

ДИССИПАЦИЯ МОЩНОСТИ И КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТЯХ РАЗРЫВА СКОРОСТЕЙ В СЖИМАЕМОМ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОМ МАТЕРИАЛЕ

И. С. Дегтярев, В. Л. Колмогоров

(Свердловск)

Рассматриваются волновые поверхности сильного разрыва скоростей в изотропном сжимаемом жестко-пластическом материале.

Для ассоциированных законов пластического течения [1, 2] выводятся формулы для определения диссипации мощности, доказывается непрерывность компонент тензора напряжений и устанавливаются ограничения на возможные разрывы скоростей на этих поверхностях.

В качестве приложения полученных формул рассматривается задача о выдавливании сжимаемого материала из контейнера через гладкую клиновую матрицу.

1. Будем рассматривать трехмерное жестко-пластическое тело, условие пластичности которого имеет вид

$$S_{ij}S_{ij} = 2k^2 \quad (S_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3\sigma_{kk}\delta_{ij}) \quad (1.1)$$

где σ_{ij} — тензор напряжений, S_{ij} — девиатор тензора напряжений, k — физическая константа материала, δ_{ij} — символ Кронекера. Допустим, что для рассматриваемого материала определена зависимость

$$e = \varphi(\sigma) \quad (e = 1/3e_{kk}, \sigma = 1/3\sigma_{kk}) \quad (1.2)$$

Здесь e_{ij} — компоненты тензора деформации.

Тогда из обобщенной теоремы Мизеса [1] следует:

$$\varepsilon_{ij}' = \lambda S_{ij} \quad (\lambda = H/2k, \varepsilon_{ij}' = \varepsilon_{ij} - 1/3\varepsilon_{kk}\delta_{ij}) \quad (1.3)$$

где ε_{ij} — тензор скоростей деформации, ε_{ij}' — девиатор тензора скоростей деформации, $H = (2\varepsilon_{ij}'\varepsilon_{ij}')^{1/2}$ — интенсивность скоростей деформации сдвига.

В физических уравнениях (1.3) величина скорости объемного изменения ε находится дифференцированием зависимости (1.2) по времени, т. е.

$$\varepsilon = \frac{d\varphi}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt} \quad (1.4)$$

2. Предположим, что в материале с описанными выше свойствами существует поверхность Σ , заданная уравнением $f(x_i, t) = 0$, на которой скорости перемещения v_i претерпевают скачки.

Обозначим через v_0 компоненту скорости перемещения поверхности Σ в направлении своей внешней нормали n , а через v_n — проекцию вектора скорости частиц среды на направление этой нормали.

Так как стационарные разрывы скорости противоречат условию сплошности среды, то будем считать $v_n \neq v_0$. Допустим, что материал движется через поверхность Σ со скоростью $v_n > v_0$.

Известно [3], что на поверхности Σ скорости деформации удовлетворяют соотношениям

$$\varepsilon_{ij} = \psi([v_i]n_j + [v_j]n_i) \quad (2.1)$$

Здесь ψ — некоторый множитель пропорциональности, $[v_i] = v_i^+ - v_i^-$ — разность значений скорости, взятых на каждой из сторон поверхности Σ , n_i — проекции вектора единичной нормали к этой поверхности на прямоугольные декартовы оси координат x_i .

Определим в некоторой точке поверхности Σ (фиг. 1) локальную систему координат (x, y, z) таким образом, чтобы нормаль n совпадала с направлением оси z .

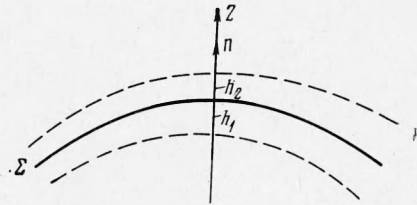
Тогда для направляющих косинусов n_i получаем равенства

$$n_x = n_y = 0, n_z = 1 \quad (2.2)$$

Из соотношений (1.4), (2.1), (2.2) следует:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yy} = 0, \varepsilon_{xz} = \psi [v_x] \neq 0 \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_{yx} = \psi [v_y] \neq 0, \varepsilon_{zz} = 2\psi [v_z] \neq 0$$



Фиг. 1

Отсюда вытекает, что в сжимаемом материале наряду с разрывами касательных к поверхности Σ компонент скорости возможен также и разрыв ее нормальной компоненты.

