УДК 164.07
DOI:
10.15372/PS20160204

А.В. Бессонов

Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, г. Новосибирск, 630090,
Институт философии и права СО РАН, ул. Николаева, 8, Новосибирск, 630090, Россия
trt@academ.org

О ДВУХ НЕВЕРНЫХ ДОГМАХ, СВЯЗАННЫХ СО ВТОРОЙ ТЕОРЕМОЙ ГЁДЕЛЯ О НЕПОЛНОТЕ АРИФМЕТИКИ. II*

Рассматривается аргументация против реализуемости выдвинутой Д. Гильбертом программы финитного обоснования математики, основанная на второй теореме К. Гёделя о неполноте арифметики. Показывается, что такая аргументация изначально некорректна, поскольку она необходимо приводит к абсурдным выводам. Тем самым опровергается общепринятое положение, согласно которому вторая теорема служит решающим аргументом в доказательстве несостоятельности гильбертовской программы.

*Ключевые слова***:** программа Гильберта, вторая теорема Гёделя о неполноте, формализация доказуемости, неадекватность предиката доказуемости, предикат недоказуемости.

A.V. Bessonov

Novosibirsk State University, ul. Pirogova, 2, Novosibirsk, 630090 Russia
Institute of Philosophy and Low SB RAS, ul. Nikolaeva, 8, Novosibirsk, 630090 Russia
trt@academ.org

TWO FALSE DOGMAS RELATED WITH GÖDEL'S SECOND INCOMPLETENESS THEOREM. II

We look at argumentation against realizability of Hilbert's program based on Gödel's second incompleteness theorem. It is proved that such argumentation is incorrect from the outset, since it necessarily leads to absurd conclusions. This implies that the second theorem can not be thought of as a decisive argument against feasibility of Hilbert's finitistic program.

* Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16-18-10359).

Публикуется в авторской редакции.

Keywords: Hilbert's program, Gödel's second incompleteness theorem, formalization of provability, inadequacy of a provability predicate, unprovability predicate.

Введение

В своей знаменитой статье 1931 г. [Gödel, 1931], в которой изложены ставшими классическими теоремы о неполноте формальной арифметики, К. Гёдель пишет: «Доказательство теоремы XI (вторая теорема о неполноте – *А.Б.*) слово в слово переносится на систему аксиом теории множеств, *M*, и систему аксиом классической математики, *A*, из чего следует: не существует доказательства непротиворечивости для *M* или *A*, которое может быть формализовано соответственно в *M* или в *A*, в предположении, что *M* или *A* непротиворечивы. Я хочу специально отметить, что Теорема XI (и соответствующие результаты для *M* и *A*) не противоречат гильбертовской формалистской точке зрения. Эта точка зрения предполагает лишь существование доказательства непротиворечивости, использующего исключительно финитные средства, и возможно, что найдутся финитные доказательства, которые не могут быть выражены в формализме *P* (или *M*, или *A*)» [Цит. по: Gödel, 1986. С. 195][1].

Именно эти выводы Гёделя послужили основанием для глубочайшего укоренения в общественном сознании философов, логиков и математиков двух тезисов, которые воспринимаются в самых широких научных кругах как безусловные и бесспорные, иными словами, как догмы. Эти догмы таковы:

I. Арифметика, если она непротиворечива, не может доказать свою непротиворечивость.

II. Вторая теорема Гёделя служит решающим аргументом в доказательстве несостоятельности программы финитного обоснования математики, выдвинутой Д. Гильбертом.

В первой части настоящей работы [Бессонов, 2014] мы дезавуировали первую догму показав, что вывод Гёделя основан исключительно на неудачном выборе выразительных средств для представления доказуе-

[1] Гёдель рассматривает формальную систему *P*, аналогичную наиболее распространенной в то время системе аксиом для формализации математики – *Principia Mathematica* Рассела–Уайтхеда. При этом он указывает, что его результаты относятся и к другим аксиоматическим системам, наиболее интересный пример которых представляет формальная арифметика Дедекинда–Пеано. Обозначим эту систему через *PA* и далее сосредоточим своё внимание именно на ней. Этот выбор соответствует стандартной точке зрения на теоремы Гёделя и интересен для нас тем, что он прямо связан со второй догмой.

мости в арифметике и потому не имеет универсального значения. Данный результат уже сам по себе подрывает веру во вторую догму, поскольку она воспринимается научным сообществом как прямое следствие первой. Ю.Л. Ершов и В.В. Целищев так выражают это общепринятое мнение: «Основанием для всех философских заключений служит простой факт: для любой адекватной формальной дедуктивной системы T, если T непротиворечива, тогда эта непротиворечивость выразима в T, но не доказуема в ней.» [Ершов, Целищев, 2012. С. 390].

В этой части работы мы покажем, что вопреки расхожему мнению, вторая теорема о неполноте вовсе не противоречит программе финитного обоснования математики в ее первоначальной гильбертовской постановке. Тем самым будет дезавуирована и вторая догма.

Сразу поясним, что в этой работе мы не преследуем цель дать какое-либо финитное доказательство непротиворечивости арифметики. Поиски подобного доказательства относятся скорее к математике, нежели к философии. Здесь мы рассматриваем лишь вопрос о принципиальной возможности такого доказательства. При этом данный вопрос анализируется исключительно в той его части, в которой эта возможность (а вернее невозможность) диктуется второй теоремой Гёделя о неполноте.

1. Вторая догма: истоки, мифология и сомнения

Первая теорема Гёделя о неполноте была представлена им на конференции в Кёнигсберге в сентябре 1930 г. Присутствовавший на выступлении Гёделя Дж. фон Нейман немедленно связал этот результат с вопросом о реализуемости программы Гильберта. Сразу после конференции он пишет письмо Гёделю, где излагает следствие первой теоремы – вторую теорему о неполноте. (К тому времени Гёдель уже получил доказательство второй теоремы независимо от фон Неймана. Набросок этого доказательства был опубликован им в тезисах, вышедших в октябре 1930 г.) Фон Нейман полагал, что всякое финитное рассуждение (которое могло бы использоваться в доказательстве непротиворечивости *Principia*) должно быть формализуемым в рамках *Principia.* Поэтому если бы непротиворечивость *Principia* была установлена финитными методами, такое доказательство было бы формализуемо в *Principia* доказуемой формулой, что невозможно согласно второй теореме о неполноте, т.е. первой догме.

