

## О ДВИЖЕНИИ ЧАСТИЦЫ ЗА ФРОНТОМ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

А. В. Фёдоров, А. В. Шульгин, С. В. Поплавский

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, 630090 Новосибирск  
fedorov@itam.nsc.ru, shulgin@itam.nsc.ru, s.poplav@itam.nsc.ru

На основе комплексного теоретико-экспериментального подхода механики гетерогенных сред предложены физико-математическая модель для описания нестационарного движения частиц за ударной волной и соответствующая математическая технология обработки экспериментальных данных по траекториям и скоростям частиц. Проведены сравнительные расчеты по различным известным формулам для коэффициента сопротивления частиц. Предложена новая корреляционная форма коэффициента сопротивления частицы, позволяющая удовлетворительно описать траектории и скорости частиц, полученные в различных экспериментах.

Ключевые слова: ударные волны, коэффициент сопротивления частиц, математическое моделирование.

## ВВЕДЕНИЕ

Для изучения многих проблем механики гетерогенных сред используется математическая модель, описывающая, например, движение смеси газа и твердых несжимаемых частиц в двухскоростном двухтемпературном приближении. Для замыкания такой модели привлекается информация о силе сопротивления частицы, помещенной в поток флюида, и законе ее теплообмена с окружающей средой. Как известно, сила аэродинамического сопротивления

$$\mathbf{f}_D = \frac{1}{2} C_D \rho_1 S_m |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2| (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2), \quad (1)$$

где  $C_D$  — коэффициент сопротивления частицы,  $\rho_1$  — плотность газа,  $S_m$  — площадь миделева сечения частицы,  $\mathbf{u}_1 = (u_1, v_1)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (u_2, v_2)$  — векторы скоростей газа и частицы соответственно,  $|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2| = [(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2]^{1/2}$ , во многих ситуациях оказывается одним из основных факторов, приводящих частицу в движение и определяющих тормозящее или ускоряющее обратное воздействие дисперсной фазы на несущий поток. Причиной возникновения силы сопротивления является разность скоростей газа и частицы. При решении многих задач частицы считаются сферическими (для сферы  $S_m = \pi r_p^2$ ,  $r_p$  — радиус частицы). Такое предположение позволяет при вычислении коэффициента сопротивления ча-

стицы использовать теоретические и экспериментальные результаты, полученные для обтекания одиночной сферы в идеализированных условиях стационарного потока. При движении сферической частицы в потоке коэффициент  $C_D$  является функцией относительных чисел Рейнольдса и Маха

$$\text{Re}_p = 2 \frac{\rho_1 r_p}{\mu} |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|, \quad \text{Ma}_p = \frac{|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|}{c}, \quad (2)$$

где  $\mu$ ,  $c$  — вязкость и скорость звука газа.

Напомним несколько известных фактов из теории обтекания частицы, которые будем использовать при последующем описании экспериментов. Так, при ползущем движении твердой частицы коэффициент сопротивления определяется формулой Стокса:

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}_p}. \quad (3)$$

Эта формула согласуется с опытными данными при  $\text{Re}_p < 0.2$ . Закон Стокса (3) получен без учета конвективных членов в течении газа около сферы. Существует много соотношений, уточняющих (3) и учитывающих инерционные силы. Упомянем здесь закон Озеена

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}_p} \left( 1 + \frac{3}{16} \text{Re}_p \right), \quad (4)$$

который применим при  $\text{Re}_p < 1$ , формулу Торбина — Говина [1]

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}_p} (1 + 0.15 \text{Re}_p^{0.687}), \quad (5)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-92010\_ННС\_а).

которая применима вплоть до значений  $Re_p \approx 200 \div 300$ .

В работе [2] дано следующее эмпирическое выражение для описания коэффициента сопротивления сферической частицы:

$$C_D = \frac{24}{Re} \times \quad (6)$$

$$\frac{(1 + 0.15 Re_p^{0.687}) \left[ 1 + \exp \left( -\frac{0.427}{M_p^{4.63}} - \frac{3.0}{Re_p^{0.88}} \right) \right]}{1 + \frac{M_p}{Re_p} \left[ 3.82 + 1.28 \exp \left( -1.25 \frac{Re_p}{M_p} \right) \right]}.$$

Приведенные выше корреляции для коэффициента сопротивления отражают влияние лишь отдельных факторов (инерционность, сжимаемость, разреженность) на коэффициент сопротивления, вычисленный по закону Стокса. На практике для вычисления коэффициента сопротивления используются обобщенные формулы типа (6), учитывающие влияние некоторой совокупности факторов, значимых для данного режима течения, а также перекрестные эффекты (см. далее (7), (8)).