Предположим, что на поверхности Σ терпят разрыв напряжения σ_{ij} . Контактующие напряжения на этой поверхности должны быть непрерывны, т. е.

$$[\sigma_{ij}]n_j = 0 \quad ([\sigma_{ij}] = \sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^-) \quad (2.4)$$

В локальной системе координат (2.2) соотношения (2.4) дают равенства

$$[\sigma_{xz}] = [\sigma_{yz}] = [\sigma_{zz}] = 0 \quad (2.5)$$

Из соотношений (2.3), (2.5) следует, что на поверхности Σ выполняется равенство

$$[\sigma_{ij}]\varepsilon_{ij} = 0 \quad (2.6)$$

Для условия текучести (1.1) из принципа максимума скорости диссипации механической энергии следует:

$$[\sigma_{ij}] \varepsilon_{ij} > 0 \quad (2.7)$$

Сравнивая (2.6) и (2.7), заключаем, что на поверхности Σ выполняется равенство

$$[\sigma_{ij}] = 0$$

Последнее означает, что для выпуклых условий текучести на поверхности разрыва скорости в сжимаемом материале напряжения непрерывны.

Диссипация мощности для тонкого переходного слоя, в котором скорости v_i претерпевают резкие, но непрерывные изменения, имеет вид

$$D = \int_{\omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\omega = \int_{\Sigma} \int_{-h_1}^{h_2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dz d\Sigma \quad (2.8)$$

где ω — объем бесконечно тонкого слоя.

Так как напряжения σ_{ij} непрерывны на поверхности Σ , то гидростатическое давление также непрерывно на Σ , а следовательно, постоянно по толщине слоя.

Учитывая этот факт, а также соотношения (1.1), (1.2), из формулы (2.8) находим

$$D = k \int_{\Sigma} \int_{-h_1}^{h_2} (2\varepsilon_{ij}' \varepsilon_{ij}')^{1/2} dz d\Sigma + 3 \int_{\Sigma} \sigma \int_{-h_1}^{h_2} \varepsilon dz d\Sigma \quad (2.9)$$

Из работы [4] известно, что во многих случаях процесс деформации можно характеризовать условиями

$$\begin{aligned}(v_x - v_x^-) \frac{\partial v_y}{\partial z} &= (v_y - v_y^-) \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ (v_y - v_y^-) \frac{\partial v_z}{\partial z} &= (v_z - v_z^-) \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ (v_z - v_z^-) \frac{\partial v_x}{\partial z} &= (v_x - v_x^-) \frac{\partial v_z}{\partial z}\end{aligned}\quad (2.10)$$

Разрешая систему трех дифференциальных уравнений (2.10) относительно неизвестных функций v_x, v_y, v_z , находим

$$v_x = C + \kappa(z), v_y = C_1 + C_2 \kappa(z), v_z = C_3 + C_1 \kappa(z) \quad (2.11)$$

где константы C, C_1, C_3 имеют значения

$$C = v_x^-, C_1 = v_y^-, C_3 = v_z^-$$

Условия на границах слоя запишутся в виде равенств

$$\kappa(-h_1) = 0, \kappa(h_2) = [v_x], C_2 \kappa(h_2) = [v_y], C_1 \kappa(h_2) = [v_z] \quad (2.12)$$

Принимая во внимание соотношения (2.3), (2.11), (2.12), из (2.9) получаем формулу для определения диссипации мощности на поверхности разрыва скоростей в сжимаемом жестко-пластическом материале

$$D = \frac{k}{\sqrt{3}} \int_{\Sigma} \{3(v_x^+ - v_x^-)^2 + 3(v_y^+ - v_y^-)^2 + 4(v_z^+ - v_z^-)^2\}^{1/2} d\Sigma + \int_{\Sigma} \sigma [v_z] d\Sigma \quad (2.13)$$

3. Рассмотрим деформирующийся материал, предельное состояние которого определено в виде

$$S_{ij} S_{ij} = 2(k - \theta \sigma)^2 \quad (\sigma \leq k/\theta) \quad (3.1)$$

Здесь θ — физико-механическая константа материала.

Ассоциированный закон пластического течения примем в виде [2]

$$\varepsilon_{ij} = \lambda' (\theta \delta_{ij} + S_{ij} / 2 \sqrt{S_{ij} S_{ij} / 2}) \quad (\lambda' = \sqrt{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} / (3\theta^2 + 1/2)}) \quad (3.2)$$

Используя соотношения (2.8), (3.1), (3.2), диссипацию мощности для тонкого переходного слоя на поверхности Σ представим выражением

$$D = \frac{k}{(3\theta^2 + 1/2)^{1/2}} \int_{\Sigma} \int_{-h_1}^{h_2} (\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij})^{1/2} dz d\Sigma \quad (3.3)$$

Из последнего выражения, учитывая (2.3), (2.11), (2.12), получим

$$D = \frac{k}{(6\theta^2 + 1)^{1/2}} \int_{\Sigma} \{(v_x^+ - v_x^-)^2 + (v_y^+ - v_y^-)^2 + 2(v_z^+ - v_z^-)^2\}^{1/2} d\Sigma \quad (3.4)$$

Формулы (2.13), (3.4) являются обобщением известных выражений [5,6] для определения диссипации мощности на поверхностях разрыва скоростей на случай деформирования сжимаемого материала.

