

УДК 532.517.4

ТУРБУЛЕНТНОЕ ПЕРЕМЕШИВАНИЕ ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ЗАКОНЕ УСКОРЕНИЯ

В. Е. Неуважаев, В. Г. Яковлев

Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики им. Е. И. Забабахина,
456770 Снежинск

На основе $(l-v)$ - и $(k-\varepsilon)$ -моделей численно и аналитически изучается турбулентное перемешивание на границе раздела двух жидкостей различной плотности для различных законов ускорения: постоянного, убывающего, нарастающего и импульсного. Результаты расчетов по этим моделям удовлетворительно согласуются между собой и с экспериментальными данными.

ВВЕДЕНИЕ

Турбулентное перемешивание, возникающее под действием ударной волны (неустойчивость Рихтмайера — Мешкова), изучалось в ряде экспериментальных работ. Это явление исследовано также теоретически в работах [1–3]. Вместе с тем имеется ряд нерешенных вопросов, например выход на асимптотический режим после воздействия на зону турбулентного перемешивания ударной волны. Требуется установить, является ли этот режим автомодельным. По нашему мнению, получающееся асимптотическое решение автомодельно [1], по мнению авторов работы [3], неавтомодельно. Для устранения противоречий необходим анализ более простой ситуации, реализованной, например, в экспериментах [4], проведенных на установке, где ампула с двумя несжимаемыми жидкостями ускорилась с помощью магнитного поля.

Результаты работы [4] являются хорошим тестом для проверки моделей турбулентного перемешивания. В ней реализованы четыре закона ускорения для постоянной, убывающей, нарастающей и треугольного вида зависимостей от времени. Особенности установки таковы, что при ускорении ампулы достаточно быстро устанавливается режим автомодельного турбулентного перемешивания, в отличие, например, от экспериментов [5], в которых во избежание задержки в развитии перемешивания на границе раздела задаются начальные возмущения. Эти возмущения определенное время оказывают влияние на течение, и это обстоятельство следует учитывать при обработке экспериментальных результатов.

Целью настоящей работы является сравнение предложенных ранее полуэмпирических моделей [6–8] с результатами работы [4].

Отметим, что в [9] теоретически изучены закономерности турбулентного перемешивания при постоянном, импульсном, степенном ($g \sim t^m$) и синусоидальном законах ускорения.

1. УРАВНЕНИЯ $(k-\varepsilon)$ -МОДЕЛИ. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТАМИ

Общие уравнения. Для описания турбулентного перемешивания жидкостей в сосуде, покоящемся в гравитационном поле g , используется система уравнений [5], которая для

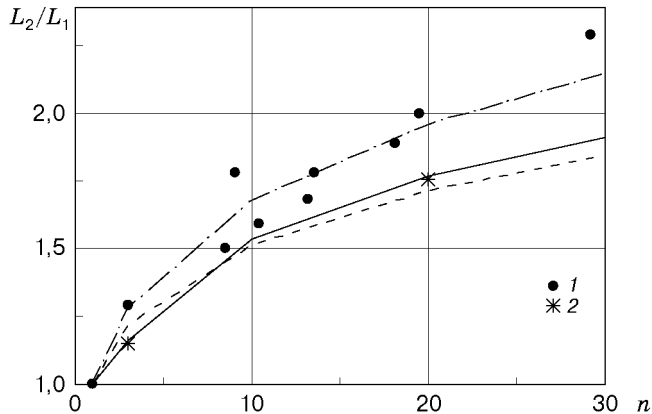


Рис. 1. Зависимость несимметрии турбулентного перемешивания от перепада плотностей:

сплошная кривая — $(k-\varepsilon)$ -модель; штриховая — $L_2/L_1 = n^{0,18}$; штрихпунктирная — $L_2/L_1 = n^{0,225}$; 1 — экспериментальные данные [11, 12], 2 — экспериментальные данные [5]

несжимаемой жидкости переходит в следующую:

$$\begin{aligned} \frac{dc_i}{dt} &= \frac{\partial}{\partial m} \rho^2 D_\varepsilon \frac{\partial c_i}{\partial m}, \\ \frac{d\varepsilon_t}{dt} + c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon_t^2}{k} &= c_{\varepsilon 1} \hat{g} D_\varepsilon \frac{\varepsilon_t}{k} \frac{\partial \rho}{\partial m} + \alpha_\varepsilon \frac{\partial}{\partial m} \left(\rho^2 D_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial m} \right) + \frac{4}{3} \varepsilon_t \frac{d\rho}{\rho dt}, \\ \frac{dk}{dt} + \varepsilon_t &= \hat{g} \frac{\partial \rho}{\partial m} D_\varepsilon + \alpha_k \frac{\partial}{\partial m} \left(\rho^2 D_\varepsilon \frac{\partial k}{\partial m} \right) + \frac{2}{3} k \frac{d\rho}{\rho dt}, \\ \partial m &= \rho \partial x, \quad D_\varepsilon = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon_t}, \quad \hat{g} = g(t) + \frac{d}{dt} D_\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial m}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где α_ε , α_k , $c_{\varepsilon 1}$, $c_{\varepsilon 2}$, c_μ — эмпирические постоянные; i — номер компонента; c_i — массовые концентрации компонентов; k — кинетическая энергия турбулентности; ε_t — скорость диссипации кинетической энергии турбулентности; D_ε — коэффициент турбулентной диффузии; $g(t)$ — функция, задаваемая таблицей; $\rho = \rho_2 n / (c_1 + n(1 - c_1))$ — плотность смеси; ρ_i — начальные плотности компонентов; $n = \rho_1 / \rho_2$; $d/dt = \partial/\partial t - D_\varepsilon \partial \rho / \partial m (\partial/\partial x)$. На границах сосуда потоки всех величин равны нулю.