Наиболее распространенными и общими из многочисленных зависимостей для коэффициента сопротивления, имеющих в литературе, являются, по-видимому, соотношения Хендерсона [3]:

$$C_D = \begin{cases} C_D^1, & 0 \leq M_p \leq 1, \\ C_D^1(1, Re_p) + \\ + \frac{4}{3}(M_p - 1)[C_D^2(1.75, Re_p) - \\ - C_D^1(1, Re_p)], & 1 \leq M_p \leq 1.75, \\ C_D^2, & M_p \geq 1.75, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$C_D^1(M_p, Re_p) = 24 \left/ \left\{ Re_p + s \left[ 4.33 + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{3.65 - 1.53 T_2/T_1}{1 + 0.353 T_2/T_1} \exp \left( -0.247 \frac{Re_p}{s} \right) \right] \right\} +$$

$$+ \exp \left( -0.5 \frac{M_p}{\sqrt{Re_p}} \right) \times$$

$$\times \frac{4.5 + 0.38(0.03 Re_p + 0.48 \sqrt{Re_p})}{1 + 0.03 Re_p + 0.48 \sqrt{Re_p}} +$$

$$+ 0.1 M_p^2 + 0.2 M_p^8 \left] + 0.6 s \left[ 1 - \exp \left( -\frac{M_p}{Re_p} \right) \right],$$

$$C_D^2(M_p, Re_p) = 0.9 + \frac{0.34}{M_p^2} +$$

$$+ 1.86 \sqrt{\frac{M_p}{Re_p} \frac{2 + 2/s^2 + 1.058 \sqrt{T_2/T_1}/s - 1/s^4}{1 + 1.86 \sqrt{M_p/Re_p}}},$$

$$s = M_p \sqrt{0.5 \gamma},$$

$\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей газа [3].

В работе [4] предложено использовать формулу Хендерсона в упрощенной форме:

$$C_D = \left( 0.38 + \frac{24}{Re_p} + \frac{4}{\sqrt{Re_p}} \right) \left[ 1 + \right.$$

$$\left. + \exp \left( -\frac{0.43}{M_p^{4.67}} \right) \right] = \frac{24}{Re_p} \left( 1 + \frac{0.38}{24} Re_p + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6} \sqrt{Re_p} \right) \left[ 1 + \exp \left( -\frac{0.43}{M_p^{4.67}} \right) \right] =$$

$$= \frac{24}{Re_p} C_{D,1}(Re_p) C_{D,2}(M_p), \quad (8)$$

где  $C_{D,1}$  — выражение в круглых скобках во втором равенстве (8),  $C_{D,2}$  — в квадратных скобках.

Вышеприведенные корреляции получены для сферических частиц, помещенных в поток газа. В последующем в работе [5] на основе экспериментов по ускорению мелких сферических частиц в ударной трубе были определены траектории их движения в виде  $x = x(t)$ . Подчеркнем, что в данном случае поток был нестационарным. Путем аппроксимации траектории полиномом и дифференцированием аппроксимирующего полинома по времени авторы находили скорости  $\dot{x} = \dot{x}(t)$  и ускорения  $\ddot{x} = \ddot{x}(t)$  частиц. Был сделан вывод, что если число экспериментальных точек, описывающих траектории, достаточно велико, то можно ограничиться аппроксимацией полиномом третьей степени. Используя полученные аппроксимации, авторы [5] вычисляли коэффициент сопротивления по формуле

$$C_D = \frac{2}{3} r_p \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\left(\frac{du_2}{dt}\right)^2}{(u_1 - u_2)^2 \left[ \left(\frac{du_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_2}{dt}\right)^2 \right]^{1/2}},$$

что позволило в дальнейшем определить аппроксимирующую зависимость для коэффициента сопротивления. В экспериментах использовались три типа частиц: частицы пенополистирола диаметром  $D = 3.2, 4.0$  и  $4.8$  мм и плотностью  $21 \text{ кг/м}^3$ ; нейлоновые (полиамидные) шарики с  $D = 3.2$  или  $4.0$  мм и плотностью  $1130 \text{ кг/м}^3$ ; полиамид-имидные шарики диаметром  $D = 0.5$  мм и плотностью  $1420 \text{ кг/м}^3$ .

Для каждой категории частиц сообщается о проведении экспериментов с тремя числами Маха набегающей ударной волны:  $M_{SW} \approx 1.27, 1.50$  и  $1.80$ . На основе обработки экспериментальных данных в [5] предложена следующая аппроксимирующая зависимость для коэффициента сопротивления:

$$\log_{10} C_D = f_1(\text{Re}_p), \quad (9)$$

где

$$f_1(\text{Re}_p) = 7.8231 - 5.8137 \log_{10} \text{Re}_p + 1.4129 (\log_{10} \text{Re}_p)^2 - 0.1146 (\log_{10} \text{Re}_p)^3,$$

которую удобно переписать в виде

$$C_D = \exp[\ln 10 f_1(\text{Re}_p)] = \frac{24}{\text{Re}_p} \left\{ \frac{\text{Re}_p}{24} \exp[\ln 10 f_1(\text{Re}_p)] \right\}. \quad (10)$$

Авторы [5] утверждают, что данная зависимость пригодна для чисел Маха вплоть до 6 и для сжимаемых и несжимаемых потоков при  $200 \leq \text{Re}_p \leq 101000$ . Кроме того, авторы пришли к выводу, что существует несоответствие между корреляциями, предложенными для коэффициента сопротивления частицы в различных работах (см. также приведенные выше формулы для  $C_D$ ).

Подобный подход для определения  $C_D$  использовался позднее в работе [6], авторы которой провели расчеты траекторий частиц, движущихся за УВ ( $M = 1.5 \div 2$ ), для условий своего эксперимента. Оказалось, что используемая в [6] корреляция (10) удовлетворительно описывает их эксперименты.