Отметим, что формулы (2.13), (3.4) получены для двух типов пластической сжимаемости материала, носящих совершенно различный характер.

Сжимаемость, фигурирующая при выводе формулы (2.13), полностью определяется из экспериментов на всестороннее равномерное сжатие.

Используемая при выводе формулы (3.4) сжимаемость существенно связана с формоизменением материала и никак не определяется из экспериментов на всестороннее равномерное сжатие.

В случае плоскодеформирующегося сжимаемого материала условие пластичности (3.1) приобретает форму [2]

$$f = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \sin \varphi^0 + \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 / 4 + \sigma_{12}^2} - c^0 \cos \varphi^0 = 0$$

$$\left(c^0 = \frac{k}{(1 - 12\theta^2)^{1/2}}, \quad \sin \varphi^0 = \frac{3\theta}{(1 - 3\theta^2)^{1/2}}, \quad \cos \varphi^0 = \left(\frac{1 - 12\theta^2}{1 - 3\theta^2} \right)^{1/2} \right) \quad (3.5)$$

Предполагая существование в материале линии разрыва скоростей L , диссипацию мощности для тонкого переходного слоя на линии L с учетом (3.2), (3.5) представим в виде

$$D = \frac{c^0 \cos \varphi^0}{(1 + \sin^2 \varphi^0)^{1/2}} \int_S (2\varepsilon_{xx}^2 + 2\varepsilon_{yy}^2 + 4\varepsilon_{xy}^2)^{1/2} dS \quad (3.6)$$

Здесь S — площадь бесконечно тонкого слоя.

Распространяя все сказанное выше при выводе формул (2.13), (3.4) на случай плоскодеформирующегося материала, из формулы (3.6) получаем выражение для диссипации мощности на линии разрыва L

$$D = \frac{c^0 \cos \varphi^0}{(1 + \sin^2 \varphi^0)^{1/2}} \int_L \{(v_x^+ - v_x^-)^2 + 2(v_y^+ - v_y^-)^2\}^{1/2} dL \quad (3.7)$$

4. Следуя [7], определим соотношения на поверхности разрыва скоростей, устанавливающие ограничения на возможные разрывы вектора скорости, которые возникают при течении частиц сжимаемого материала через поверхность Σ .

Для этого умножим соотношения (2.1) на n_j . Тогда будем иметь

$$\psi [v_i] = \varepsilon_{ik} n_k - \psi [v_j] n_j n_i \quad (4.1)$$

Подставляя значение скачка $[v_i]$ из (4.1) в соотношения (2.1) и учитывая сжимаемость материала, находим

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ik} n_j n_k + \varepsilon_{jk} n_i n_k - \varepsilon_{kk} n_i n_j \quad (4.2)$$

Пусть $x_i = x_i(t_\alpha)$ ($i = 1, 2, 3$) — параметрические уравнения поверхности Σ , t_α ($\alpha = 1, 2$) — криволинейные координаты на этой поверхности. Тогда частные производные скорости v_i по координатам x_j можно представить в виде [8]

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{dv_i}{dn} n_j + g^{\alpha\beta} \frac{\partial v_i}{\partial t_\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial t_\beta} \quad (4.3)$$

где dv_i / dn — производная скорости v_i по нормали n к поверхности Σ , $g^{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) — контравариантный метрический тензор поверхности Σ .

Подставляя значения частных производных $\partial v_i / \partial x_j$ из (4.3) в соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i})$$

имеем

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{dv_i}{dn} n_j + \frac{dv_j}{dn} n_i \right) + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial v_i}{\partial t_\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial t_\beta} + \frac{\partial v_j}{\partial t_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial t_\beta} \right) \quad (4.4)$$

Приравняв в последних соотношениях индексы i и j , находим

$$\frac{dv_i}{dn} n_i = \varepsilon_{kk} - g^{\alpha\beta} \frac{\partial v_i}{\partial t_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial t_\beta} \quad (4.5)$$

Используя соотношения (4.4), (4.5), для производной dv_i / dn получаем выражение

$$\frac{dv_i}{dn} = 2\varepsilon_{ik} n_k + g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial v_j}{\partial t_\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial t_\beta} n_i - \frac{\partial v_k}{\partial t_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial t_\beta} n_k \right) - \varepsilon_{kk} n_i \quad (4.6)$$

Подставим значения dv_i / dn из (4.6) в соотношения (4.4).

