ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА И ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, 1995, т. 36, № 3

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ В ЗАПОЛНИТЕЛЕ

В. М. Ермоленко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Уравнения устойчивости трехслойных пластин с учетом поперечных деформаций в заполнителе получены в [1], они дают возможность исследовать местную потерю устойчивости несущих слоев, которая может произойти при меньшей критической нагрузке, чем общая форма. Вопрос о динамической потере устойчивости трехслойных пластин и стержней более интересен с практической точки зрения. Являясь элементами конструкций, работающих при динамических нагрузках, приложенных в их плоскости, трехслойные пластины и стержни требуют учета возможности обеих форм потери устойчивости.

В данной работе вариационным методом получены уравнения и граничные условия задачи о динамической устойчивости трехслойных пластин. Примененный метод позволяет установить полное соответствие между силовыми и кинематическими факторами, получить корректные граничные условия.

Используем принятую в [1] систему обозначений. Координатная плоскость x_1x_2 совмещена со срединной поверхностью заполнителя. Размеры пластины вдоль краев обозначаем l_1, l_2; h_1, h_2, $h_3 = 2c$ — соответственно толщины несущих слоев и заполнителя. Для несущих слоев применяется гипотеза Кирхгофа, заполнитель рассматривается как трансверсально-изотропное упругое тело с плоскостью изотропии, параллельной его срединной плоскости.

Перемещения w^3 по толщине заполнителя изменяются по линейному закону

$$w^3 = \frac{1}{2}(w^1 + w^2) + \frac{1}{2}x_3c^{-1}(w^1 - w^2).$$

Тангенциальные перемещения в слоях представим в виде

$$u_i^1 = u_i + ca_i - \frac{c}{4}(w^1 - w^2)_{,i} - (x_3 - c)w^1{}_{,i} \quad (c \le x_3 \le c + h_1),$$

$$u_i^2 = u_i - ca_i - \frac{c}{4}(w^1 - w^2)_{,i} - (x_3 + c)w^2{}_{,i} \quad (-h_2 - c \le x_3 \le -c),$$

$$u_i^3 = u_i + x_3a_i - \frac{x_3^2}{4c}(w^1 - w^2)_{,i} \quad (-c \le x_3 \le c) \quad (i = 1, 2),$$

где u_i и $2ca_i$ — перемещения точек срединной поверхности и абсолютные сдвиги граничных плоскостей заполнителя вдоль оси x_i; индекс i, стоящий после запятой, означает дифференцирование по координате x_i.

В дальнейшем используются следующие две функции:

$$w = \frac{1}{2}(w^1 + w^2), \quad v = \frac{1}{2}(w^1 - w^2).$$

Деформации определяются стандартным образом. Напряжения связаны с деформациями согласно закону Гука. Полные их выражения приведены в [1].

Уравнения динамической устойчивости трехслойной пластины получим из принципа Гамильтона — Остроградского [2]

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L\, dt = 0.$$

Здесь t_1, t_2 — фиксированные начальный и конечный моменты времени; δ — знак вариации; L — функция Лагранжа;

$$\delta L = \delta K - \delta U + \delta A \tag{1}$$

(A — работа внешних сил, U — потенциальная энергия изгиба, K — кинетическая энергия). Вариации потенциальной энергии изгиба и работы внешних контурных сил приведены в [1]:

$$\delta U = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \Big[\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} \int_{(h_k)} \sigma_{ij}^k \delta\varepsilon_{ij}^k\, dx_3 + \sum_{i=1}^{3} \int_{(h_3)} \sigma_{i3}^3 \delta\varepsilon_{i3}^3\, dx_3\Big]\, dx_1\, dx_2,$$

$$\delta A = \frac{1}{2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \Big[\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{h_k} \int_{(h_k)} T_{ij}^k \Big(\frac{\partial w^k}{\partial x_i}\delta\frac{\partial w^k}{\partial x_j} + \frac{\partial w^k}{\partial x_j}\delta\frac{\partial w^k}{\partial x_i}\Big)\, dx_3\Big]\, dx_1\, dx_2. \tag{2}$$