В работе [7] были выполнены эксперименты по ускорению частиц бальсы в потоках газа с числами Маха  $0.5 \div 1.5$ . Для обработки результатов эксперимента авторы принимали коэффициент сопротивления постоянным. Его значение находили на основе точного решения уравнения движения частицы, находящейся в потоке газа за ударной волной. При этом авторы полагали, что найденное значение  $C_D$  рассматривается как результат осреднения за время наблюдения.

Цель настоящей работы — вернуться к проблеме определения закона сопротивления частиц на основе комплексного теоретико-экспериментального подхода механики гетерогенных сред, включающего в том числе: экспериментальное определение траекторий частиц за ударной волной, разработку математической технологии для описания параметров движения частиц за ударной волной (определение аппроксимирующих полиномов для траекторий, скоростей и ускорений), проведение расчетов  $C_D$  по различным формулам, нахождение нового представления для  $C_D$ , в котором предусматривается отказ от обременительного предположения о постоянстве коэффициента сопротивления [7], применительно к новым экспериментальным данным, полученным в [7].

## ОЦИФРОВКА И ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ИТПМ СО РАН

Экспериментальные данные были получены методом многокадровой теневой визуализации, с помощью которого исследовалась ранняя стадия скоростной релаксации частиц несферической формы в потоке за проходящей ударной волной [7]. Измерения траекторий проводились в [7] в нестационарном режиме обтекания одиночных частиц. Материал образцов — уникальная древесина (бальса), плотность материала  $\rho_2 = 112 \text{ кг/м}^3$ . Размеры камеры наблюдения  $15 \times 80$  мм. На окно камеры наносились реперные точки по высоте и ширине с шагом 10 мм. Положение частицы фиксировалось на фотопленке с частотой кадров 40 мкс. Кадры пленки с помощью сканера Epson Perfection 2480 Photo передавались в компьютер и оцифровывались с использованием программы Origin Pro 8 плагином Digitizer. Результаты оцифровки траекторий движения частиц приведены на рис. 1.

Отметим, что качество некоторых пленок не позволяет оцифровать информацию на всем

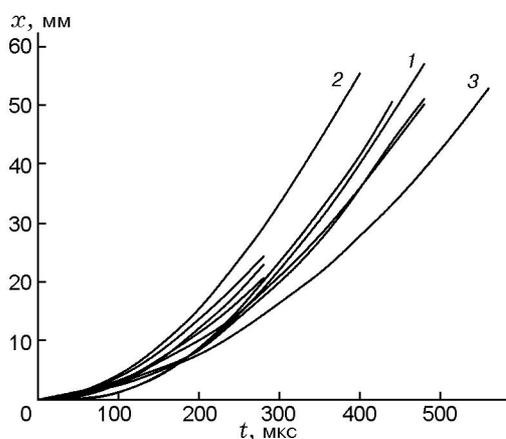
Рис. 1. Экспериментальные зависимости  $x(t)$ 

Таблица 1

Масса и размеры частиц

Номер эксперимента	Масса, мг	Размеры, мм	Число Маха УВ $M_{SW}$
1	15.15	$4.98 \times 5.28 \times 5.15$	2.22
2	6.8	$2.31 \times 4.95 \times 5.17$	2.16
3	20.4	$d \approx 5$	2.75

временном отрезке наблюдений, этим объясняется «укороченность» некоторых кривых на рис. 1. Далее под экспериментами 1–3 будем понимать соответствующие кривым 1–3 на рис. 1 (кривая 1 — число Маха УВ  $M_{SW} = 2.22$ , кривая 2 —  $M_{SW} = 2.16$ , 3 —  $M_{SW} = 2.75$ ). Остальные кривые на рис. 1 получены при числах Маха УВ в диапазоне  $M_{SW} = 2.19 \div 2.23$  и используются как вспомогательные. Характеристики объектов приведены в табл. 1.

Отметим, что в эксперименте 2 ( $M_{SW} = 2.16$ ) частица имеет наименьшую массу, а в эксперименте 3 ( $M_{SW} = 2.75$ ) — наибольшую (см. табл. 1). Этим обстоятельством и объясняется расположение кривых 2, 3 траекторий движения на рис. 1.

### ОБРАБОТКА И АППРОКСИМАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

В литературе достаточно широко распространен подход к аппроксимации экспериментальных траекторий движения частиц полиномами третьей степени. Такой подход, например, рекомендуется в [5, 6]. С другой стороны, в работе [7] отмечалось, что использова-

Таблица 2

Результаты полиномиальной аппроксимации эксперимента 1

$t$ , мкс	$x$ , мм	$x(t)$ , мм	$\Delta x$	$v = \dot{x}$ , м/с
0	0	0	0	0
40.00	1.08100	0.6231819	0.4235	28.885
80.00	2.25450	2.170026	$3.7469 \cdot 10^{-2}$	47.167
120.0	4.23050	4.325914	$2.2553 \cdot 10^{-2}$	60.107
160.0	7.10350	6.961089	$2.0048 \cdot 10^{-2}$	71.687
200.0	9.99850	10.07932	$8.0831 \cdot 10^{-3}$	84.603
240.0	13.3950	13.76658	$2.7740 \cdot 10^{-2}$	100.2
280.0	18.4160	18.13973	$1.5001 \cdot 10^{-2}$	118.8
320.0	23.4315	23.29518	$5.8177 \cdot 10^{-3}$	139.0
360.0	29.2135	29.25758	$1.5087 \cdot 10^{-3}$	158.6
400.0	35.8565	35.92846	$2.0069 \cdot 10^{-3}$	173.7
440.0	43.0185	43.03496	$3.8254 \cdot 10^{-4}$	179.4
480.0	50.1040	50.07846	$5.0972 \cdot 10^{-4}$	169.4

