X_1^+(t)(t-x)} dt.$$

Для определения параметров c и d имеем следующие уравнения:

$$\int_{L_1} \frac{t^{k-1} f_{xy}(t)}{X_3(\tau)} dt = 0, \quad k = 1, 2.$$

Для вычисления интегралов, содержащих функции $X^+(t)$, $X_1^+(t)$, $X_2^+(t)$ и $X_3^+(t)$, использовался прием, предложенный Н. И. Мухелишвили [21. § 110].

Путем вычислений по формулам (15), (16) определяются нормальные и касательные напряжения в области контакта, а также размеры зон сцепления и проскальзывания при различных законах распределения температурных полей и напряжений в пластине, геометрических параметрах и механических характеристиках материала.

Выбирая различные многочлены (4), получаем решения различных задач о напряженном состоянии в окрестности трещины. Например, решение задачи о чистом изгибе моментами M бесконечной полосы (балки) без щели можно получить, полагая в формулах (4)

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, & A_1 &= 0, & A_2 &= M/(4I), & A_3 &= 0, \\ B_0 &= 0, & B_1 &= 0, & B_2 &= 3M/(4I), & B_3 &= 0 \end{aligned}$$

(I — момент инерции поперечного сечения полосы).

В случае

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{q}{24I}, & A_1 &= 0, & A_2 &= \frac{q}{8I} \left(L^2 + \frac{2c^2}{5} \right), & A_3 &= -\frac{qc^3}{12I}, \\ B_0 &= \frac{7q}{24I}, & B_1 &= 0, & B_2 &= \frac{q}{8I} \left(3L^2 - \frac{11c^2}{5} \right), & B_3 &= \frac{qc^3}{12I} \end{aligned}$$

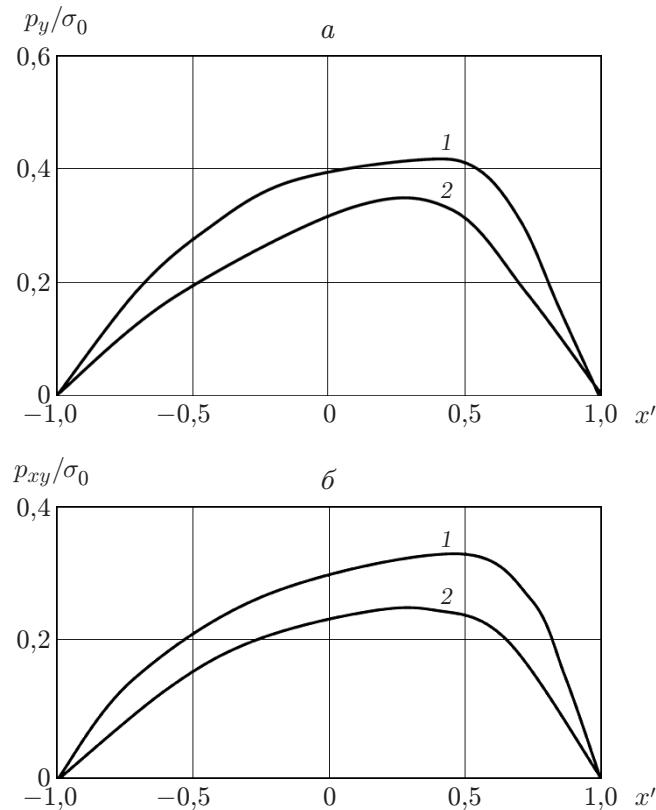


Рис. 2. Распределения нормальных (а) и касательных (б) контактных напряжений вдоль зоны контакта справа от щели:

1 — $(b - a)/R_0 = 0,05$, 2 — $(b - a)/R_0 = 0,02$

функции (4) являются решением задачи об изгибе нагруженной равномерным давлением с интенсивностью q балки длиной $2L$ без щели. В этом случае полагается, что на концах балки выполняются условия свободного опирания, а силы реакции со стороны опор определяются как касательные усилия, приложенные к торцам балки.

При

$$A_0 = 0, \quad A_1 = -\frac{iQ}{8I}, \quad A_2 = -\frac{Q(2L - d)}{4I}, \quad A_3 = 0,$$

$$B_0 = 0, \quad B_1 = \frac{5iQ}{8I}, \quad B_2 = -\frac{3Q(2L - d)}{4I}, \quad B_3 = -\frac{iQc^2}{2I}$$

функции (4) являются решением задачи об изгибе жестко защемленной консольной балки без щели под действием постоянной поперечной силы Q , приложенной на ее свободном конце.