Сравнение с экспериментами [11, 12] и [5] при постоянном ускорении. На рис. 1 приведена зависимость несимметрии турбулентного перемешивания от перепада плотностей n , когда ускорение постоянно. Сплошная кривая соответствует численным расчетам по коду TURINB [7] (за глубину проникания легкого вещества L_1 принималось расстояние между границей раздела и точкой, в которой объемная концентрация легкого вещества составляла 0,02, за глубину проникания тяжелого вещества L_2 — расстояние между границей раздела и точкой, в которой объемная концентрация легкого вещества составляла $1 - 0,06/n$). Использовались следующие значения констант: $\alpha_\varepsilon = 0,85$; $\alpha_k = 0,5$; $c_{\varepsilon 1} = 1,43$; $c_{\varepsilon 2} = 1,85$; $c_\mu = 3,5$.

На рис. 1 приведены также экспериментальные данные [11, 12] и [5]. Некоторое различие результатов этих работ объясняется различием способов определения фронтов перемешивания. Результаты экспериментов [11, 12] аппроксимируются кривой $L_2/L_1 = n^{0,225}$. Аналитическая зависимость $L_2/L_1 = n^{0,18}$ получена из решения автомодельных уравнений. В этом случае фронт определяется точно, без размазывания, которое происходит при разностном счете.

Если ширину области перемешивания определять не строго по фронту, то с учетом результатов опытов [5] получим

$$\frac{L_2^*}{L_1^*} = (1 + A)^{0,45},$$

где $A = (\rho_1 - \rho_2) / (\rho_1 + \rho_2)$ — число Атвуда. В настоящей работе используется именно эта

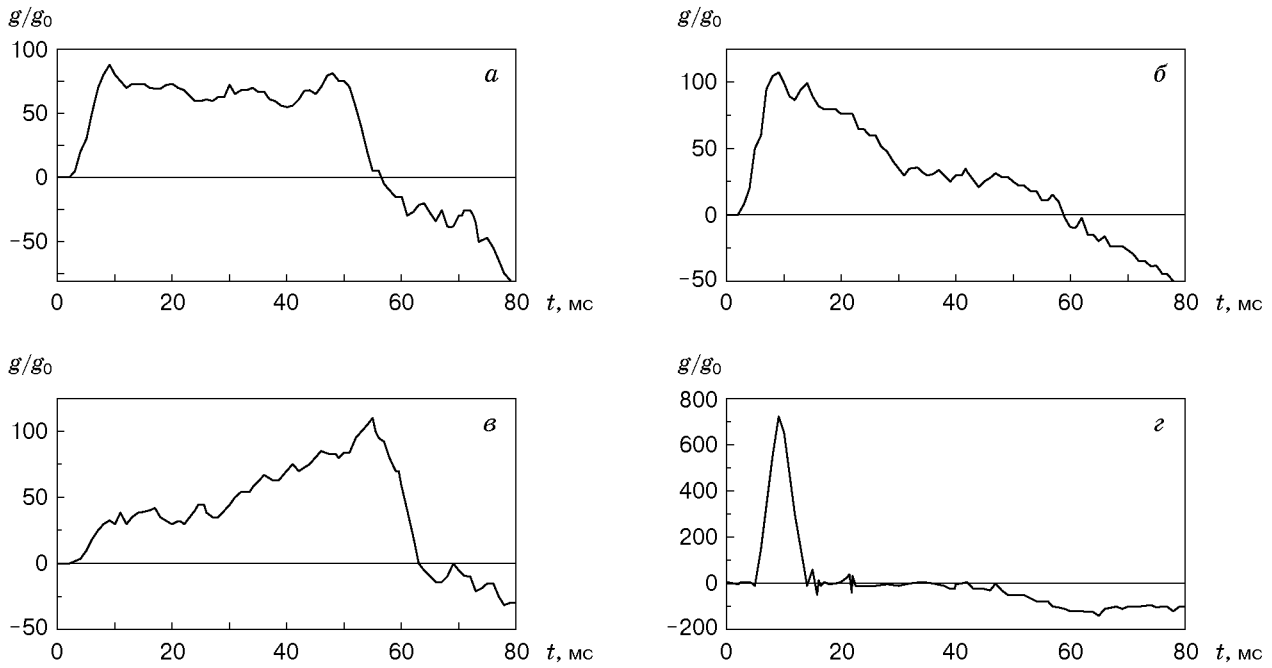


Рис. 2. Зависимость ускорения g/g_0 от времени ($g_0 = 980 \text{ см}/\text{с}^2$):
 а — постоянное ускорение, б — убывающее, в — возрастающее, г — импульсное

формула, так как ниже ширина области перемешивания определяется не по фронту, а интегральным способом, что более оправданно с физической точки зрения: предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (L_2^*/L_1^*)$ конечен. В работе [5] в области турбулентного перемешивания измерялся профиль плотности, что повышает надежность результатов определения несимметрии перемешивания.