П. Бернайс также быстро осознал важность теорем о неполноте в плане осуществимости программы Гильберта. В письме Гёделю (январь 1931 г.) он пишет, что если вслед за фон Нейманом признать всякое финитное рассуждение формализуемым в *Principia*, то теоремы о неполноте действительно свидетельствуют о невозможности финитного доказательства непротиворечивости *Principia* [см.: Zach, 2006. С. 418]. Но даже приняв этот вывод, Бернайс, следуя Гёделю, еще какое-то время считал возможным найти финитное доказательство непротиворечивости арифметики, пусть и не формализуемое в PA. Однако где-то к концу 1934 г. среди исследователей сложилось практически полное согласие относительно того, что любой финитный (в смысле первоначального замысла Гильберта) метод доказательства формализуем в PA. С этого времени вторая догма и приобрела свой незыблемый статус.

Вот как эта догма представлена в культовых книгах по логике. А.А. Френкель и И. Бар-Хиллел утверждают: «Конечно, теоремы Гёделя, из которых вытекает неосуществимость первоначальной гильбертовской программы, разбили возлагавшиеся на нее надежды…» [Френкель, И. Бар-Хиллел, 1966. С. 322]. Х.Б. Карри заключает: «Эта программа (Гильберта – *А.Б.*) натолкнулась, однако, на серьезное препятствие; в 1931 г. Гёдель показал, что непротиворечивость достаточно богатой теории не может быть установлена средствами, которые могут быть формализованы в самой этой теории» [Карри, 1969. С. 31]. С.К. Клини учит: «Вторая теорема Гёделя показывает, что даже всех методов, формализуемых в **N** (в формальной арифметике – *А.Б.*), т.е. в метаязыке, изоморфном самой системе **N**, недостаточно для доказательства непротиворечивости системы **N**, если она непротиворечива.» [Клини, 1967. С. 307]. А.С. Трулстра эмоционально констатирует: «Идея Гильберта состояла в том, чтобы использовать конкретную, финитистскую природу доказательств для обеспечения простого обоснования математики. Теоремы Гёделя о неполноте нанесли этой программе ошеломляющий удар» [Трулстра, 1983. С. 7]. К. Сморинский сожалеет: «Гильбертовская программа установления непротиворечивости имела своей целью доказательство непротиворечивости сильных систем финитными средствами. Это решение полностью оправдало бы использование абстрактных понятий. Стыд и позор, что программа не смогла сработать.» [Сморинский, 1983. С. 13].

Не отстают и современные приверженцы второй догмы. П.Дж. Коэн: «Жизнь была бы гораздо приятнее, не будь гильбертовская программа потрясена открытиями Гёделя. Я твердо верю, что программа Гильберта ни в каком смысле не может быть восстановлена.» [Коэн, 1974. С. 176]. К.М. Подниекс: «Этот вывод К. Гёделя (его вторая теорема) показывает, что программа Гильберта не может быть реализована до конца.» [Подниекс, 1992. С. 134]. Л.Д. Беклемишев: «Вторая же теорема Гёделя ставила под сомнение возможность реализации так называемой программы Гильберта» [Беклемишев, 2010. С. 64]. Р. Зах: «Работы Гёделя повсеместно используются для демонстрации невыполнимости гильбертовской программы» [Zach, 2003. C. 1]. П. Раатикайнен: «Традиционно принято считать, что вторая теорема Гёделя о неполноте показала невозможность осуществления гильбертовской программы» [Раатикайнен, 2003. С. 164].

Вместе с тем, следует сказать, что в наши дни вера во вторую догму далеко не так крепка, как в первую. Тот же Раатикайнен пишет: «…После установления замечательных результатов Гёделя о неполноте почти повсеместно распространилось мнение, что программа Гильберта мертва и погребена, вследствие чего интерес к ней пропадает и она изображается несколько карикатурно и несправедливо. Но в последнее время к программе Гильберта вновь проявляется серьезный интерес.» [Раатикайнен, 2003. С. 157]. Р. Зах, завершая основательную обзорную статью, подводит итог: «Хотя с 1950 и позже общим местом в литературе по философии математики и логики было мнение, что программа Гильберта не просто «убита» теоремами Гёделя о неполноте, но что она изначально была излишне амбициозной и непродуманной, в современной литературе появляется ее более позитивная оценка.» [Zach, 2006. C. 440].

Еще более оптимистична по отношению к осуществимости программы Гильберта методолог Н.В. Михайлова (чего стоит говорящее название одной из ее статей: «Программа формализма Гильберта как работающее философское направление обоснования математики» [Михайлова, 2015]). Как она утверждает: «Современные аксиоматические теории описывают не все те средства, которые используются в рассуждениях, поэтому теорема Гёделя о непротиворечивости не дает, вообще говоря, оснований предполагать, что для доказательства непротиворечивости некоторой аксиоматизированной математической теории нужны более сильные средства, вроде каких-то дополнительных постулатов, чем те, что уже фактически используются при построении этой теории… То есть ситуация с результатами Гёделя намного тоньше и сложнее, чем она представляется математикам и философам науки.» [Михайлова, 2008. С. 124].

Ниже мы покажем, что для подобного оптимизма имеются самые серьезные основания.

2. Программа Гильберта и формализация доказуемости по Гёделю

Как известно, программа финитного обоснования математики, выдвинутая Д. Гильбертом в начале 1920-х гг., преследовала цель раз и навсегда развеять сомнения в достоверности математического знания, порожденные парадоксами, открытыми к тому времени в теории множеств. Среди принятых в математике утверждений и методов доказательства Гильберт выделяет «реальные» (финитные) и «идеальные» (более сложные). При этом под финитными доказательствами он понимает те, которые используются в комбинаторных рассуждениях и, грубо говоря, сводятся к вычислениям.