ние полинома третьей степени после двойного дифференцирования ограничивает приближение функции ускорения линейной зависимостью, что может не соответствовать реальности. В настоящей работе траектория движения частицы аппроксимировалась полиномом вида  $x(t) = \sum_{i=2}^5 a_i t^i$  с помощью пакета Maple 13, после чего дифференцированием по времени находилось представление для скорости движения частицы  $v(t)$ . В табл. 2 приведены результаты аппроксимации для эксперимента 1, где  $t$  — время,  $x$  — координаты траектории частицы, полученные с пленок,  $x(t)$  — зависимость, вычисленная по формуле аппроксимирующего полинома,  $\Delta x = |x_{\text{exp}} - x(t)|/x_{\text{exp}}$ ,  $v$  — скорость частицы, полученная дифференцированием по времени аппроксимирующего полинома. В качестве иллюстрации приведем некоторые результаты обработки эксперимента 1.

**Эксперимент 1.** Аппроксимирующий полином для траектории частицы в координатах метр — секунда имел вид:

$$x(t) = 0.45328 \cdot 10^6 t^2 - 0.17753 \cdot 10^{10} t^3 + \\ + 0.46794 \cdot 10^{13} t^4 - 0.41768 \cdot 10^{18} t^5.$$

В этом случае скорость частицы за ударной волной определялась в следующем виде:

$$v(t) = 0.90656 \cdot 10^6 t - 0.53259 \cdot 10^{10} t^2 + \\ + 0.18717 \cdot 10^{14} t^3 - 0.20884 \cdot 10^{17} t^4.$$

Среднеквадратическое отклонение точек траектории частицы за ударной волной составляет

$$S = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x(t_i))^2} = 0.1948714.$$

Для последующих расчетов необходимы параметры за фронтом ударной волны (УВ): скорость фронта 767 м/с; число Маха волны 2.22; давление 3.144 атм; плотность газа 2.4 кг/м<sup>3</sup>; температура 550 К; скорость потока 510 м/с; число Маха потока 1.09; скорость звука 467.9 м/с; плотность тела 112 кг/м<sup>3</sup>; число Рейнольдса за ударной волной  $2.14 \cdot 10^5$ . Пятый порядок аппроксимирующего полинома был обусловлен критерием точности аппроксимации траекторий частиц.

Отметим, что максимальная относительная ошибка в траекториях наблюдается во всех случаях в начальный момент времени. Недостаток такого подхода: для каждого эксперимента аппроксимирующий полином приходится строить заново, что, впрочем, не составляет труда.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Остановимся на рациональной обработке экспериментальных данных. Для этого применим метод математического моделирования в механике гетерогенных сред. Уравнение движения частицы в безразмерном виде может быть записано в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{u}_2}{dt} = -C_D(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1), \quad \mathbf{u}_2(0) = 0, \quad (11)$$

где скорости газа  $\mathbf{u}_1$  и частицы  $\mathbf{u}_2$  отнесены к скорости на бесконечности  $u_0$ , а время — к времени стоксовой релаксации

$$\tau_{st} = \frac{2}{9} \frac{\rho_2 r_p^2}{\mu}. \quad (12)$$

Относительные числа Рейнольдса  $Re_p$  и Маха  $M_p$  частицы определяются соотношениями (2). Начальное условие (11) соответствует достаточно инерционным макроскопическим частицам.

С целью выбора наилучшего, аппроксимирующего экспериментальные данные [7] закона сопротивления были проведены расчеты задачи Коши (11) с учетом различных корреляций для коэффициента сопротивления, взятого по формулам Горобина — Говина (5), Карлсона — Хогланда (6), Хендерсона (7), упрощенной формуле Хендерсона (8), Игры — Такаемы (10).

**1. Тестирование.** Для оценки достоверности получаемых численных результатов был проведен тестовый расчет с целью сравнения с экспериментальными данными по траекториям, приведенными в работе [6], и скоростям, полученным путем дифференцирования аппроксимационной формулы для траектории. Параметры течения:  $M_{SW} = 1.56$ ,  $r_p = 0.002$  м,  $\rho_1 = 2.40$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_2 = 1170.0$  кг/м<sup>3</sup>,  $u_1 = 262.0$  м/с,  $c_0 = 402$  м/с, число Рейнольдса за фронтом ударной волны  $1.12 \cdot 10^5$ . На рис. 2, 3 приведены расчетные и экспериментальные данные по траекториям движения и скоростям частицы. Видно, что наилучшее приближение дают расчеты с  $C_D$  по формуле (10), полученной по результатам экспериментов [5]. Максимальное поточечное отличие составляет 2 %. Отметим, что в [6] скорости частиц вычислялись по данным о траектории с использованием полиномиальной аппроксимации (квадраты) и в связи с этим наблюдается упоминавшаяся выше немонотонность (дрожание) графика скорости.