Сравнение с экспериментами [4]. Результаты экспериментов [4] моделировались по коду TURINB при $\rho_1 = 1 \text{ г}/\text{см}^3$, $\rho_2 = 1,57 \text{ г}/\text{см}^3$ и высоте слоев тяжелой и легкой жидкостей 10 см. Значения ускорения g взяты из работы [4] и приведены на рис. 2. Результаты расчетов удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными (следуя обозначениям [4], $s = Z = \iint g dt' dt$) (рис. 3).

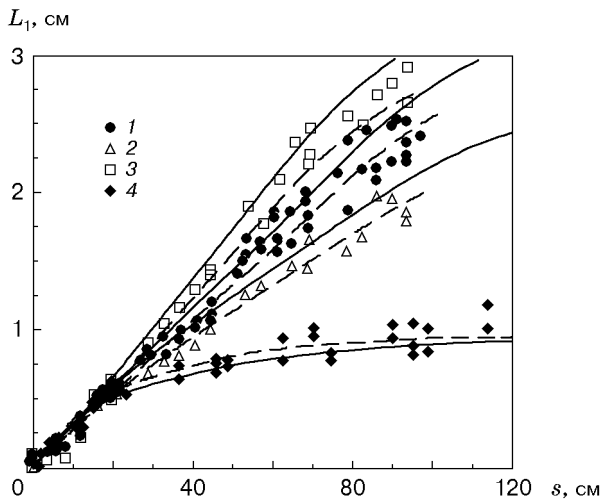


Рис. 3. Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными [4] ($L_1 = h_b$, $s = Z$):

сплошные кривые — результаты численных расчетов по коду TURINB; штриховые — результаты численного интегрирования системы уравнений (3.4), (3.5); точки — эксперимент: 1 — постоянное ускорение, 2 — убывающее, 3 — возрастающее, 4 — импульсное

2. УРАВНЕНИЯ ($l-v$)-МОДЕЛИ В ПРИБЛИЖЕНИИ КУСОЧНО-ПОСТОЯННОГО КОЭФФИЦИЕНТА ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФфуЗИИ

Общие уравнения. В случае перемешивания двух несжимаемых жидкостей в ампуле, движущейся с ускорением g , уравнения ($l-v$)-модели [10] сводятся к системе двух уравнений для плотности смеси ρ и кинетической энергии турбулентности $k = V^2/2$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial \rho}{\partial x}; \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho V^2}{2 \partial t} + \frac{\nu \rho D V^2}{\alpha^2 L^2} = D g \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{4}{3} \alpha_3 \rho D \left[\frac{\partial \ln \rho}{\partial t} - D \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \right)^2 \right]^2 + \\ + \beta_1 \frac{\partial}{\partial x} \rho D \frac{\partial V^2}{\partial x} + \frac{D}{2} \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho V^2}{\partial x} + \frac{5}{6} \rho V^2 \left[\frac{\partial \ln \rho}{\partial t} - D \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $D = \alpha L V$; α , α_3 , ν , β_1 — постоянные модели, выбираемые из сравнения с экспериментом; L — ширина области перемешивания; g — ускорение системы. Эти уравнения получаются из уравнений газовой динамики после осреднения и применения гипотезы Колмогорова — Прандтля [10].

Приближенные уравнения. Будем рассматривать задачу о перемешивании двух веществ с плотностями ρ_1 при $x > 0$ и ρ_2 при $x < 0$ при заданном ускорении $g = g(t)$, являющемся функцией времени. Можно построить аналитическое решение, предположив, что коэффициент турбулентной диффузии D является кусочно-постоянной функцией с разрывом в точке $x = 0$:

$$D = \begin{cases} \alpha L \bar{V}, & x > 0, \\ \alpha \beta_2 L \bar{V}, & x < 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

где \bar{V} — среднее значение турбулентной скорости по области перемешивания $[0, L_1]$; β_2 — эмпирический коэффициент, определяемый ниже. В работах [1, 6] в формуле (2.3) коэффициент β_2 полагался равным единице, что приводило к симметрии перемешивания, когда $L_1 = L_2$.

Используемый в настоящей работе подход позволяет обеспечить необходимую несимметрию перемешивания, определяемую из эксперимента (или расчета) через число Атвуда:

$$\sqrt{\beta_2} = (1 + A)^{0,45}. \quad (2.4)$$

При таком предположении уравнение для плотности смеси (2.1) сводится к линейному уравнению диффузии с разрывным коэффициентом, а решение для двух несжимаемых жидкостей с начальными плотностями ρ_1 и ρ_2 представляется через интеграл вероятности $\Phi(\eta)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \begin{cases} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, & x > 0, \\ \beta_2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, & x < 0, \end{cases} \quad \partial \tau = \alpha L \bar{V} \partial t, \quad \rho = \begin{cases} \rho_0 + (\rho_1 - \rho_0) \Phi(\eta), & \eta > 0, \\ \rho_0 + (\rho_0 - \rho_2) \Phi(\eta), & \eta < 0, \end{cases} \\ \rho_0 = \frac{\rho_1 + \rho_2 \sqrt{\beta_2}}{1 + \sqrt{\beta_2}}, \quad \Phi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-z^2} dz, \quad \eta = \begin{cases} x/(2\sqrt{\tau}), & x > 0, \\ x/(2\sqrt{\beta_2 \tau}), & x < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Полученное решение (2.5) не имеет ярко выраженного фронта, по которому можно определить ширину области перемешивания. Поэтому для определения фронта турбулентного перемешивания вводятся объемные концентрации $f_1 = (\rho - \rho_2)/(\rho_1 - \rho_2)$,