Финитная часть математики полагается Гильбертом свободной от каких-либо сомнений. Однако для обеспечения применимости классической логики, в частности, закона исключенного третьего, «идеальные» доказательства также следует допустить. Необходимо только доказать, что такое допущение не приведет к выводу таких финитных утверждений, которые не являются финитно доказуемыми, например, не приведет к выводу противоречия, если к нему не приводят финитные доказательства. При этом искомое доказательство само должно быть осуществлено надежными финитными, «самыми обычными в математике» методами. В этом и состоит суть гильбертовской программы финитного обоснования математики.

Реализация программы Гильберта предполагает решение трех задач: 1) аксиоматизация математической теории; 2) ее формализация; 3) финитное доказательство непротиворечивости полученной формализованной аксиоматической теории. Рассмотрим вторую догму на примере формальной арифметики, наиболее популярной формализованной аксиоматической теории.

Формальная арифметика Дедекинда–Пеано. Язык PA надстраивается над обычным языком исчисления предикатов первого порядка и содержит дополнительно один константный символ $\mathbf{0}$, один одноместный функциональный символ S, два двухместных функциональных символа $+$ и $\cdot$, а также единственный двухместный предикатный символ =. В стандартной интерпретации переменные принимают значения в множестве натуральных чисел, символ **0** интерпретируется как ноль, S как операция прибавления единицы («следующий за»), а + и · как сложение и умножение соответственно.

Натуральным числам соответствуют нумералы, построенные путем приписывания к **0** слева символа S необходимое число раз, например, числу 3 соответствует нумерал $SSS\mathbf{0}$. Нумерал, соответствующий числу n, принято обозначать через $\boldsymbol{n}$.

Аксиоматика (один из возможных вариантов) наряду с аксиомами и правилами вывода исчисления предикатов первого порядка состоит из 7 аксиом:

$$\forall x(\neg(\mathbf{0} = Sx)),$$
$$\forall x \forall y(Sx = Sy \to x = y),$$
$$\forall x(\neg(x = \mathbf{0}) \to \exists y(x = Sy)),$$
$$\forall x(x + \mathbf{0} = x),$$
$$\forall x \forall y(x + Sy = S(x + y)),$$
$$\forall x(x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}),$$
$$\forall x \forall y(x \cdot (Sy) = (x \cdot y) + x)$$

и схемы полной индукции

$$(\varphi(\mathbf{0}) \,\&\, \forall x(\varphi(x) \to \varphi(Sx))) \to \forall x \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ – произвольная формула со свободной переменной x.

Такая формализация аксиоматики Дедекинда – Пеано традиционно рассматривается как каноническая, хотя вообще говоря, она не является единственно возможной. Общепринято, что PA адекватно решает первые две задачи программы Гильберта. Для реализации этой программы необходимо решить третью задачу, т.е. доказать непротиворечивость PA финитными средствами. Напомним, что теория называется непротиворечивой, если в ней имеется хотя бы одна недоказуемая формула, или, что эквивалентно, в ней ни для какой формулы A не могут одновременно быть доказаны формулы A и $\neg A$. Какое же отношение к третьей задаче имеют теоремы Гёделя о неполноте?

В своей классической статье [Gödel, 1931] Гёдель вообще не ставит и не решает задачу доказательства непротиворечивости PA. Да и «гильбертовская формалистская точка зрения» упоминается им лишь один раз – на последней странице работы (цитата приведена в начале нашей статьи). Гёдель решает совсем другую задачу – задачу доказательства неполноты PA. Он решает эту задачу путем построения *неразрешимой* формулы, т.е. некоторой формулы A такой, что в PA не доказуемы ни A, ни $\neg A$. Уже сама постановка этой задачи подразумевает непротиворечивость PA, поскольку в противоречивой теории все формулы доказуемы, значит, в ней в принципе не может быть неразрешимых формул. Это различие в задачах Гильберта и Гёделя нельзя упускать из виду.

В доказательстве первой теоремы о неполноте Гёдель прибегает к некоему аналогу парадокса лжеца, а именно, строит формулу, «говорящую» о своей собственной недоказуемости. Но, как легко убедиться, в PA нет никаких выразительных средств (например, операторов доказуемости или недоказуемости), с помощью которых можно было бы непосредственно формализовать метаязыковые рассуждения о доказуемости и недоказуемости. Поэтому для того, чтобы заставить формулы языка арифметики «говорить» о своей собственной (не)доказуемости, следует как-то представить, выразить, формализовать обычные математические рассуждения о (не)доказуемости в языке PA. Следует понимать, что подобное представление, вообще говоря, может быть осуществлено самыми разными способами.

Гёдель использует две основные идеи:

(1) Арифметизация синтаксиса, т.е. кодирование языка формальной арифметики и её логики (гёделева нумерация). При кодировании языковым выражениям PA ставятся в соответствие числа (гёделевы номера) так, чтобы разным выражениям сопоставлялись различные числа, и по выбранному числу можно было бы эффективно восстановить выражение, номером которого данное число является.

(2) Введение понятия выразимости.

Определение. Предикат $F(x_1, \ldots, x_k)$, заданный на множестве натуральных чисел, называется *выразимым* (*определимым*, *представимым*, *формульным*, *формализуемым* – использующиеся в литературе синонимы) в PA, если в PA найдётся формула $\Phi(x_1, \ldots, x_k)$, такая что для любого набора натуральных чисел $(n_1, \ldots, n_k)$ справедливы условия

(1) если $F(n_1, \ldots, n_k)$ выполняется, то $\vdash \Phi(\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_k)$;

(2) если $F(n_1, \ldots, n_k)$ не выполняется, то $\vdash \neg\Phi(\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_k)$.

Здесь, как обычно, $\vdash$ означает доказуемость (в PA). Выражение $\ulcorner A \urcorner$ будет обозначать нумерал, соответствующий гёделеву номеру $\ulcorner A \urcorner$ формулы A.