Вариацию кинетической энергии пластины, согласно [2], запишем в виде

$$\delta K = -\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \Big[\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} \int_{(h_k)} \rho_k \frac{\partial^2 u_i^k}{\partial t^2}\delta u_i^k\, dx_3 + \sum_{k=1}^{3} \int_{(h_k)} \rho_k \frac{\partial^2 w^k}{\partial t^2}\delta w^k\, dx_3\Big]\, dx_1\, dx_2. \tag{3}$$

В выражении (2) T_{ij}^k — контурные силы, действующие на контуре k-го слоя; чтобы докритическое состояние было безмоментным, эти силы должны быть распределены пропорционально жесткостям γ_k, т. е. $T_{ij}^k = \gamma_k T_{ij}$ (T_{ij} — равнодействующая внешних сил, приложенных к слоям).

Введем обозначения: $h = h_1 + h_2 + h_3$, $t_k = h_k/h$, $E = E_1t_1 + E_2t_2 + E_3t_3$, $\gamma_k = E_kh_k/E$, $\rho = h^{-1}\sum_{k=1}^{3}\rho_kh_k$, $\bar\gamma_k = \rho_kh_k(\rho h)^{-1}$. Здесь E_k и ρ_k — модули упругости и плотности слоев ($k = 1, 2, 3$). Очевидно, имеют место равенства $\sum_k \gamma_k = 1$, $\sum_k t_k = 1$, $\sum_k \bar\gamma_k = 1$ (γ_k и $\bar\gamma_k$ — соответственно безразмерные жесткости и безразмерные плотности слоев). Тогда

$$\delta A - \delta U = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \Big\{ \sum_{i=1}^{2} \Big[(N_{1i,1} + N_{2i,2})\delta u_i + (H_{1i,1} + H_{2i,2} - Q_i^3)\delta a_i\Big] + \sum_{i=1}^{2}\Big[\sum_{j=1}^{2}(M_{ij,ij} - T_{ij}R_{,ij}) + Q_{i,i}^3\Big]\delta w +$$

$$+\Big[\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(L_{ij,ij}-T_{ij}S_{,ij})-\frac{1}{c}Q_3^3\Big]\delta v\Big\}\,dx_1\,dx_2-$$

$$-\int_0^{l_1}\Big[\sum_{i=1}^{2}(N_{i2}\delta u_i+H_{i2}\delta a_i)+(M_{22,2}+2M_{12,1}+Q_2^3-T_{22}R_{,2}-T_{12}R_{,1})\delta w+$$

$$+(L_{22,2}+2L_{12,1}-T_{22}S_{,2}-T_{12}S_{,1})\delta v-M_{22}\delta w_{,2}-L_{22}\delta v_{,2}\Big]_0^{l_2}dx_1-$$

$$-\int_0^{l_2}\Big[\sum_{i=1}^{2}(N_{i1}\delta u_i+H_{i1}\delta a_i)+(M_{11,1}+2M_{12,2}+Q_1^3-T_{11}R_{,1}-T_{12}R_{,2})\delta w+$$

$$+(L_{11,1}+2L_{12,2}-T_{11}S_{,1}-T_{12}S_{,2})\delta v-$$

$$-M_{11}\delta w_{,1}-L_{11}\delta v_{,1}\Big]_0^{l_1}dx_2+2[M_{12}\delta w+L_{12}\delta v]_{0\,0}^{l_1 l_2}, \tag{4}$$

$$R=w+(\gamma_1-\gamma_2)v,\quad S=(\gamma_1-\gamma_2)w+(\gamma_1+\gamma_2+\frac{1}{3}\gamma_3)v.$$