На рис. 2 представлены распределения контактных напряжений вдоль зоны контакта справа от щели, ширина которой изменяется по параболическому закону, при $(b - a)/R_0 = 0,05; 0,02$ (R_0 — характерный линейный размер пластины). В расчетах использованы безразмерные координаты $x = (b + \lambda_1)/2 + ((b - \lambda_1)/2)x'$. При этом выбирались следующие параметры: $f = 0,25$, $\nu = 0,3$, $t_* = 4a_*t/L_1^2$, $C_1^*/L_1^* = 0,4$, $C_2^*/L_2^* = -0,3$, $L_1 = L_2$. На рис. 2 $\sigma_0 = 4M/(\sigma_s h^2)$ (σ_s — предел текучести на растяжение материала пластины).

Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что температурное поле, созданное в течение некоторого промежутка времени с целью замедления роста и

частичного закрытия щели, является непреодолимым препятствием на пути ее продвижения [1].

Под действием температурного поля максимальное растягивающее напряжение уменьшается и действует в направлении теплового источника. Это приводит к наблюдаемому в экспериментах смещению плоскости разрыва [1, 23].

В работе предложена эффективная схема расчета находящейся под действием неоднородного поля напряжений на бесконечности частично закрытой щели переменной ширины. На основе полученных результатов можно сделать вывод, что созданное в окрестности вершины щели температурное поле является препятствием на пути ее распространения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Финкель В. М.** Физические основы торможения разрушения. М.: Металлургия, 1977.
2. **Партон В. З.** Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. М.: Наука, 1985.
3. **Мирсалимов В. М., Кадиев Р. И.** Закрытие трещины со связями между берегами в листовом элементе при воздействии наведенного температурного поля // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій. Львів: Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2004. С. 51–56.
4. **Кадиев Р. И., Мирсалимов В. М.** Влияние теплового источника на динамику роста трещины // Вестн. Даг. гос. ун-та. 2001. № 4. С. 69–73.
5. **Расчеты** на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Под ред. И. И. Гольденבלата. М.: Машиностроение, 1965.
6. **Тимошенко С. П.** Соппротивление материалов: В 2 т. М.: Наука, 1965. Т. 2.
7. **Беленький В. Д.** Об одном случае закрытия трещины в термоупругом поле // Физ.-хим. механика материалов. 1982. Т. 18, № 5. С. 57–61.
8. **Кадиев Р. И.** Коэффициенты интенсивности напряжений для пластины, ослабленной трещиной, при воздействии теплового источника // Вестн. Даг. науч. центра РАН. 2003. № 14. С. 15–18.
9. **Галин Л. А.** Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // Прикл. математика и механика. 1945. Т. 9, вып. 5. С. 413–424.
10. **Кит Г. С.** Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами / Г. С. Кит, М. Г. Кривцун. Киев: Наук. думка, 1983.
11. **Толоконников Л. А.** Метод граничных представлений в двумерных задачах механики / Л. А. Толоконников, В. Б. Пеньков. Тула: Тул. высш. арт. инж. уч-ще, 1998.
12. **Мирсалимов В. М.** Моделирование частичного закрытия трещин в среде с пустотами // Мат. моделирование. 2008. Т. 20, № 2. С. 32–42.
13. **Мирсалимов В. М.** Моделирование закрытия трещины со связями между берегами во втулке контактной пары // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. № 2. С. 78–92.
14. **Kovtunen V. A.** Nonconvex problem for crack with nonpenetration // Z. angew. Math. Mech. 2005. Bd 85, Fasz. 4. S. 242–251.
15. **Гасанов Ш. Г.** Когезионная трещина с частично контактирующими берегами в сечении дорожного покрытия // Механика машин, механизмов и материалов. 2012. Т. 19, № 2. С. 58–64.
16. **Мир-Салим-заде М. В.** Моделирование частичного закрытия трещин в перфорированной изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 2. С. 148–159.
17. **Mirsalimov V. M., Vaghari A. R.** Partial crack closure in a perforated body with heat release // Materials Sci. 2012. V. 47, N 6. P. 757–763.

18. **Мирсалимов В. М.** Частичное закрытие трещиновидной полости в изотропной среде // Деформация и разрушение материалов. 2013. № 1. С. 16–20.
19. **Мирсалимов В. М., Рустамов Б. Э.** Моделирование частичного закрытия трещиновидной полости со связями между берегами в изотропной среде // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 6. С. 181–190.
20. **Паркус Г.** Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963.
21. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
22. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
23. **Морозов Е. М.** О расчете на прочность по стадии разрушения // Деформация и разрушение при термических и механических воздействиях: Сб. науч. тр. М.: Атомиздат, 1969. Вып. 3. С. 87–90.

Поступила в редакцию 3/II 2016 г.