Как видно из этого определения, смысл слова «выразимость» у Гёделя существенно отличается от обычного словоупотребления. Действительно, собственно арифметический смысл формулы, по гёделевски выражающей некоторый предикат, может не иметь ничего общего со смыслом выражаемого ею предиката. Например, формула $x = \mathbf{11}$ может «выражать» возраст четвероклассника, число карандашей в пенале, номер левой скобки в гёделевой нумерации и т. п. [Бессонов, 2014. С. 20–21]. Чтобы подчеркнуть это, когда речь пойдет о выразимости по Гёделю, мы будем использовать термин «G-выразимость». Также заметим, что данное определение является исчерпывающим, т. е. никаких дополнительных требований к предикату не предъявляется. Любой предикат, определенный на натуральных числах, для которого найдется удовлетворяющая условиям (1), (2) формула PA, по определению будет G-выразимым в PA.

Гёдель вводит *предикат доказуемости* (здесь и далее с точностью до обозначений) $\mathrm{Pr}(x, y)$, который выполняется тогда и только тогда, когда x является гёделевым номером некоторой формулы, а y – гёделевым номером ее доказательства. Этот предикат эффективно разрешим, его разрешающая процедура такова: возьмем пару натуральных чисел (x, y) и проверим, является ли x гёделевым номером формулы, а y – гёделевым номером доказательства. Если это верно, то восстановим формулу с номером x и доказательство с номером y. Доказательство представляет собой последовательность формул. Рассмотрим заключительную формулу этой последовательности и сравним ее с формулой под номером x. Если эти две формулы совпадают, то $\mathrm{Pr}(x, y)$ истинно.

Известно, что всякий заданный на натуральных числах предикат G-выразим в PA тогда и только тогда, когда он разрешим. Значит, $\mathrm{Pr}(x, y)$ G-выразим в PA с помощью некоторой арифметической формулы $\mathrm{Prov}(x, y)$, т. е. для любых натуральных чисел n, k верны условия:

(1) если $\mathrm{Pr}(n, k)$ выполняется, то $\vdash \mathrm{Prov}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{k})$;

(2) если $\mathrm{Pr}(n, k)$ не выполняется, то $\vdash \neg\mathrm{Prov}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{k})$.

Нужно понимать, что всегда, когда Гёдель и его последователи говорят о формализации в языке арифметики метаязыковых понятий таких, как (не)доказуемость, ими подразумевается использование G-выразимого предиката доказуемости.

3. Вторая догма и попытки ее преодоления

Напомним, что теория называется *ω-непротиворечивой*, если в ней ни для какой формулы Φ(x) с одной свободной переменной не могут одновременно быть доказаны формулы

$$\Phi(1), \Phi(2), \ldots, \neg\forall x \Phi(x).$$

В литературе имеются различные изложения теорем Гёделя о неполноте, отличающиеся как обозначениями, так и формулировками. В несколько упрощенном варианте, но достаточно близком к авторской формулировке, теоремы о неполноте таковы:

Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики [Gödel, 1931. Theorem VI]. Если PA ω-непротиворечива, то она неполна, т. е. в PA имеется некоторая замкнутая формула G такая, что ни она, ни ее отрицание не доказуемы в PA.

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики [Gödel, 1931. Theorem XI]. Если PA непротиворечива, то в ней не доказуема формула, G-выражаю-щая непротиворечивость PA.

В принятых выше обозначениях формула, G-выражающая непротиворечивость PA выглядит следующим образом:

$$\exists x \forall y \neg \mathrm{Prov}(x, y)\ . \qquad \text{(Consis)}$$

Consis читается как «имеется номер x формулы такой, что ни для какого номера вывода y, формула с номером x не является заключительной в выводе с номером y». Таким образом, Consis G-выражает факт существования в PA недоказуемой формулы, т. е. непротиворечивость PA. Во второй теореме доказывается ровно следующее: если PA непротиворечива, то Consis не может быть доказан в PA. Отсюда Гёдель немедленно делает вывод, что «непротиворечивость *P* (PA в нашем случае – *А.Б.*) недоказуема в *P* в предположении, что *P* непротиворечива» [Цит. по: Gödel, 1986. С. 193].

Именно такого рода «формализацию» имеет в виду фон Нейман, когда аргументирует неосуществимость программы Гильберта, апеллируя ко второй теореме. Его аргумент может быть реконструирован следующим образом. Доказательство непротиворечивости PA сводится к доказательству недоказуемости в PA какой-либо формулы, скажем с гёделевым номером n. Ее недоказуемость посредством предиката доказуемости G-выражается формулой $\forall y \neg \mathrm{Prov}(\boldsymbol{n}, y)$. Согласно тезису фон Неймана (всякое финитное доказательство формализуемо в PA), если бы существовало финитное доказательство недоказуемости в PA формулы с гёделевым номером n, формула $\forall y \neg \mathrm{Prov}(\boldsymbol{n}, y)$ оказалась бы доказуемой в PA. Но из $\vdash \forall y \neg \mathrm{Prov}(\boldsymbol{n}, y)$ по закону экзистенциального обобщения

$$F(t) \rightarrow \exists x F(x)$$

немедленно следовало бы $\vdash \exists x \forall y \neg \mathrm{Prov}(x, y)$, т.е. $\vdash$ Consis. А это противоречит второй теореме.

Очень важно понимать, что приведенная выше аргументация значима только в предположении, что формализация финитных доказательств в PA осуществляется исключительно посредством G-выразимого предиката доказуемости. А никакие другие способы формализации, например, с использованием каких-либо иных G-выразимых предикатов, ни фон Нейманом, ни Гёделем, ни остальными приверженцами второй догмы вообще не рассматриваются.

Исключительно через призму G-выразимого предиката доказуемости видят задачу и все те, кто, признавая вторую догму, пытаются обеспечить программе финитизма как можно большее жизненное пространство. Такого рода исследования связаны с различными модификациями программы Гильберта относительно ее оригинальной постановки. Литература, посвященная подобного рода модификациям гильбертовского финитизма, весьма обширна и у нас здесь нет возможности сколько-нибудь полно ее представить. Весьма репрезентативный обзор современного состояния дел в этой области содержится в работе [Zach, 2006]. Для нас важно то, что во всех упомянутых в этой работе модификациях программы Гильберта формализация финитных доказательств осуществляется исключительно посредством того или иного предиката доказуемости.