В эти уравнения введены удельные усилия [1]

$$N_{ij}=N_{ij}^1+N_{ij}^2+N_{ij}^3,\quad M_{ij}=M_{ij}^1+M_{ij}^2,$$

$$H_{ij}=M_{ij}^3+c(N_{ij}^1-N_{ij}^2),\quad L_{ij}=M_{ij}^1-M_{ij}^2+\frac{1}{2}c(N_{ij}^1+N_{ij}^2)+G_{ij}^3,$$

$$N_{ij}^k=\int_{(h_k)}\sigma_{ij}^k\,dx_3,\quad M_{ij}^1=\int_{(h_1)}\sigma_{ij}^1(x_3-c)\,dx_3,\quad M_{ij}^2=\int_{(h_2)}\sigma_{ij}^2(x_3+c)\,dx_3,$$

$$M_{ij}^3=\int_{(h_3)}\sigma_{ij}^3x_3\,dx_3,\quad G_{ij}^3=\frac{1}{2}c^{-1}\int_{(h_3)}\sigma_{ij}^3x_3^2\,dx_3,\quad Q_i^3=\int_{(h_3)}\sigma_{i3}^3\,dx_3.$$

Вариацию кинетической энергии δK, определяемую выражением (3), запишем в виде

$$\delta K=-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\Big\{\sum_{i=1}^{2}\rho h[u_i+\frac{h}{2}\bar c_{12}a_i-\frac{h}{2}\bar c_{13}w_{,i}-\frac{h}{2}\bar c_{14}v_{,i}]\delta u_i+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\rho h[\bar c_{12}u_i+\frac{h}{2}c_{22}a_i-\frac{h}{2}c_{23}w_{,i}-\frac{h}{2}\bar c_{24}v_{,i}]\delta a_i+$$

$$+\frac{\rho h^2}{2}\sum_{i=1}^{2}[\bar c_{13}u_{i,i}+\frac{h}{2}\bar c_{23}a_{i,i}-\frac{h}{2}\bar c_{33}w_{,ii}-\frac{h}{2}\bar c_{34}v_{,ii}+$$

$$+h^{-1}w+(t_3h)^{-1}(\bar c_{12}+\bar c_{13})v]\delta w+\frac{\rho h^2}{2}\sum_{i=1}^{2}[\bar c_{14}u_{i,i}+$$

$$+\frac{h}{2}c_{24}a_{i,i}-\frac{h}{2}c_{34}w_{,ii}-\frac{h}{2}c_{44}v_{,ii}+(t_3h)^{-1}(c_{12}+c_{13})w+$$

$$+\frac{1}{3}t_3^{-2}h^{-1}\bar{c}_{55}v]\delta v\}\,dx_1\,dx_2+\frac{\rho h^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_0^{l_2}[(\bar{c}_{13}u_1+\frac{h}{2}\bar{c}_{23}a_1-$$

$$-\frac{h}{2}c_{33}w_{,1}-\frac{h}{2}c_{34}v_{,1})\delta w+(c_{14}u_1+\frac{h}{2}c_{24}a_1-\frac{h}{2}c_{34}w_{,1}-$$

$$-\frac{h}{2}c_{44}v_{,1})\delta v]_0^{l_1}\,dx_2+\frac{\rho h^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_0^{l_1}[c_{13}u_2+\frac{h}{2}c_{23}a_2-$$

$$-\frac{h}{2}c_{33}w_{,2}-\frac{h}{2}c_{34}v_{,2})\delta w+(c_{14}u_2+\frac{h}{2}c_{24}a_2-\frac{h}{2}c_{34}w_{,2}-$$

$$-\frac{h}{2}c_{44}v_{,2})\delta v]_0^{l_2}\,dx_1, \qquad (5)$$

$$c_{12}=t_3(\gamma_1-\gamma_2),\quad c_{13}=\gamma_1t_1-\gamma_2t_2,\quad c_{23}=t_3(\gamma_1t_1+\gamma_2t_2),$$