$f_2 = (\rho_1 - \rho)/(\rho_1 - \rho_2)$. С использованием параметров f_1 и f_2 , как и в [1], предлагается интегральный способ определения ширин L_1^* и L_2^* :

$$L_2^* = 2 \int_{-\infty}^0 \frac{f_1 dx}{f_1(0)}, \quad L_1^* = 2 \int_0^{\infty} \frac{f_2 dx}{f_2(0)}.$$

Используя решение (2.5), получим

$$L_1 = 2\eta_1\sqrt{\tau}, \quad L_2 = 2\eta_1\sqrt{\beta_2\tau}, \quad \eta_1 = 2/\sqrt{\pi}. \quad (2.6)$$

Здесь и далее знак “*” опущен.

Осталось получить уравнение для средней турбулентной скорости $\bar{V}(t)$. Осредним уравнение (2.2) по всей области перемешивания $-L_2 \leq x \leq L_1$. Вместо коэффициента D возьмем его значение (2.3) и перейдем от t к τ . После осреднения по области $-L_2 \leq x \leq L_1$ получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d(\bar{V}^2 M)}{2d\tau} + \frac{\nu \bar{V}^2 M}{\alpha^2 L^2} \frac{1 + \beta_2^{3/2}}{1 + \sqrt{\beta_2}} = \\ = \bar{g}\Phi(\eta_1)\sqrt{\beta_2}(\rho_1 - \rho_2) + \frac{1}{3} \alpha_3 \alpha_1^2 \eta_1^4 A_0^4 X_0 \frac{\bar{V}^2 M}{\tau} - \frac{\Phi(\sqrt{2}\eta_1)}{12\sqrt{2}} A_0^2 X_p \frac{\bar{V}^2 M}{\tau}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} X_0 = \frac{1 + \sqrt{\beta_2}}{2} \left[\sqrt{\beta_2} + \beta_2^2 + \frac{3}{2} A_0 \eta_1^2 \sqrt{\beta_2} (1 - \beta_2^2) \right], \quad M = \rho_0 L, \quad A_0 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2 \sqrt{\beta_2}}, \\ X_p = \left[1 - \frac{A_0 \sqrt{2} (\sqrt{\beta_2} - 1) \eta_1^2}{4\Phi(\sqrt{2}\eta_1)} \right] \sqrt{\beta_2}. \end{aligned}$$

Черта означает осреднение по области перемешивания $[-L_2, L_1]$. Зависимость между шириной L и переменной τ известна из (2.6). Окончательно получим уравнения для неизвестных функций \bar{V}^2 и L :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{V}^2}{dL} + 4k_y \frac{\bar{V}^2}{L} = \frac{\Phi(\eta_1)\sqrt{\beta_2}}{\eta_1^2(1 + \sqrt{\beta_2})} \bar{g} A_0, \\ \frac{dL}{dt} = 2\alpha\eta_1^2(1 + \sqrt{\beta_2})^2\bar{V}, \quad L = L_1 + L_2 = 2\eta_1(1 + \sqrt{\beta_2})\sqrt{\tau}, \quad (2.7) \\ 4k_y = 1 + \frac{\nu(1 + \beta_2^{3/2})}{(1 + \sqrt{\beta_2})^3\eta_1^2\alpha^2} + \frac{\Phi(\sqrt{2}\eta_1)}{3\sqrt{2}} A_0^2 X_p - \frac{4\alpha_3\alpha^2\eta_1^4}{3} A_0^4 X_0. \end{aligned}$$

При выводе уравнений (2.7) использовано равенство $L = 2(1 + \sqrt{\beta_2})\eta_1\sqrt{\tau}$.

Учет дополнительного ускорения. Выбор постоянных модели. Возникающее турбулентное перемешивание вызывает перемещение вещества со скоростью $u = -D\partial \ln \rho / \partial x$. Осредним это соотношение по области перемешивания $-L_2 \leq x \leq L_1$, предварительно умножив обе части равенства на ρ . Получим $\bar{u} = -\alpha L \bar{V} (\rho_1 - \rho_2) \Phi(\eta_1) \sqrt{\beta_2} / M = -\alpha \sqrt{\beta_2} (1 + \sqrt{\beta_2}) A_0 \bar{V} \Phi(\eta_1)$. Возникающее движение приводит к смещению границы раздела, которое изменяет ускорение этой границы:

$$\bar{g}_1 = \bar{g} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \approx \bar{g} - \alpha(1 + \sqrt{\beta_2})\sqrt{\beta_2} A_0 \Phi(\eta_1) \frac{\partial \bar{V}}{\partial t}. \quad (2.8)$$

Дополнительное ускорение следует учитывать при вычислении генерационного члена в уравнении для кинетической энергии турбулентности (2.7). Для этого в первом уравнении (2.7) ускорение \bar{g} согласно (2.8) нужно заменить на \bar{g}_1 . Эта замена приведет к изменению коэффициента при производной $d\bar{V}^2/dL$:

$$Z_0 \frac{d\bar{V}^2}{dL} + 4k_y \frac{\bar{V}^2}{L} = \frac{\Phi(\eta_1)\sqrt{\beta_2}}{\eta_1^2(1+\sqrt{\beta_2})} \bar{g} A_0, \quad Z_0 = 1 + \alpha^2 \beta_2 (1 + \sqrt{\beta_2})^2 A_0^2 \Phi^2(\eta_1). \quad (2.9)$$

Полученное уравнение является линейным относительно функции \bar{V}^2 и интегрируется при произвольном ускорении \bar{g} , зависящем от времени.