Представленные в литературе попытки в какой-то мере реабилитировать программу Гильберта интересны сами по себе развитой в них аргументацией и техническим аппаратом. Однако в плане оправдания программы финитного обоснования математики, на наш взгляд, подобные попытки представляют собой правильные шаги в неверном направлении. Ситуацию можно сравнить со стрельбой из пушки по воробьям. Мы покажем, что дезавуировать вторую теорему о неполноте в качестве решающего аргумента против реализуемости программы Гильберта можно самым прямым образом, не прибегая к окольным путям.

4. Вторая теорема Гёделя не опровергает программу Гильберта в ее оригинальной постановке

Очевидным следствием второй теоремы, является то, что для любой формулы A в PA не может быть доказано

$$\forall y \neg \mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner, y).$$

Действительно, из $\vdash \forall y \neg \mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner, y)$ по закону экзистенциального обобщения следовало бы $\vdash \exists x \forall y \neg \mathrm{Prov}(x, y)$, т.е. $\vdash$ Consis. Но это означает, что в PA ни для какой (ни для доказуемой, ни для недоказуемой) формулы невозможно доказать формулу, G-выражающую ее недоказуемость.

Напомним обычную аргументацию невозможности финитного доказательства непротиворечивости PA, основанную на второй теореме о неполноте. Предположим, что найдется финитное доказательство непротиворечивости PA. Поскольку любое финитное доказательство формализуемо в PA, данное гипотетическое финитное доказательство можно было бы формализовать в PA, в результате чего оказалась бы доказуемой формула, выражающая непротиворечивость PA. А это противоречило бы второй теореме о неполноте. Однако в подобного рода стандартной аргументации почти всегда упускается из виду то, что она значима лишь в предположении о непротиворечивости PA. Действительно, если бы PA была противоречивой системой, в ней была бы доказуема любая формула, в том числе и формула, выражающая непротиворечивость PA. Не случайно оригинальная гёделевская формулировка второй теоремы недвусмысленно предполагает непротиворечивость PA.

Конечно, мало кто сомневается в непротиворечивости PA, особенно при наличии генценовского доказательства ее непротиворечивости, хотя и полученного с использованием трансфинитной индукции, т. е. нефинитными методами. Но в предположении о непротиворечивости PA стандартная аргументация, основанная на второй теореме о неполноте, приводит к совершенно неприемлемым выводам.

Рассмотрим какую-нибудь доказуемую в PA формулу A. Поскольку PA непротиворечива, формула $\neg A$ в ней недоказуема. Теперь, повторив слово в слово стандартную аргументацию применительно не к гипотетическому финитному доказательству непротиворечивости PA, а к доказательству недоказуемости конкретной формулы $\neg A$, мы придем к выводу о невозможности финитного доказательства ее недоказуемости. Однако в действительности недоказуемость формулы $\neg A$ при условии непротиворечивости PA устанавливается элементарным финитным рассуждением от противного.

Приведенную аргументацию можно сформулировать более точно, заодно избавившись от ссылки на нефинитное генценовское доказательство непротиворечивости PA.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Вторая теорема Гёделя о неполноте вообще не может использоваться в доказательстве нереализуемости гильбертовской финитистской программы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. PA может быть или противоречивой, или непротиворечивой. Третьего не дано.

Пусть PA противоречива. Тогда вторая теорема о неполноте вообще не может быть применена, поскольку в ее формулировке содержится условие непротиворечивости PA.

Пусть PA непротиворечива. При этом не важно, имеется или нет какое-либо доказательство ее непротиворечивости. Рассмотрим формулу $\neg(\mathbf{0}=\mathbf{0})$ и повторим слово в слово стандартную аргументацию по отношению к этой формуле. Предположим, что найдется финитное доказательство невыводимости этой формулы в PA. Тогда формула $\forall y \neg \mathrm{Prov}(\ulcorner \neg(\mathbf{0}=\mathbf{0}) \urcorner, y)$, G-выражающая факт невыводимости формулы $\neg(\mathbf{0}=\mathbf{0})$, должна быть доказуемой в PA. Однако, согласно приведенному в начале параграфа следствию второй теоремы о неполноте, эта формула не может быть доказана в PA. Отсюда ровно на тех же основаниях, по которым обычно делается вывод о невозможности финитного доказательства непротиворечивости PA, мы вправе сделать вывод о несуществовании финитного доказательства невыводимости в PA формулы $\neg(\mathbf{0}=\mathbf{0})$ в предположении о непротиворечивости PA.

Однако недоказуемость формулы $\neg(\mathbf{0}=\mathbf{0})$ при условии непротиворечивости PA доказывается совершенно элементарно методом от противного. Предположим, что формула $\neg(\mathbf{0}=\mathbf{0})$ доказуема. Тогда, учитывая, что в PA доказуема также формула $(\mathbf{0}=\mathbf{0})$, следовало бы $\vdash(\mathbf{0}=\mathbf{0})\ \&\ \neg(\mathbf{0}=\mathbf{0})$, т. е. PA была бы противоречивой, что не соответствует предположению. И данное доказательство очевидно финитно! В нём никак не используются ни аксиома индукции, ни, тем более, трансфинитная индукция.

Мы пришли к противоречию: если PA непротиворечива, то из второй теоремы о неполноте следует несуществование финитного доказательства недоказуемости в PA формулы $\neg(\mathbf{0}=\mathbf{0})$. Но такое доказательство существует! Это означает, что основанная на второй теореме аргументация против осуществимости программы Гильберта изначально некорректна, поскольку из нее следует абсурдный вывод о невозможности финитного доказательства недоказуемости формулы $\neg(\mathbf{0}=\mathbf{0})$ в PA при условии непротиворечивости последней.