$$c_{22}=t_3^2(\gamma_1+\gamma_2+\frac{1}{3}\gamma_3),\quad c_{33}=\frac{4}{3}(\bar{\gamma}_1t_1^2+\gamma_2t_2^2),$$

$$c_{14}=t_3^{-1}(c_{23}+\frac{1}{2}\bar{c}_{22}),\quad c_{24}=t_3(c_{13}+\frac{1}{2}\bar{c}_{12}),$$

$$c_{34}=\frac{4}{3}(\gamma_1t_1^2-\gamma_2t_2^2)+\frac{1}{2}t_3c_{13},$$

$$c_{44}=\frac{1}{4}t_3^2(\bar{\gamma}_1+\bar{\gamma}_2+\frac{1}{5}\bar{\gamma}_3)+c_{23}+c_{33},$$

$$c_{55}=\gamma_1t_1(12t_3^2+6t_3t_1+t_1^2)+\bar{\gamma}_2t_2(12t_3^2+6t_3t_2+t_2^2)+4\bar{\gamma}_3t_3^3.$$

Приравнивая нулю сумму вариаций (4), (5) и собирая выражения перед вариациями независимых переменных δu_i, δa_i, δw, δv, получим систему уравнений динамической устойчивости трехслойной пластины:

$$N_{11,1}+N_{21,2}=\rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u_1+\frac{h}{2}\bar{c}_{12}a_1-\frac{h}{2}\bar{c}_{13}w_{,1}-\frac{h}{2}\bar{c}_{14}v_{,1}),$$

$$N_{12,1}+N_{22,2}=\rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u_2+\frac{h}{2}\bar{c}_{12}a_2-\frac{h}{2}\bar{c}_{13}w_{,2}-\frac{h}{2}\bar{c}_{14}v_{,2}),$$

$$H_{11,1}+H_{21,2}-Q_1^3=\frac{\rho h^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(c_{12}u_1+\frac{h}{2}\bar{c}_{22}a_1-\frac{h}{2}\bar{c}_{23}w_{,1}-\frac{h}{2}\bar{c}_{24}v_{,1}),$$

$$H_{12,1}+H_{22,2}-Q_2^3=\frac{\rho h^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\bar{c}_{12}u_2+\frac{h}{2}\bar{c}_{22}a_2-\frac{h}{2}\bar{c}_{23}w_{,2}-\frac{h}{2}\bar{c}_{24}v_{,2}),$$

$$\sum_{i=1}^{2}\Big[\sum_{j=1}^{2}(M_{ij,ij}-T_{ij}R_{,ij})+Q_{i,i}^3\Big]=\frac{\rho h^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_{i=1}^{2}[\bar{c}_{13}u_{i,i}+\frac{h}{2}\bar{c}_{23}a_{i,i}-$$

$$-\frac{h}{2}\bar{c}_{33}w_{,ii}-\frac{h}{2}c_{34}v_{,ii}+h^{-1}w+(t_3h)^{-1}(c_{12}+c_{13})v], \qquad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(L_{ij,ij}-T_{ij}S_{,ij})-\frac{1}{c}Q_3^3=\frac{\rho h^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_{i=1}^{2}[\bar{c}_{14}u_{i,i}+\frac{h}{2}\bar{c}_{24}a_{i,i}-$$

$$-\frac{h}{2}c_{34}w_{,ii}-\frac{h}{2}c_{44}v_{,ii}+\frac{1}{t_3h}(\bar{c}_{12}+\bar{c}_{13})w+\frac{1}{3t_3^2h}\bar{c}_{55}v].$$