Представленные на рис. 3 расчетные и экспериментальные зависимости для скорости частиц качественно аналогичны расположению кривых при различных значениях  $C_D$  на рис. 2. Здесь отличия рассчитанных по формуле (10)

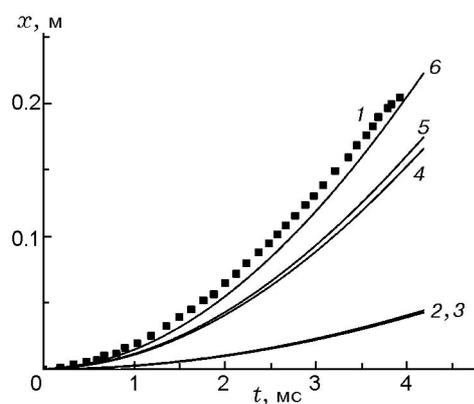


Рис. 2. Траектория движения частицы: 1 — экспериментальные данные [6], 2, 3 — формулы (5), (6), 4, 5 — (8), (7), 6 — (10)

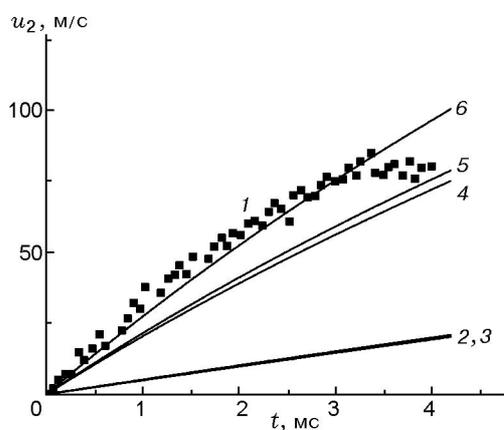


Рис. 3. Зависимость скорости частицы от времени:

1 — данные [6], 2, 3 — формулы (5), (6), 4, 5 — (8), (7), 6 — (10)

и экспериментальных данных начинают возрастать к концу эксперимента. Тем не менее, видно преимущество подхода из работы [6] для описания  $C_D$ . Итак, мы получили правдоподобные результаты при расчетах траекторий и скоростей частицы в потоке газа за УВ по модели с использованием лишь силы взаимодействия, определяемой вязким трением, поэтому далее будем использовать сформулированную математическую модель с различными значениями  $C_D$ .

**2. Сопоставление расчетов с экспериментом 1 [7].** Перейдем к обсуждению результатов численных расчетов для экспериментов [7]. На рис. 4, 5 представлены подобные результаты

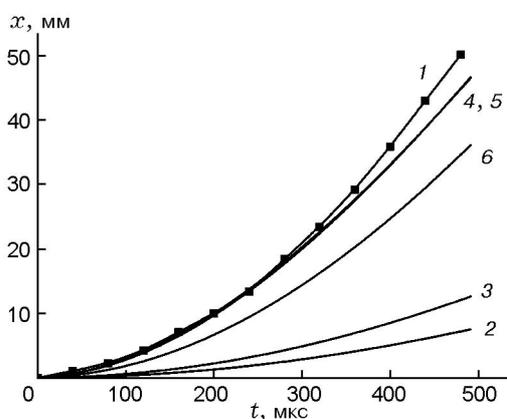


Рис. 4. Траектория движения частицы:

1 — экспериментальные данные [7], 2 — формула (5), 3 — (6), 4 — (8), 5 — (7), 6 — (10)

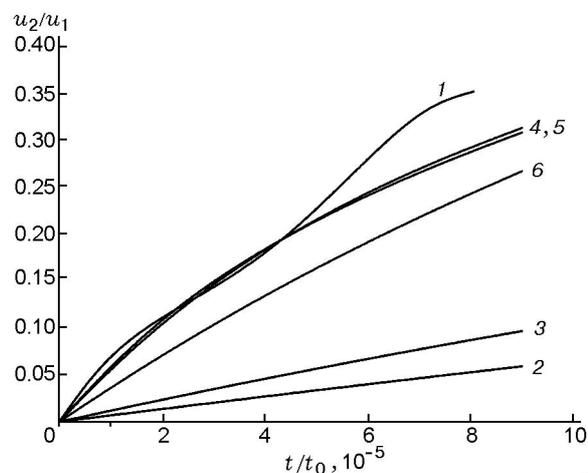


Рис. 5. Отношение скорости частицы к скорости газа:

1 — аппроксимация полиномом  $v(t)$ , 2 — формула (5), 3 — (6), 4 — (8), 5 — (7), 6 — (10)

расчета траекторий и относительной скорости частицы. В отличие от эксперимента [6], в этом случае наилучшее приближение к экспериментальным значениям траекторий и скоростей частиц дает формула Хендерсона (7), а формулы Торобина — Говина (5) и Карлсона — Хогланда (6) приводят к заниженным значениям координат частицы. Тем не менее, кривые 2, 3 и 4, 5 на обоих рисунках группируются парами и обнаруживают поведение, аналогичное тому, что наблюдалось при описании экспериментов [6]. Отметим, что возможной причиной отличий в упорядочении поведения траекторий, полученных по различным корреляциям  $C_D$ , может быть смена диапазонов чисел Рейнольдса и Маха в экспериментах [7] по сравнению с [6].