В модель входят три постоянные: α , α_2 , ν . Выберем их. Для этого рассмотрим случай малых чисел Атвуда A_0 , когда в коэффициентах уравнения (2.9) можно произвести замену $k_y \approx k_0 = 0,25 + \nu/(16\eta_1^2\alpha^2)$, а ускорение задать в виде кусочно-постоянной функции

$$\bar{g} = \begin{cases} g_0, & 0 \leq t \leq t_0, \\ 0, & t > t_0. \end{cases}$$

При сделанных предположениях решение уравнения (2.9) получается в аналитическом виде [1]

$$L_1 = \begin{cases} \frac{4\alpha^2\eta_1^2\Phi(\eta_1)g_0 A_0 t^2}{1+4k_0}, & 0 \leq t \leq t_0, \\ L_{10} \left(1 + \frac{2}{B_0} \frac{t-t_0}{t_0}\right)^{B_0}, & t > t_0, \end{cases} \quad (2.10)$$

где $L_{10} = 4\alpha^2\eta_1^2\Phi(\eta_1)g_0 t_0 A_0 / (1+4k_0)$; $B_0 = 1/(1+2k_0)$.

При интегрировании использовано условие $\bar{V}_0 = L_0 = 0$ при $t = 0$. Теория [6] и эксперимент [5] при $A = 0$ дают значение $B_0 = 2/7$, следовательно, $k_0 = 1,25$ или $\nu/(16\eta_1^2\alpha^2) = 1$. Здесь учтено, что $\sqrt{\beta_2}$ зависит от A согласно (2.4) и $\beta_2 = 1$ при $A = 0$. Следуя [5, 11, 12], значение постоянной α выбираем из условия $L_1 = 0,06g_0 A t^2$. Постоянную α_3 полагаем равной единице. Учитывая, что $\eta_1 = 1,128$, $\Phi(\eta_1) = 0,89$, $\Phi(\sqrt{2}\eta_1) = 0,97$, окончательно получим $\alpha = 0,282$, $\alpha_3 = 1$, $\nu = 1,62$. Очевидно, что роль постоянной $\alpha_3 = 1$ незначительна, поэтому ниже для простоты полагаем $\alpha_3 = 0$.

Аналитическое решение при постоянном и импульсном ускорениях и произвольном числе Атвуда. Проинтегрируем уравнение (2.9). При постоянном ускорении и нулевых начальных данных уравнение (2.9) и уравнение для определения ширины слоя перемешивания в (2.7) дают следующее решение:

$$\frac{L_1}{2s} = J_1 = \frac{\alpha^2\eta_1^2(1+\sqrt{\beta_2})^2\sqrt{\beta_2}\Phi(\eta_1)A_0}{Z_0 + 4k_y}. \quad (2.11)$$

Решение для импульсного ускорения получим в общем случае, когда $L_0(0) \neq 0$, вводя безразмерный параметр $\beta = U_0 t_0 / L_0$. Тогда решение для полной ширины получится при интегрировании уравнений (2.9) и второго уравнения в (2.7). Действие импульсного ускорения приводит к тому, что при начальной шероховатости $L_0 \neq 0$ за время t_0 $\bar{V}_1(\beta)$ и L_{10} принимают следующие значения:

$$\bar{V}_1(\beta) = U_0 \sqrt{\frac{\tilde{A}\Phi(\eta_1)}{2\eta_1^2(1+4\tilde{k}_y)\beta} \frac{L_{10}}{L_0} \left[1 - \left(\frac{L_{10}}{L_0}\right)^{-(1+\tilde{k}_y)}\right]},$$

$$\sqrt{\frac{L_{10}}{L_0}} = \begin{cases} \sqrt{1 + 8\eta_1^2\tilde{\alpha}^2\Phi(\eta_1)\tilde{A}\beta} & \text{при } \beta\tilde{A} < \frac{1}{32\tilde{k}_y\eta_1^2\alpha^2\Phi(\eta_1)}, \\ \sqrt{\frac{4\tilde{k}_y}{1+4\tilde{k}_y} + 4\eta_1\tilde{\alpha}\sqrt{\frac{\Phi(\eta_1)\tilde{A}\beta}{2(1+4\tilde{k}_y)}}} & \text{при } \beta\tilde{A} \geq \frac{1}{32\tilde{k}_y\eta_1^2\alpha^2\Phi(\eta_1)}. \end{cases} \quad (2.12)$$