Таким образом, вторая теорема Гёделя о неполноте не может использоваться в доказательстве нереализуемости гильбертовской программы и при условии непротиворечивости PA, следовательно, она вообще не может использоваться в таком доказательстве. Доказательство утверждения закончено. Очевидно, что доказательство утверждения в целом также финитно.

5. Неадекватность гёделевой формализации и предикат недоказуемости

В предыдущем параграфе приведен пример явного расхождения между «самым обычным в математике» рассуждением и его формализацией в PA в гёделевском стиле. С одной стороны, имеется «самое обычное» финитное доказательство недоказуемости в PA формулы $\neg(\mathbf{0}=\mathbf{0})$ при условии непротиворечивости PA. С другой стороны, формула $\forall y \neg \mathrm{Prov}(\ulcorner\neg(\mathbf{0}=\mathbf{0})\urcorner, y)$, «формализующая» эту недоказуемость, не может быть доказана в PA, что следует из второй теоремы о неполноте. Но это однозначно свидетельствует о неадекватности гёделевской «формализации», о ее несоответствии реальным, «самым обычным в математике» рассуждениям.

Неадекватность гёделевской «формализации» обусловлена тем, что Гёдель, как и его последователи, видит представление реальных доказательств в PA исключительно посредством G-выразимого предиката доказуемости. Как указано выше, аргументация фон Неймана против программы Гильберта также неявно исходит из этой предпосылки. И никакие другие способы формализации ни фон Нейманом, ни Гёделем вообще не рассматриваются. Но почему для «формализации» в PA реальных доказательств недоказуемости необходимо использовать именно предикат доказуемости, а не какой-либо иной G-выразимый предикат? На этот вопрос ни Гёдель, ни другие авторы не дают ответа.

Скорее всего, подобная зашоренность объясняется тем, что вторая теорема воспринимается всеми исключительно как следствие первой, неразрешимая формула в которой строится с использованием предиката доказуемости. При этом от внимания исследователей ускользает различие в природе первой и второй теорем. На самом деле эти две теоремы относятся к совершенно разным задачам.

Первая теорема о неполноте решает задачу построения в PA неразрешимой формулы. Вторая же теорема очевидно решает другую задачу: доказать, что «арифметика, если она непротиворечива, не может доказать собственную непротиворечивость». Сам Гёдель строит Consis исходя из своей неразрешимой формулы G. Вторая теорема по сути состоит в доказательстве того, что в PA выводима импликация

$$\mathrm{Consis} \rightarrow \mathrm{G}.$$

Отсюда вытекает, что если бы формула Consis была доказуемой, то доказуемой была бы и формула G, что по первой теореме означало бы противоречивость PA. Но для доказательства недоказуемости в PA ее собственной непротиворечивости недостаточно рассмотреть только гёделев Consis. Необходимо доказать, что и любая другая G-выражающая непротиворечивость PA формула не выводима в PA. Решение же последней задачи вовсе не предполагает, что непротиворечивость PA непременно должна быть G-выражена посредством предиката доказуемости.

В предыдущих работах мы рассматривали различные предикаты *недоказуемости* [см.: Бессонов, 2011. С. 182–185; 2014. С. 26–28; 2015. С. 9–11]. Один из них – предикат NPr(x, y), который выполняется тогда и только тогда, когда x является гёделевым номером некоторой формулы, а y – гёделевым номером доказательства *отрицания* этой формулы (подобный предикат в IF логике использовали, например, Я. Хинтикка и Б. Каракадилар [Хинтикка, Каракадилар, 2006. С. 3–4]). Этот предикат разрешим (см. [Бессонов, 2015. С. 10]). Следовательно, он G-выразим в PA некоторой формулой NProv(x, y).

В PA выводима формула ($\mathbf{0} = \mathbf{0}$), следовательно, выводима и формула $\neg\neg$ ($\mathbf{0} = \mathbf{0}$), поскольку в PA $\vdash$ ($\mathbf{0} = \mathbf{0}$) ~ $\neg\neg$($\mathbf{0} = \mathbf{0}$). Пусть $\boldsymbol{k}$ – нумерал, соответствующий гёделеву номеру формулы $\neg$($\mathbf{0} = \mathbf{0}$), а $\boldsymbol{n}$ – нумерал, соответствующий гёделеву номеру вывода формулы $\neg\neg$($\mathbf{0} = \mathbf{0}$). Из определения предиката NPr(x, y) следует, что NPr(k, n) истинно. Тогда по условиям G-выразимости в PA доказуема формула NProv($\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{n}$). Применяя к этой формуле закон экзистенциального обобщения, получаем вывод формулы $\exists y$NProv($\boldsymbol{k}$, y), которая G-выражает доказуемость отрицания формулы $\neg$($\mathbf{0} = \mathbf{0}$), т. е., недоказуемость последней формулы в условиях непротиворечивости PA.

Таким образом, формула

$$\exists y \mathrm{NProv}(\ulcorner\neg(\mathbf{0} = \mathbf{0})\urcorner, y),$$

G-выражающая факт невыводимости формулы $\neg$($\mathbf{0} = \mathbf{0}$), доказуема в PA, а формула

$$\forall y \neg \mathrm{Prov}(\ulcorner\neg(\mathbf{0} = \mathbf{0})\urcorner, y),$$

G-выражающая тот же факт, не доказуема. Мы можем сделать вывод, что недоказуемость последней формулы свидетельствует не о невозможности финитного доказательства непротиворечивости PA, а о принципиальной неадекватности предиката доказуемости в плане формализации рассуждений о недоказуемости. И эта неадекватность относится не только к полемике вокруг второй догмы, но затрагивает также другие результаты о неразрешимости, основанные на второй теореме о неполноте.

6. Заключение

Вторая теорема Гёделя о неполноте зачастую связывается с поисками доказательства непротиворечивости PA. В этой работе мы, конечно, не предлагаем какое-либо доказательство непротиворечивости PA. Мы и не ставили эту задачу, полагая, что вторая теорема вряд ли вообще может использоваться в такого рода доказательстве, поскольку в ее формулировке условие непротиворечивости PA уже содержится. Этот вывод подкрепляет свидетельство Г. Крайзеля, который пишет: «Как подчеркивал сам Гёдель, …его вторая теорема о неполноте не имеет отношения ни к какой разумной постановке вопроса о непротиворечивости.» [Крайзель, 1988. С. 199].