Можно записать данную систему в перемещениях. Введем потенциалы

$$u_1 = \frac{h}{2}(u_{,1} + f_{,2}), \quad u_2 = \frac{h}{2}(u_{,2} - f_{,1}),$$

$$a_1 = a_{,1} + \varphi_{,2}, \quad a_2 = a_{,2} - \psi_{,1}.$$

Уравнения равновесия (6) примут вид

$$\frac{Eh^2}{2(1-\nu^2)}\{\Delta[(u + c_{12}a - c_{13}w - c_{14}v)_{,1} + \frac{1-\nu}{2}(f + c_{12}\varphi)_{,2}]\} =$$

$$= \frac{\rho h^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}[(u + \bar{c}_{12}a - \bar{c}_{13}w - \bar{c}_{14}v)_{,1} + (f + \bar{c}_{12}\varphi)_{,2}],$$

$$\frac{Eh^2}{2(1-\nu^2)}\{\Delta[(u + c_{12}a - c_{13}w - c_{14}v)_{,2} - \frac{1-\nu}{2}(f + c_{12}\varphi)_{,1}]\} =$$

$$= \frac{\rho h^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}[(u + \bar{c}_{12}a - \bar{c}_{13}w - c_{14}v)_{,2} - (f + c_{12}\varphi)_{,1}],$$

$$D_1[\Delta(c_{12}u + c_{22}a - c_{23}w - c_{24}v)_{,1} + \frac{1-\nu}{2}\Delta(c_{12}f + c_{22}\varphi)_{,2}] - \tag{7}$$

$$-Ght_3[(a + w)_{,1} + \varphi_{,2}] = \frac{\rho h^3}{4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}[(\bar{c}_{12}u + c_{22}a - \bar{c}_{23}w - \bar{c}_{24}v)_{,1} +$$

$$+ (\bar{c}_{12}f + \bar{c}_{22}\varphi)_{,2}],$$

$$D_1[\Delta(c_{12}u + c_{22}a - c_{23}w - c_{24}v)_{,2} - \frac{1-\nu}{2}\Delta(c_{12}f + c_{22}\varphi)_{,1}] -$$

$$-Ght_3[(a + w)_{,2} - \varphi_{,1}] = \frac{\rho h^3}{4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}[(\bar{c}_{12}u + c_{22}a - c_{23}w - \bar{c}_{24}v)_{,2} -$$

$$-(\bar{c}_{12}f + \bar{c}_{22}\varphi)_{,1}],$$

$$D_1\Delta\Delta(c_{13}u + c_{23}a - c_{33}w - c_{34}v) + Ght_3\Delta(a + w) - TR =$$

$$= \frac{\rho h^3}{4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\bar{c}_{13}\Delta u + \bar{c}_{23}\Delta a - (\bar{c}_{33}\Delta - \frac{4}{h^2})w - [c_{34}\Delta - \frac{t_3}{h^2}(c_{12} + c_{13})]v\},$$

$$D_1\Delta\Delta(c_{14}u + c_{24}a - c_{34}w - c_{44}v) - TS - \frac{4E_3}{ht_3}v =$$

$$= \frac{\rho h^3}{4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\bar{c}_{14}\Delta u + \bar{c}_{24}\Delta a - [\bar{c}_{34}\Delta - \frac{4}{h^2 t_3}(\bar{c}_{13} + \bar{c}_{12})]w - [\bar{c}_{44}\Delta - \frac{4}{3(ht_3)^2}c_{55}]v\},$$

$$\Delta(\ ) = (\ )_{,11} + (\ )_{,22}.$$

Параметры c_{ij} вычисляются по тем же формулам, что и c_{ij}, с той разницей, что в последних надо заменить $\bar{\gamma}_k$ на γ_k; $D_1 = Eh^3/(4(1-\nu^2))$.