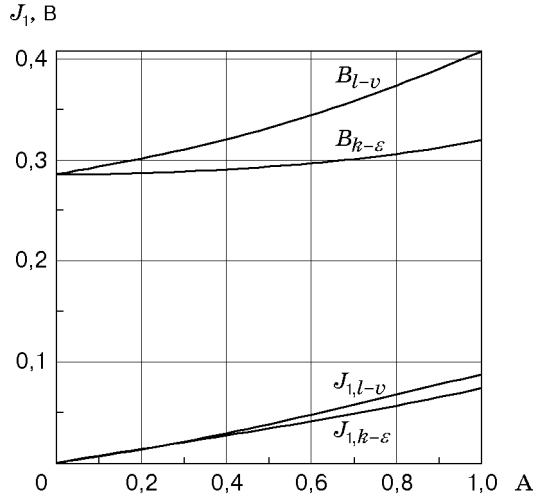


Рис. 4. Зависимость интенсивностей $J_{1,k-\epsilon}$ и $J_{1,l-v}$ и степеней затухания $B_{k-\epsilon}$ и B_{l-v} турбулентного перемешивания от числа Атвуда A для $(l-v)$ - и $(k-\epsilon)$ -моделей

Здесь $\tilde{A} = 2 A_0(1 + \sqrt{\beta_2})/Z_0$; $\tilde{k}_y = k_y/Z_0$; $\tilde{\alpha} = \alpha(1 + \sqrt{\beta_2})^2/4$. При выводе (2.12) использовано приближенное представление решения

$$\frac{\bar{V}}{U_0} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\Phi(\eta_1)}{2\eta_1^2} \beta \tilde{A} \left(\frac{L}{L_0} - 1\right)}, & \frac{L}{L_0} < \frac{1 + 4\tilde{k}_y}{4\tilde{k}_y}, \\ \sqrt{\frac{\Phi(\eta_1)\beta \tilde{A}}{2\eta_1^2(1 + 4\tilde{k}_y)} \frac{L}{L_0}}, & \frac{L}{L_0} \geq \frac{1 + 4\tilde{k}_y}{4\tilde{k}_y}. \end{cases}$$

После действия импульсного ускорения решение будет определяться формулами $\bar{V} = (L_{10}/L)^{(1-B)/B} \bar{V}_1(\beta)$,

$$L = L_{10} \left[1 + 2\eta_1^2 \alpha \frac{(1 + \sqrt{\beta_2})^2}{BL_{10}} \tilde{V}_1(\beta)(t - t_0) \right]^B; \tag{2.13}$$

$$B = Z_0/(Z_0 + 2k_y). \tag{2.14}$$

Формулы (2.11) и (2.14) дают зависимость интенсивности J_1 и степени B от числа Атвуда A . Зависимости представлены на рис. 4. Приблизительно их можно описать простыми формулами

$$\frac{dL_1}{2ds} = J_1 = 0,06(1 + 0,61 A) A, \quad B = \frac{2}{7} + 0,09 A^2. \tag{2.15}$$

Таким образом, широко применяемая линейная зависимость $J_1(A)$ справедлива только в окрестности малых значений A . Поэтому при ее использовании коэффициент α в предельном случае $A = 1$ следует увеличить в 1,61 раза. С увеличением числа Атвуда степень B также увеличивается от 0,28 до 0,38 для $(l-v)$ -модели.

Решение при произвольном ускорении (сравнение с результатами работы [4]). При произвольном ускорении уравнение (2.9) и второе уравнение в (2.7) интегрируются численно. В случае импульсного ускорения решение представляется формулой (2.13). При начальных условиях $U_0 = 3,4$ см/мс, $L_{10} = 0,4$ см, $t_0 = 9$ мс, $A = 0,22$ имеем $L_1 = 0,4[1 + 0,786(t - 9)]^{0,288}$ см.

Следует отметить, что ширина области перемешивания L_{10} в момент прекращения действия ускорения совпадает с экспериментально измеренной. Это значит, что в эксперименте в начальный момент реализовывались хаотические начальные возмущения с малой

амплитудой, так что начальной шероховатостью L_0 по сравнению с полученной после действия импульсного ускорения шириной L_{10} можно пренебречь. Значение L_{10} получается из (2.12) в предположении больших значений параметра β ($\beta \rightarrow \infty$):

$$\sqrt{L_{10}} = 4\eta_1 \tilde{\alpha} \sqrt{\frac{\Phi(\eta_1) \tilde{A} U_0 t_0}{2(1 + 4\tilde{k}_y)}}.$$

Уравнение (2.9), второе уравнение в (2.7) при малых числах Атвуда совпадают с уравнениями (1) из работы [4]:

$$\frac{dV_b^2}{dh_b} = \beta_0 A g - C_d \frac{V_b^2}{h_b}, \quad \frac{dh_b}{dt} = V_b. \quad (2.16)$$

Здесь $h_b = L_1$; $V_b = 1,5\bar{V}$. Выбор постоянных β_0 и C_d в настоящей работе отличается от сделанного в [4]: $\beta_0 = 0,73$ (вместо 0,5 в [4]), $C_d = 2,3$ (вместо 1,6 в [4]).

Заметим также, что полученное уравнение (2.9) в отличие от уравнения из работы [4] (здесь (2.16)) имеет более общий характер, так как устанавливает дополнительную зависимость решения от числа Атвуда. Уравнения (2.16) для интенсивности перемешивания J_1 приводят к следующей формуле: $J_1 = 0,06 A$, в то время как из (2.9) следует закон (2.15).