В данной работе обсуждалась лишь *возможность* финитного доказательства непротиворечивости PA. При этом мы не доказывали и не доказали даже возможность такого доказательства. Все, что мы сделали, так это опровергли хрестоматийное положение, согласно которому вторая теорема Гёделя о неполноте свидетельствует о невозможности такого доказательства.

Данное положение безусловно относится к важнейшим в философии математики. В его сетях запутался сам Гёдель ошибочно, как мы убедились, связав вторую теорему с аргументацией против осуществимости гильбертовской финитистской программы. Об это положение споткнулись философы и логики с такими громкими и свехгромкими именами, как Дж. фон Нейман, П. Бернайс, С.К. Клини, К. Сморинский, П.Дж. Коэн и многие, многие другие. Да и сам Д. Гильберт воспринял аргументацию фон Неймана всерьез, как сигнал о необходимости пересмотра доктрины финитизма в ее оригинальном понимании. Он пишет: «…Я хотел бы подчеркнуть, что возникшее на определенное время мнение, будто из некоторых недавних результатов Гёделя следует неосуществимость моей теории доказательств, является заблуждением. Этот результат на самом деле показывает только то, что для более глубоких доказательств непротиворечивости финитная точка зрения должна быть использована некоторым более сильным образом, чем это оказалось необходимым при рассмотрении элементарных формализмов.» [Гильберт, 1979. С. 19].

Мы показали, что результат Гёделя никак не вынуждает использование финитной точки зрения «некоторым более сильным образом». Доказанное нами утверждение свидетельствует о том, что вторая теорема Гёделя вообще не применима в аргументации против осуществимости гильбертовской программы в ее оригинальной формулировке. Перефразируя высказывание Крайзеля, теперь мы вправе сказать, что вторая теорема о неполноте не имеет отношения ни к какой разумной постановке вопроса о реализуемости гильбертовской программы финитного обоснования математики.

Подводя итог обеим частям работы, мы можем заключить, что обе обсуждаемые догмы не верны. Арифметика вполне может доказать свою непротиворечивость: в ней имеется формула, выражающая ее непротиворечивость, и эта формула доказуема. Вторая теорема Гёделя о неполноте не только не является решающим аргументом против реализуемости программы Гильберта, но вообще не может корректно использоваться в подобной аргументации.

Примечания

1. *Бессонов А.В.* К интерпретации теорем Гёделя о неполноте арифметики // Вестник ТГУ, Сер. философия, социология, политология. 2011. № 4. С. 177–189.

2. *Бессонов А.В.* О двух неверных догмах, связанных со второй теоремой Гёделя о неполноте. I // Философия науки. 2014. № 4(63). С. 12–31.

3. *Бессонов А.В.* Предикатная зависимость второй теоремы Гёделя о неполноте // Вестник НГУ, Сер. философия. 2015. Т. 13. – Вып. 4. С. 5–14.

4. *Беклемишев Л.Д.* Теоремы Гёделя о неполноте и границы их применимости. I // Успехи математических наук. 2010. Т. 65. Вып. 5(395). С. 61–90.

5. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Т. 1. Логические исчисления и формализация арифметики. М.: Наука, 1979.

6. *Ершов Ю.Л., Целищев В.В.* Алгоритмы и вычислимость в человеческом познании. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2012.

7. *Карри* Х.Б. Основания математической логики. М.: Мир, 1969.

8. *Клини С.К.* Математическая логика. М.: Мир, 1967.

9. *Крайзель Г.* Биография Курта Гёделя // Успехи математических наук. 1988. Т. 43. Вып. 2(260). С. 175–216.

10. *Коэн П.Дж.* Об основаниях теории множеств // Успехи математических наук. 1974. Т. 29. Вып. 5. С. 169–176.

11. *Михайлова Н.В.* Программа формализма Гильберта как работающее философское направление обоснования математики // Российский гуманитарный журнал. 2015. Т. 4. № 6. С. 534–545.

12. *Михайлова Н.В.* Системный синтез программ обоснования современной математики. Минск: МГВРК. 2008.

13. *Подниекс К.М.* Вокруг теоремы Геделя. Рига: Зинатне, 1992.

14. *Сморинский К.* Теоремы о неполноте / Барвайс Дж. (ред.). Справочная книга по математической логике. Т. IV. Теория доказательств и конструктивная математика. М.: Наука, 1983. С. 9–53.

15. *Трулстра* А.С. Введение / Барвайс Дж. (ред.). Справочная книга по математической логике. Т. IV. Теория доказательств и конструктивная математика. М.: Наука, 1983. С. 7–8 .

16. *Френкель А.А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. М.: Мир, 1966.

17. *Gödel K.* Ьber formal unentscheidbare Sдtze der Principia Mathematica und verwand-ter Systeme I // Monatshefte fьr Mathematik und Physik. 1931. Bd. 38. S. 173–198.

18. *Gödel K.* On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems I // S. Feferman, J.R. Dawson, S.C. Kleene et al. (eds.). Kurt Gödel. Collected Works. Vol. 1. New York: 1986. P. 144–195.

19. *Hintikka Ja., Karakadilar B.* How to Prove the Consistency of Arithmetic // Acta Philosophica Fennica. 2006. Vol. 78. P. 1–15.

20. *Raatikainen P.* Hilbert's Program Revisited // Synthese. 2003. Vol. 137. P. 157 – 177.

21. *Zach R.* Hilbert's Program // E.N. Zalta (ed.). The Stanford Encyclopedia of Philosophy // URL:

http://plato.stanford.edu/archives/fall2003/entries/hilbert-program. Дата обращения 15.05.2016.