Граничные условия, полученные из приравнивания нулю коэффициентов при вариациях перемещений, сформулированы в [1]. Отличие есть только для края, свободного от закреплений и внешней нагрузки. Например, граничные условия из [1, случай *в*] будут выглядеть следующим образом ($x_1 = x_1^0$):

$$H_{11}^0 = 0, \quad M_{11}^0 = 0, \quad L_{11}^0 = 0, \quad H_{12}^0 = 0,$$

$$M^0_{11,1}+2M^0_{12,2}+Q^3_1=\frac{\rho h^3}{4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}[(\bar c_{13}u+\bar c_{23}a-c_{33}w-\bar c_{34}v),_1+(\bar c_{13}f+c_{23}\varphi),_2],$$

$$L^0_{11,1}+2L^0_{12,2}=\frac{\rho h^3}{4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}[(c_{14}u+c_{24}a-\bar c_{34}w-c_{44}v),_1+(\bar c_{14}f+\bar c_{24}\varphi),_2],$$

т. е. в краевых условиях присутствуют динамические члены. Уравнения (7) существенно упрощаются для пластины симметричного строения, т. е. при $h_1=h_2$, $\rho_1=\rho_2$, $E_1=E_2$, тогда для коэффициентов c_{ij} и $\bar c_{ij}$ выполняются равенства

$$c_{12}=\bar c_{12}=c_{13}=\bar c_{13}=c_{24}=\bar c_{24}=c_{34}=\bar c_{34}=0.$$

Уравнения (7) при этом примут вид

$$\frac{Eh^2}{2(1-\nu^2)}\Delta[(u-c_{14}v),_1+\frac{1-\nu}{2}f,_2]=\frac{\rho h^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}[(u-\bar c_{14}v),_1+f,_2],$$

$$\frac{Eh^2}{2(1-\nu^2)}\Delta[(u-c_{14}v),_2-\frac{1-\nu}{2}f,_1]=\frac{\rho h^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}[(u-\bar c_{14}v),_2-f,_1],$$

$$D_1\Delta[(c_{22}a-c_{23}w),_1+\frac{1-\nu}{2}c_{22}\varphi,_2]-Ght_3[(a+w),_1+\varphi,_2]=$$

$$=\frac{\rho h^3}{4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}[(c_{22}a-\bar c_{23}w),_1+\bar c_{22}\varphi,_2],$$

$$D_1\Delta[(c_{22}a-c_{23}w),_2-\frac{1-\nu}{2}c_{22}\varphi,_1]+Ght_3[(a+w),_2-\varphi,_1]=$$

$$=\frac{\rho h^3}{4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}[(c_{22}a-\bar c_{23}w),_2-c_{22}\varphi,_1],$$

$$D_1\Delta\Delta(c_{23}a-c_{33}w)+Ght_3\Delta(a+w)-TR=$$

$$=\frac{\rho h^3}{4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\bar c_{23}\Delta a-(\bar c_{33}\Delta-\frac{4}{h^2})w],$$

$$D_1\Delta\Delta(c_{14}u-c_{44}v)-TS-\frac{4E_0}{ht_3}v=$$

$$=\frac{\rho h^3}{4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\bar c_{14}\Delta u-(\bar c_{44}\Delta-\frac{4}{3t_3^2h^2}\bar c_{55})v],$$

$$R=w,\quad S=(\gamma_1+\gamma_2+\frac{1}{3}\gamma_3)w.$$

Для пластин симметричного строения система уравнений (7) распалась на две, одна из которых описывает местную потерю устойчивости, другая — общую. Аналогичные упрощения произойдут и в граничных условиях. Из третьего и четвертого уравнений (7) можно получить одно для определения функции φ. С другими уравнениями оно связано через граничные условия. В [1] считается, что при статической потере устойчивости влияние функции φ на решение задачи незначительно, и в некоторых случаях без больших погрешностей полагаем $\varphi\equiv 0$; можно предположить, что то же самое имеет место и для динамической устойчивости. Из полученных уравнений и граничных условий легко найти уравнения и граничные условия динамической задачи устойчивости трехслойного стержня.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Иванов А. В., Чулков П. П.** Учет поперечных деформаций заполнителя в задачах устойчивости трехслойных пластин с различными несущими слоями // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 6.
2. **Васидзу К.** Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М: Мир, 1987.

Поступила в редакцию 19/XI 1993 г.