3. УРАВНЕНИЯ $(k-\varepsilon)$ -МОДЕЛИ В ПРИБЛИЖЕНИИ КУСОЧНО-ПОСТОЯННОГО КОЭФФИЦИЕНТА ДИФфуЗИИ

Для уравнений $(k-\varepsilon)$ -модели также можно применить приближение кусочно-постоянного коэффициента диффузии D_ε [1]:

$$D_\varepsilon = \begin{cases} c_\mu \bar{k}^2 / \bar{\varepsilon}_t, & x > 0, \\ c_\mu \beta_2 \bar{k}^2 / \bar{\varepsilon}_t, & x < 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

где β_2 — коэффициент, определяемый эмпирически согласно формуле (2.4); энергия турбулентности k и интенсивность $\bar{\varepsilon}_t$ являются функциями только времени. После осреднения исходных уравнений модели (1.1) по области перемешивания $-L_2 \leq x \leq L_1$ получим

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{k}}{dL^2} - P_0 \frac{\bar{k}}{L^2} + \frac{\bar{\varepsilon}_t^2}{4\eta_1^2(1 + \sqrt{\beta_2})^2 c_\mu \bar{k}^2} &= \frac{\Phi(\eta_1) \sqrt{\beta_2} \bar{g} A_0}{4\eta_1^2 L(1 + \sqrt{\beta_2})}, \\ \frac{d\bar{\varepsilon}_t}{dL^2} - P_2 \frac{\bar{\varepsilon}_t}{L^2} + \frac{c_{\varepsilon 2} \bar{\varepsilon}_t^3}{4\eta_1^2(1 + \sqrt{\beta_2})^2 c_\mu \bar{k}^3} &= \frac{\Phi(\eta_1) \sqrt{\beta_2} c_{\varepsilon 1} \bar{g} A_0 \bar{\varepsilon}_t}{\eta_1^2 L \bar{k} (1 + \sqrt{\beta_2})}, \\ \frac{dL^2}{dt} &= 4\eta_1^2 c_\mu (1 + \sqrt{\beta_2})^2 \frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}_t}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $P_0 = -0,5 - 1/(6\sqrt{2})\Phi(\sqrt{2}\eta_1) A_0^2 X_p$; $P_2 = -0,5 - 1/(3\sqrt{2})\Phi(\sqrt{2}\eta_1) A_0^2 X_p$. Для упрощения полученных уравнений сделаем еще одно предположение [13]: постоянную модели $c_{\varepsilon 1}$ положим равной 1,5 вместо 1,43 в общей модели. В этом случае уравнения модели (3.2) допускают интеграл

$$\bar{\varepsilon}_t^2 = 4\eta_1^2 \tilde{c}_\mu \frac{18 - \sqrt{2}\Phi(\sqrt{2}\eta_1) A_0^2 X_p}{3(2c_{\varepsilon 2} - 3)} \frac{\bar{k}^3}{L^2}, \quad (3.3)$$

где $\tilde{c}_\mu = c_\mu(1 + \sqrt{\beta_2})^2/4$; $\tilde{A}_0 = 2 A_0/(1 + \sqrt{\beta_2})$.

Уравнения (3.2) с учетом (3.3) перейдут в следующие:

$$\theta_0 \frac{d\bar{k}}{dL} + 2P_3 \frac{\bar{k}}{L} = \frac{\Phi(\eta_1) \sqrt{\beta_2} g_0 \tilde{A}_0}{4\eta_1^2}; \quad (3.4)$$

$$\frac{dL}{dt} = 8\eta_1 \sqrt{\bar{c}_\mu \bar{k}} \sqrt{\frac{3(2c_{\varepsilon 2} - 3)}{18 - \sqrt{2}\Phi(\sqrt{2}\eta_1)A_0^2 X_p}}, \quad (3.5)$$

где

$$\theta_0 = 1 + \frac{3(2c_{\varepsilon 2} - 3)c_\mu \Phi^2(\eta_1) \sqrt{\beta_2} A_0^2}{\eta_1^2 (18 - \sqrt{2}\Phi(\sqrt{2}\eta_1) A_0^2 X_p)}, \quad P_3 = -P_0 + \frac{18 - \sqrt{2}\Phi(\sqrt{2}\eta_1) A_0^2 X_p}{12(2c_{\varepsilon 2} - 3)}.$$

Здесь учтено дополнительное ускорение

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -2c_\mu \sqrt{\beta_2} (1 + \sqrt{\beta_2}) \frac{3(2c_{\varepsilon 2} - 3)\Phi(\eta_1) A_0}{18 - \sqrt{2}\Phi(\sqrt{2}\eta_1) A_0^2 X_p} \frac{d\bar{k}}{dL},$$

которое следует добавить к ускорению \bar{g} в правой части первого уравнения системы (3.2).

Если положить $\bar{k} = \bar{V}^2/2$, то уравнение (3.4) при малых A_0 эквивалентно (2.9). Если дополнительно положить $\alpha_\varepsilon = 0,85$, $c_\mu = 1,62$, $c_{\varepsilon 2} = 15/8$, $\eta_1 = 1,128$, $\Phi(\eta_1) = 0,89$, $\Phi(\sqrt{2}\eta_1) = 0,97$, то уравнения для ширины области перемешивания (3.5) и (2.7) будут тождественны при малых A_0 и соответствовать формуле (2.10) ($0 \leq t \leq t_0$). Однако, если A_0 не мало, то $(k-\varepsilon)$ -модель дает другие зависимости, отличные от (2.15) (см. рис. 3).