Как следует из данных рис. 2 (эксперимент [6]) и рис. 4 (эксперимент 1 [7]), изменилось взаимное расположение траекторий частиц, полученных по формулам Игры — Такаямы (10) (кривая 6) и Хендерсона (7), (8) (кривые 4, 5), а кривые 2, 3, соответствующие формулам Торобина — Говина (5) и Карлсона — Хогланда (6), сохранили тенденцию. Для объяснения этого факта оценим значение начального ускорения частицы  $du_2(0)/dt$ , а именно вычислим при  $t = 0$  величину  $C_D u_1 / u_0$  (в расчетах брали  $u_0 = 100$  м/с).

В эксперименте 1 скорость потока равна 510 м/с, в эксперименте [6] — 262 м/с, вычисленные значения  $C_D u_1 / u_0$  для различных законов сопротивления приведены в табл. 3. Из

Таблица 3  
Значения начального ускорения частицы для различных экспериментов и коэффициентов сопротивления

Эксперимент	$C_D u_1/u_0$			
	Горобин — Говин (5)	Карлсон — Хогланд (6)	Игра — Такаяма (10)	Хендерсон (7), (8)
[6]	1 161.30	1 213.62	6 693.44	5 270.28
[7]	3 526.22	6 172.88	19 081.85	32 936.00

данных табл. 3 можно сделать следующие выводы.

1. Чем больше значение  $C_D u_1/u_0$ , тем ближе к экспериментальным данным лежит аппроксимирующая кривая траектории движения частиц.

2. Наибольшее значение  $C_D u_1/u_0$  для эксперимента [6] получено при использовании формулы Игры — Такаямы (10), а для эксперимента 1 [7] — Хендерсона (7), (8), и, как видно из двух последних столбцов таблицы, имеет место перестановка максимальных значений этой величины в данных экспериментах.

Таким образом, взаимное расположение траекторий локально определяется значением ускорения в начальный момент времени, которое различно при использовании разных корреляций для коэффициента сопротивления. Вышесказанным и объясняется изменение взаимного расположения кривых 4, 5 и 6 на рис. 2 и 4.

Численные распределения скоростей частицы на рис. 5 показывают тенденцию к упорядочению, видную на рис. 4, дополнительно здесь приведена аппроксимация скорости, полученная на основе разложения в ряд траектории. Как видно, с ростом времени различия между кривыми 4, 5 и 1 нарастают. Это является еще одним основанием для разработки аналитического представления для  $C_D$ .

**3. Подход замороженных коэффициентов.** Для сравнительной оценки количественных значений параметров, влияющих на движение частицы за фронтом ударной волны, были исследованы зависимости от времени чисел Маха  $M_p$  и Рейнольдса  $Re_p$  частицы, множителей  $C_{D,1}(Re_p)$  и  $C_{D,2}(M_p)$  в упрощенной формуле Хендерсона (8) и др. Оказалось, что множитель  $C_{D,1}(Re_p)$  приблизительно на 3 порядка больше, чем множитель  $C_{D,2}(M_p)$ . На пер-

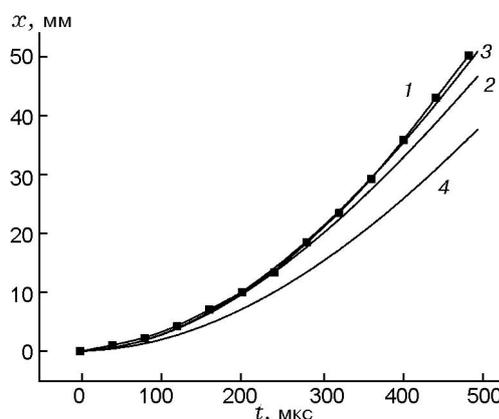


Рис. 6. Влияние «замораживания» числа Маха частицы в формуле (8):

1 — данные эксперимента 1, 2 — расчет по формуле (8), 3 —  $C_{D,2}(M_p) = C_{D,2}(M_p^0)$ , 4 —  $C_{D,2}(M_p) = C_{D,2}(M_p^{end})$

вый взгляд, это обстоятельство подтверждает широко распространенное утверждение о том, что коэффициент сопротивления частицы существенно зависит только от числа Рейнольдса. Так, например, в закон сопротивления Игры — Такаямы (10) число Маха вообще не входит. Тем не менее, учет влияния числа Маха может влиять на соответствие экспериментальных и расчетных данных. Для подтверждения этого положения были проведены расчеты по упрощенной формуле Хендерсона с замороженными числами Маха (взятыми для эксперимента 1 [7]), а именно со значениями  $C_{D,2}(M_p) = C_{D,2}(M_p^0)$  и  $C_{D,2}(M_p) = C_{D,2}(M_p^{end})$ , где  $M_p^0, M_p^{end}$  — числа Маха частицы в начальный и конечный моменты расчета. Результаты представлены на рис. 6. Видно, что если взять число Маха равным начальному значению, то получим практически точные значения экспериментальных точек траектории (рис. 6, кривая 3). Если взять число Маха равным конечному на момент расчета значению, то получим заниженные координаты точек траектории (рис. 6, кривая 4). Расчет по полной формуле находится между этими кривыми (рис. 6, кривая 2). Отметим, что эти кривые не слишком различаются, поэтому для определения коэффициента сопротивления применим следующую процедуру.