Тогда, используя соотношения (4.2) и проводя некоторые преобразования, получим систему дифференциальных уравнений, которой должны удовлетворять компоненты вектора скорости на поверхности Σ

$$g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial v_i}{\partial t_\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial t_\beta} + \frac{\partial v_j}{\partial t_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial t_\beta} \right) = g^{\alpha\beta} \frac{\partial v_k}{\partial t_\alpha} n_k \left(\frac{\partial x_i}{\partial t_\beta} n_j + \frac{\partial x_j}{\partial t_\beta} n_i \right) \quad (4.7)$$

Умножим соотношения (4.7) на $\partial x_i / \partial t_\tau$, $\partial x_j / \partial t_\sigma$.

Тогда, учитывая известное тождество [8]

$$g^{\alpha\beta} \frac{\partial x_i}{\partial t_\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial t_\beta} = \delta_{ij} - n_i n_j$$

на поверхности Σ получим три независимых соотношения, которые в разрывах примут вид

$$\frac{\partial [v_i]}{\partial t_\sigma} \frac{\partial x_i}{\partial t_\tau} + \frac{\partial [v_j]}{\partial t_\tau} \frac{\partial x_j}{\partial t_\sigma} = 0 \quad (4.8)$$

Соотношения (4.8) устанавливают ограничения на возможные изменения разрывов компонент вектора скорости перемещения на поверхности Σ .

5. В качестве приложения полученных соотношений (3.7), (4.8) рассмотрим установившийся процесс выдавливания сжимаемого жестко-пластического материала из контейнера через гладкую клиновую матрицу (фиг. 2).

Принимая линии l_1 и l_2 за линии разрыва скоростей, будем предполагать, что в тонких переходных слоях, представляющих собой линии разрыва l_1 и l_2 , материал в процессе пластического течения испытывает интенсивное изменение объема, а после прохождения [указанных линий, в областях II и III, движется подобно жесткому телу.

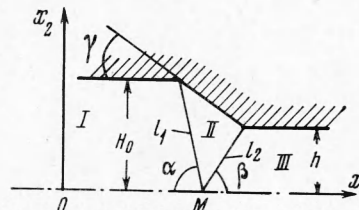
Предполагаем также, что при движении в области I материал не получает пластических деформаций.

Согласно этим предположениям выберем кинематически допустимое поле скоростей в областях I, II, III соответственно в виде

$$v_1 = a_1, v_2 = 0; v_1 = a_2 \cos \gamma, v_2 = -a_2 \sin \gamma; v_1 = a_3, v_2 = 0 \quad (5.1)$$

Здесь a_1 — скорость подачи материала в очаг деформации.

Так как происходит протекание материала из области I в область II и из области II в область III, определим диссипацию мощности на линиях разрыва l_1 и l_2 .



Фиг. 2

Для этого обозначим через v_n нормальную, а через v_t — касательную составляющие скорости на линиях l_1 и l_2 .

На линии разрыва l_1 величины скачков нормальной и касательной компонент скорости равны

$$\begin{aligned} [v_n] &= \{(a_2 \cos \gamma - a_1) \operatorname{tg} \alpha - a_2 \sin \gamma\} \cos \alpha \\ [v_t] &= \{(a_2 \cos \gamma - a_1) \operatorname{ctg} \alpha + a_2 \sin \gamma\} \sin \alpha \end{aligned} \quad (5.2)$$

Подставляя из (5.2) в формулу (3.7) значения разрывов соответствующих компонент и интегрируя, получаем диссипацию мощности на линии l_1

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{H_0}{\sin \alpha} \frac{c^\circ \cos \varphi^\circ}{(1 + \sin^2 \varphi^\circ)^{1/2}} \{[(a_2 \cos \gamma - a_1) \operatorname{ctg} \alpha + a_2 \sin \gamma]^2 \sin^2 \alpha + \\ &\quad + 2 [(a_2 \cos \gamma - a_1) \operatorname{tg} \alpha - a_2 \sin \gamma] \cos^2 \alpha\}^{1/2} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Для касательной и нормальной составляющих скорости на линии разрыва l_2 имеем

$$\begin{aligned} [v_n] &= \{(a_2 \cos \gamma - a_3) \operatorname{tg} \beta + a_2 \sin \gamma\} \cos \beta \\ [v_t] &= \{(a_3 - a_2 \cos \gamma) \operatorname{ctg} \beta + a_2 \sin \gamma\} \sin \beta \end{aligned} \quad (5.4)$$