Интенсивность J_1 и степень B зависят от числа Атвуда следующим образом: $dL_1/2ds = J_1 = 0,06(1 + 0,42 A) A$, $B = 2/7 + 0,05 A^2$. Сравнение интенсивности J_1 и степени затухания B турбулентного перемешивания, рассчитанных по $(l-v)$ - и $(k-\varepsilon)$ -моделям, проведено на рис. 3. Интенсивности $J_{1,k-\varepsilon}$ и $J_{1,l-v}$ почти совпадают при малых значениях A , но при $A = 1$ $J_{1,k-\varepsilon}/J_{1,l-v} = 1,14$. Значение B с ростом числа Атвуда увеличивается в обеих моделях, но в $(k-\varepsilon)$ -модели медленнее. В результате при $A = 1$ $B_{l-v}/B_{k-\varepsilon} = 1,12$. Для выяснения причины отмеченных различий необходимо проведение дополнительных экспериментов.

Результаты интегрирования системы уравнений (3.4), (3.5) для четырех типов ускорения при $A = 0,22$ приведены на рис. 3. Из сравнения следует хорошее соответствие экспериментальным данным [4], что свидетельствует о достоверности приближенной модели.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С использованием $(k-\varepsilon)$ -модели рассмотрено развитие области турбулентного перемешивания для четырех типов ускорения: постоянного, убывающего, нарастающего и импульсного. Расчеты по коду TURINB удовлетворительно согласуются с результатами экспериментов [4].

В приближении кусочно-постоянного коэффициента турбулентной диффузии построены аналитические решения для постоянного и импульсного ускорений, а также для четырех типов ускорения из работы [4]. Для $(l-v)$ - и $(k-\varepsilon)$ -моделей получены простые аналитические выражения, описывающие зависимость интенсивности турбулентного перемешивания $dL_1/2ds$ и степени затухания B от числа Атвуда. Различие между моделями существует, однако имеющиеся к настоящему времени экспериментальные результаты не позволяют сделать окончательный выбор.

Проведено сравнение результатов, полученных как по точной $(k-\varepsilon)$ -модели, так и по приближенным $(l-v)$ - и $(k-\varepsilon)$ -моделям, с результатами эксперимента [4]. Результаты сравнений удовлетворительны и подтверждают правильность ранее проведенного выбора постоянных в $(k-\varepsilon)$ - и $(l-v)$ -моделях, а также достоверность предложенных приближенных формул. Представляет интерес проведение аналогичного сравнения для других известных полуэмпирических моделей.

Авторы выражают благодарность А. В. Полионову за ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Неуважаев В. Е.** Развитие турбулентного перемешивания, вызванного неустойчивостью Рихтмайера — Мешкова // *Мат. моделирование*. 1991. Т. 3, № 7. С. 10–28.
2. **Mikaelian K.** Turbulent mixing generated by Rayleigh — Taylor and Richtmayer — Meshkov instabilities // *Physica D*. 1989. V. 36. P. 343–348.
3. **Shvarts D., Alon U., Ofer D., et al.** Nonlinear evolution of multimode Rayleigh — Taylor instability in two and three dimensions // *Phys. Plasmas*. 1995. V. 2. P. 2465–2472.
4. **Dimonte G., Schneider M.** Turbulent Rayleigh — Taylor instability experiments with variable acceleration // *Phys. Rev. E*. 1996. V. 54, N 4. P. 3740–3743.
5. **Kucherenko Yu. A., Balabin S. I., Pylaev A. P., et al.** Experimental study of the gravitational turbulent mixing self-similar mode // *Proc. of the 3rd Intern. workshop on the physics of compressible turbulent mixing, Abbey of Royamont, France, June 17–19, 1991*. S. 1. P. 427–454.
6. **Неуважаев В. Е.** К теории турбулентного перемешивания // *Докл. АН СССР*. 1975. Т. 222, № 5. С. 1053–1056.
7. **Неуважаев В. Е., Яковлев В. Г.** Расчет гравитационного турбулентного перемешивания по $(k-\varepsilon)$ -модели // *Вопр. атом. науки и техники. Сер. Теорет. и прикл. физика*. 1988. Вып. 1. С. 28–36.
8. **Neuvazhayev V. E.** Turbulent mixing induced by the Richtmayer — Meshkov instability // *Proc. of the 3rd Intern. workshop on the physics of compressible turbulent mixing, Abbey of Royamont, France, June 17–19, 1991*. S. 1. P. 483–494.
9. **Неуважаев В. Е.** Свойства модели турбулентного перемешивания границы раздела ускоряемых разноплотных жидкостей // *ПМТФ*. 1983. № 5. С. 81–88.
10. **Неуважаев В. Е., Яковлев В. Г.** Модель и метод численного расчета турбулентного перемешивания границы раздела, движущейся ускоренно // *Вопр. атом. науки и техники. Сер. Методики и программы числ. решения задач мат. физики*. 1984. Вып. 2. С. 17–25.
11. **Youngs D. L.** Numerical simulation of turbulent mixing by Rayleigh — Taylor instability // *Physica D*. 1984. V. 12. P. 32–44.
12. **Read K. I.** Experimental investigation of turbulent mixing by Rayleigh — Taylor instability // *Ibid.* P. 45–57.
13. **Неуважаев В. Е.** Свойства модели турбулентного перемешивания, основанной на двухкомпонентной двухскоростной модели. Сепарационная добавка в диффузионных моделях // *Мат. моделирование*. 1995. Т. 7, № 7. С. 3–18.

*Поступила в редакцию 7/VIII 2000 г.,
в окончательном варианте — 8/XII 2000 г.*