Представляется полезным провести обработку экспериментальных данных [7], с тем чтобы получить аппроксимацию коэффициента сопротивления на основе изложенного выше и

некоторых дополнительных соображений. Для этого сделаем аналитическую оценку предлагаемого ниже представления для коэффициента сопротивления на основе линейного приближения. Уравнение движения частицы запишем в виде

$$\frac{du_2}{dt} = -\frac{3}{8} \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{|u_1 - u_2|}{r_p} C_D (u_2 - u_1). \quad (13)$$

Возьмем закон сопротивления частицы в общей форме, но «заморозим» числа  $Re = \bar{Re}$ ,  $M = \bar{M}$ , тогда в одномерном случае можно записать следующее уравнение движения частицы:

$$\frac{du_2}{dt} = -[1 + \varphi(\bar{Re}, \bar{M})] \frac{u_2 - u_1}{\tau_{st}} = \frac{u_2 - u_1}{\bar{\tau}_{st}}, \quad (14)$$

где  $\tau_{st}$  — время стоксовой релаксации скоростей, а  $\bar{\tau}_{st}$  — приведенное время стоксовой релаксации. Воспользуемся одним из представлений траекторий частиц для определения  $\bar{\tau}_{st}$ . Здесь важен тот факт, что данную величину можно определить в диапазоне чисел Маха и Рейнольдса, реализуемых за УВ.

Для определения «реального» времени релаксации скоростей запишем уравнение, в котором числа Маха и Рейнольдса заморожены. При этом положим, что для данных чисел Маха функция  $\varphi$  зависит лишь от числа Рейнольдса ( $\varphi = 1 + aRe^n$ , где  $a$ ,  $n$  — некоторые константы). Выберем приведенное время стоксовой релаксации, основываясь на данных эксперимента для траектории в эксперименте 1. Здесь можно найти несколько различных приведенных времен стоксовой релаксации. Выбирая в качестве характерного среднее арифметическое, определим окончательно приведенное время стоксовой релаксации  $\bar{\tau}_{st}$ , а затем и приведенное число Рейнольдса. Это позволяет определить приведенное число Рейнольдса в виде

$$\bar{Re} = \left( \left( \frac{\tau_{st}}{\bar{\tau}_{st}} - 1 \right) / a \right)^{1/n}.$$

Отметим, что относительное число Рейнольдса частицы на ударной волне является максимальным. В формуле Торобина — Говина  $n = 0.687$ ,  $a = 0.15$ , поэтому получим  $Re \approx 2.2 \cdot 10^7$ . Между тем для эксперимента 1 в начальный момент времени имеем  $Re_1 = 2.14737 \cdot 10^5$ , для эксперимента 2 —  $Re_2 = 2.89750 \cdot 10^5$ , для эксперимента 3 —  $Re_3 = 5.21565 \cdot 10^5$  (нижний индекс в  $Re$  означает номер эксперимента).

Возможно, это означает, что асимптотика коэффициента сопротивления по числу Рейнольдса с  $n = 0.687$ ,  $a = 0.15$  не соответствует нестационарному обтеканию частицы за УВ. Выберем  $a = 0.0058$ ,  $n = 0.9345$ , тогда

$$C_D = \frac{24}{Re} (1 + 0.058 Re^{0.9345}). \quad (15)$$

В результате расчетов с этим и другими представлениями  $C_D$  получим траектории, приведенные на рис. 7, 8. Отметим, что коэффициент  $C_D$  должен зависеть, конечно, и от числа Маха, которое не введено в (15). Для улучшения корреляции  $C_D$  на зависимость от числа Маха можно воспользоваться введением поправки на

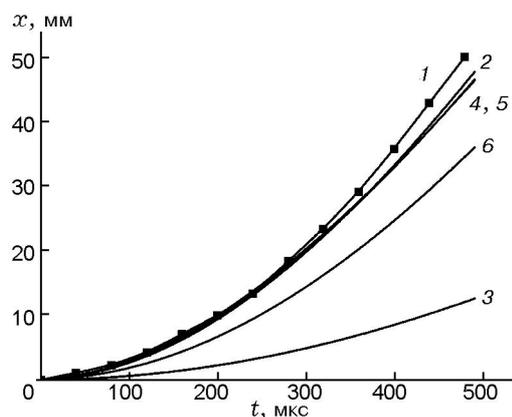


Рис. 7. Траектория движения частицы в эксперименте 1:

1 — экспериментальные данные, 2 — формула (15), 3 — (6), 4, 5 — (8), (7), 6 — (10)

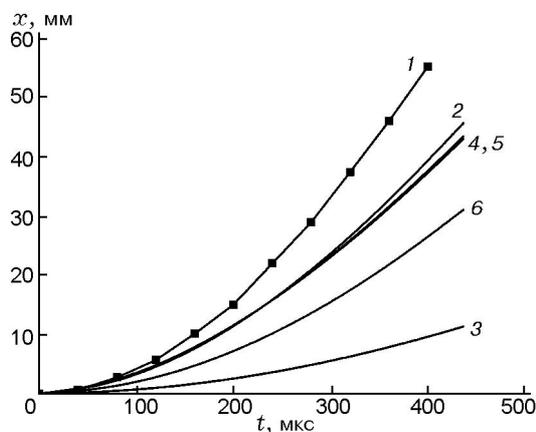


Рис. 8. Траектория движения частицы в эксперименте 2:

1 — экспериментальные данные, 2 — формула (15), 3 — (6), 4, 5 — (8), (7), 6 — (10)

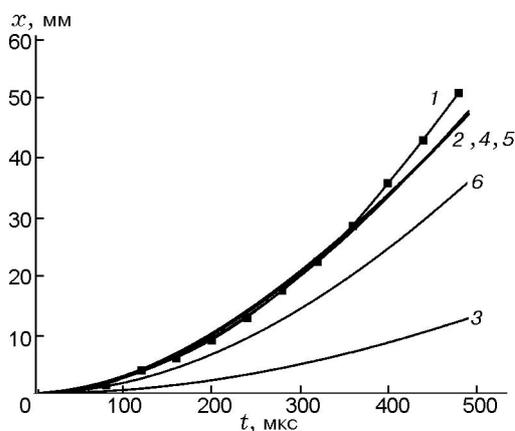


Рис. 9. Траектория движения частицы ( $M_{SW} = 2.23$ ):  
 1 — эксперимент [7], 2 — формула (15), 3 — (6),  
 4, 5 — (8), (7), 6 — (10)

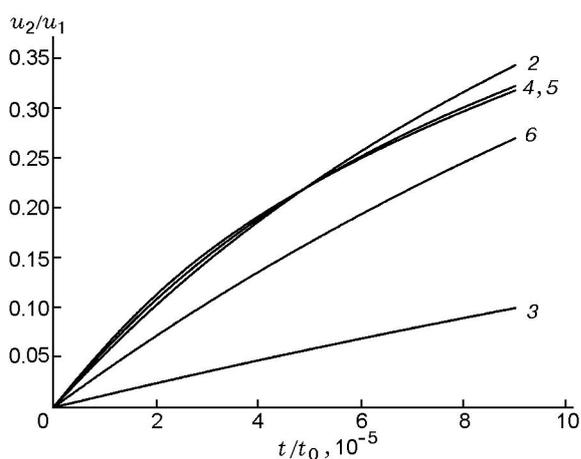


Рис. 10. Отношение скорости частицы к скорости газа (эксперимент [7]):  
 2 — формула (15), 3 — (6), 4, 5 — (8), (7), 6 — (10)

М, как это было сделано, например, у Карлсона — Хогланда (6). На рис. 9, 10 приведены результаты дополнительного расчета с корреляцией (15) для эксперимента [7] с числом Маха волны  $M_{SW} = 2.23$ .

Из данных рис. 7–10 следует, что предложенная нами корреляция для  $C_D$  позволяет получить наилучшую нижнюю оценку для экспериментальных данных по траекториям частиц. Эти данные близки данным по траекториям, полученным по упрощенной и полной формулам Хендерсона. Результаты, полученные по подходу Игры и Такаямы [5], дают занижен-

ные оценки траекторий. Наибольшие отличия экспериментальных и численных расчетов получены по модели Карлсона — Хогланда.

Как видно, предложенная нами формула для  $C_D$  и формулы Хендерсона (7) позволяют удовлетворительно описать эксперименты [7]. Конечно, полученная формула нуждается в последующем обосновании путем сопоставления с большей выборкой экспериментальных данных.

### ВЫВОДЫ

Для описания нестационарного движения частиц за ударной волной в рамках режима одиночных частиц предложены физико-математическая модель и соответствующая математическая технология обработки экспериментальных данных по траекториям и скоростям частиц.

Путем параметрических численных расчетов выявлена упорядоченность этих параметров в зависимости от вида корреляций для коэффициента сопротивления частицы.

Предложена новая корреляционная форма коэффициента сопротивления частицы, позволяющая удовлетворительно описывать траектории и скорости частиц, полученные для трех различных экспериментов [5–7] при числах Рейнольдса в диапазоне  $(2 \div 5) \cdot 10^5$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Стернин Л. Е.** Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. — М.: Машиностроение, 1974.
2. **Карлсон, Хогланд.** Сопротивление и теплоотдача частиц в соплах ракетных двигателей // Ракетная техника и космонавтика. — 1964. — № 11. — С. 104–109.
3. **Хендерсон.** Коэффициенты сопротивления сферы в течениях разреженного газа и сплошной среды // Ракетная техника и космонавтика. — 1976. — № 6. — С. 5–7.
4. **Бойко В. М., Фомин В. М., Киселев В. П. и др.** О некоторых особенностях течения газа при взаимодействии ударной волны с облаком частиц // Докл. АН. — 1995. — Т. 340, № 2. — С. 188–190.
5. **Igra O., Takayama K.** Shock tube study of the drag coefficient of a sphere in a non-stationary flow // Proc. Roy. Soc. Lond. A. — 1993. — V. 442. — P. 231–247.
6. **Devals C., Jourdan G., Estivalezes J.-L., Meshkov E. E., Houas L.** Shock tube spherical

particle accelerating study for drag coefficient determination // Shock Waves. — 2003. — V. 12. — P. 325–331.

7. **Бойко В. М., Поплавский С. В.** Аэродинамическое сопротивление частиц несферической

формы в потоке за ударной волной // Физика горения и взрыва. — 2005. — Т. 41, № 1. — С. 81–88.

*Поступила в редакцию 26/III 2009 г.*

---