Из формулы (3.7) после подстановки значений соответствующих скачков, определенных в (5.4), и интегрирования получаем

$$\begin{aligned} D_2 &= \frac{h}{\sin \beta} \frac{c^\circ \cos \varphi^\circ}{(1 + \sin^2 \varphi^\circ)^{1/2}} \{[(a_3 - a_2 \cos \gamma) \operatorname{ctg} \beta + a_2 \sin \gamma]^2 \sin^2 \beta + \\ &\quad + 2 [(a_2 \cos \gamma - a_3) \operatorname{tg} \beta + a_2 \sin \gamma]^2 \cos^2 \beta\}^{1/2} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Помещая начало декартовой системы координат x_1, x_2 в точку M , получим параметрический вид линий разрыва l_1 и l_2 соответственно

$$x_1 = k_1 t, \quad x_2 = k_2 t; \quad x_1 = k_3 t, \quad x_2 = k_4 t \quad (5.6)$$

Здесь t — произвольный параметр, k_m ($m = 1, 2, 3, 4$) — константы, удовлетворяющие условиям

$$k_1 / k_2 = -\operatorname{tg} \alpha, \quad k_3 / k_4 = \operatorname{tg} \beta \quad (5.7)$$

Кинематические соотношения (4.8) с учетом (5.6), (5.7) после интегрирования примут вид

$$[v_1] - [v_2] \operatorname{tg} \alpha = b_1, \quad [v_1] + [v_2] \operatorname{tg} \beta = b_2 \quad (5.8)$$

Для определения произвольных постоянных b_1 и b_2 воспользуемся очевидным условием, вытекающим из симметрии задачи и накладывающим ограничения на разрывы скоростей в точке M

$$[v_1] = a_3 - a_1, \quad [v_2] = 0 \quad (5.9)$$

С учетом (5.9)

$$b_1 = b_2 = a_3 - a_1 \quad (5.10)$$

Используя соотношения (5.1), (5.8), (5.10), находим

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 / (\cos \gamma - \sin \gamma \operatorname{tg} \beta) \\ a_3 &= a_1 (\cos \gamma + \sin \gamma \operatorname{tg} \alpha) / (\cos \gamma - \sin \gamma \operatorname{tg} \beta) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Пренебрегая трением на стенках контейнера, из равенства мощностей внешних и внутренних сил находим

$$Pa_1 = 2(D_1 + D_2) \quad (5.12)$$

где P — усилие выдавливания.

Принимая во внимание соотношения (5.3), (5.5), (5.11), из (5.12) определяем величину усилия выдавливания

$$P = \frac{2C^0 \cos \varphi^0}{(1 + \sin^2 \varphi^0)^{1/2} (\operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{tg} \beta)} \{H_0 [(1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \alpha)^2 + 2(\operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{ctg}^2 \alpha)]^{1/2} + h [(\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1)^2 + 2(\operatorname{ctg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \alpha)]^{1/2}\} \quad (5.13)$$

Из геометрических построений (фиг. 2) нетрудно получить соотношение

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{H_0 - h}{H_0} \operatorname{ctg} \gamma - \frac{h}{H_0} \operatorname{ctg} \beta \quad (5.14)$$

С помощью соотношения (5.14) можно исключить из формулы (5.13) угол α и из условия минимума усилия выдавливания определить величину угла β .

Поступила 12 X 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. И в л е в Д. Д., М а р т ы н о в а Т. Н. Об учете сжимаемости в теории идеально-пластических сред. ПММ, 1961, т. 25, вып. 6.
2. D r u s k e r D. C., P r a g e r W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design. Quart. Appl. Math., 1952, vol. 10, No. 2.
3. H i l l R. Discontinuity relations in mechanics of solids. Progress in Solid Mechanics, vol. 2, Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1961. (Рус. перев.: Механика, сб. перев. 1963, № 3.)
4. N a d a i A. Plastic behavior of metals in the strain-hardening range, pt 1. J. Appl. Phys., 1937, vol. 8, No. 2.
5. К а ч а н о в Л. М. Основы теории пластичности. М., Гостехиздат, 1956.
6. Х и л л Р. Математическая теория пластичности. М., Гостехиздат, 1956.
7. Б ы к о в ц е в Г. И., М ы с н я н к и н Ю. М. О поверхностях скольжения в трехмерных жестко-пластических телах. Докл. АН СССР, 1966, т. 167, № 6.
8. Т о м а с Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., «Мир», 1964.