22. См.: *Zach, R.* Hilbert's Program Then and Now / D. Jacquette (ed.). Handbook of Philosophy of Science. Vol. 5. Philosophy of Logic. Amsterdam: Elsevier, 2006. P. 411–447.

References

1. *Bessonov A. V.* K interpretatsii teorem Gedelya o nepolnote arifmetiki. [Toward an Interpretation of Gödel's Incompleteness Theorems] // Vestnik tomskogo gos. universiteta, Ser. filosofiya, sotsiologiya, politologiya. [Tomsk State University Journal of Philosophy, Sociology and Political Science] 2011. № 4. S. 177–189. (In Russ.).

2. *Bessonov A.V.* O dvukh nevernykh dogmakh, svyazannykh so vtoroi teoremoi Gedelya o nepolnote. I. [Two False Dogmas Related with Gödel's Second Incompleteness Theorem. I] // Philosophiya nauki. [Philosophy of Science] 2014. № 4(63). S. 12–31. (In Russ.).

3. *Bessonov A. V.* Predikatnaya zavisimost' vtoroi teoremy Gedelya o nepolnote. [Gödel's Second Incompleteness Theorem is Predicate Dependent] // Vestnik novosibirskogo gos. universiteta. Ser. philosophiya. [Vestnik of Novosibirsk State University. Ser. Philosophy] 2015. Vol. 13. № 4. S. 5–14. (In Russ.).

4. *Beklemishev L.D.* Teoremy Gedelya o nepolnote i granitsy ikh primenimosti. I. [Gцdel's Incompleteness Theorems and Limits of Their Applicability] // Uspekhi matematicheskikh nauk. [Russian Mathematical Surveys] 2010. Vol. 65. Vyp. 5(395). S. 61–90. (In Russ.).

5. *Hilbert D., Bernays P.* Osnovaniya matematiki. T. 1. Logicheskie ischisleniya i formalizatsiya arifmetiki. [Foundations of Mathematics. Vol. 1. Logical Calculus and Formalization of Arithmetic] M.: Nauka, 1979. (In Russ.).

6. *Ershov Yu.L., Tselishchev V.V.* Algoritmy i vychislimost' v chelovecheskom poznanii. [Algorithms and Computability in Human Cognition] Novosibirsk: SB RAS Publishing House, 2012. (In Russ.).

7. *Curry H.B.* Osnovaniya matematicheskoi logiki. [Foundations of Mathematical Logic] M.: Mir, 1969. (In Russ.).

8. *Kleeni S.C.* Matematicheskaya logika. [Mathematical Logic] M.: Mir, 1967. (In Russ.).

9. *Kraizel G.* Biografiya Kurta Gedelya (ch. I, II). [Biography of Kurt Gödel (parts I and II)] // Uspekhi Matematicheskikh Nauk. [Russian Mathematical Surveys] 1988. Vol. 43. Vyp. 2(260). S. 175–216 (In Russ.).

10. *Kohen P.J.* Ob osnovaniyakh teorii mnozhestv. [Foundations of set theory] // Uspekhi matematicheskikh nauk. [Russian Mathematical Surveys] 1974. Vyp. 29. No. 5. S. 169–176 (In Russ.).

11. *Mikhailova N.V.* Programma formalizma Gil'berta kak rabo-tayushchee filosofskoe napravlenie obosnovaniya matematiki. [Hilbert' Formalism as Working Philosophical Direction of Mathematic Foundation] // Rossiiskii gumanitarnyi zhurnal. [Liberal Arts in Russia] 2015. T. 4. № 6. S. 534–545. (In Russ.).

12. *Mikhailova N.V.* Sistemnyi sintez programm obosnovaniya sovremennoi matematiki. [System Synthesis of Modern Mathematic Foundation Programs] Minsk: MGVRK, 2008. (In Russ.).

13. *Podnieks K.M.* Vokrug teoremy Gedelya. [Around Gedel's Theorem] Riga: Zinatne, 1992. (In Russ.).

14. *Smorinskii K.* Teoremy o nepolnote. [Incompleteness Theorems] / Barwise J. (ed.). Spravochnaya kniga po matematicheskoi logike. T. IV. Teoriya dokazatel'stv i konstruktivnaia mate-

matika. [Handbook of Mathematical Logic, Vol. 4. Proof Theory and Constructive Mathematics] M.: Nauka, 1983. (In Russ.).

15. *Troelstra A.S.* Vvedenie. [Introduction] / Barwise J. (ed.). Spravochnaya kniga po matematicheskoi logike. T. IV. Teoriya dokazatel'stv i konstruktivnaya matematika. [Handbook of Mathematical Logic, Vol. 4. Proof Theory and Constructive Mathematics] M.: Nauka, 1983. S. 7–8. (In Russ.).

16. *Fraenkel A.A., Bar-Hhillel Y.* Osnovaniya teorii mnozhestv. [Foundations of Set Theory] M.: Mir, 1966. (In Russ.).

17. *Gödel K.* Ьber formal unentscheidbare Sдtze der Principia Mathematica und verwand-ter Systeme I // Monatshefte fьr Mathematik und Physik. 1931. Bd. 38. S. 173–198.

18. *Gödel K.* On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems I / S. Feferman, J.R. Dawson, S.C. Kleene, et al. (eds). Kurt Gödel. Collected Works. Vol. 1. New York: 1986. P. 144–195.

19. *Hintikka Ja., Karakadilar B.* How to Prove the Consistency of Arithmetic // Acta Philosophica Fennica. 2006. Vol. 78. P. 1–15.

20. *Raatikainen P.* Hilbert's Program Revisited // Synthese. 2003. Vol. 137. P. 157–177.

21. *Zach R.* Hilbert's Program / E.N. Zalta (ed.). The Stanford Encyclopedia of Philosophy // URL: http://plato.stanford.edu/archives/fall2003/entries/hilbert-program. (Data 15.05.2016).

22. *Zach, R.* Hilbert's Program Then and Now / D. Jacquette (ed.). Handbook of Philosophy of Science. Vol. 5. Philosophy of Logic. Amsterdam: Elsevier, 2006. P. 411–447.

Дата поступления 23.05.2016