

ВОЗНИКНОВЕНИЕ КОНВЕКЦИОННЫХ РЕЖИМОВ ДВОЙНОГО ПЕРИОДА В ПЕРИОДИЧЕСКОМ ПОЛЕ ВНЕШНИХ СИЛ

Г. С. Маркман, В. И. Юдович

(Ростов-на-Дону)

Исследуется возникновение вторичных конвективных течений в задаче Рэлея (в горизонтальном слое вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами) при наличии изменяющегося со временем с периодом T параметра: градиента температуры или напряженности поля силы тяжести.

Зависимость критического числа Рэлея от частоты модуляции параметра для T -периодических решений исследована в [1].

Рассмотрены решения с удвоенным периодом и половинной частотой (так называемые полупеиелье решения). С помощью алгоритма цепных дробей [2,3] найдены критические числа Рэлея при различных значениях частоты модуляции. Оказалось, что в значительном диапазоне частот именно решения с периодом $2T$ ответственны за появление неустойчивости, так как им соответствуют меньшие критические значения числа Рэлея, чем T -периодическим.

С помощью метода Ляпунова — Шмидта установлено, что при значениях числа Рэлея, больших критического (но близких к нему), возникает одно (с точностью до сдвига вдоль горизонтали) вторичное $2T$ -периодическое течение, которое устойчиво относительно возмущений одинаковой с ним периодичности и четности.

1. Рассмотрим плоский горизонтальный слой несжимаемой вязкой жидкости в периодически изменяющемся со временем поле силы тяжести. Градиент температуры постояен, массовая сила вертикальна и изменяется со временем по закону

$$f = g(1 + \eta \sin \Omega t), \quad g, \eta = \text{const} \quad (1.1)$$

Уравнения нестационарной конвекции при этих условиях допускают решение, соответствующее относительному равновесию жидкости в системе координат, совершающей вертикальные колебания с ускорением (1.1); распределение температуры при этом стационарно по времени и линейно по z .

Безразмерные уравнения малых возмущений равновесия в указанной системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - \Delta \Delta \psi &= R(1 + \eta \sin \omega t) \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{1}{p} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \right) \\ \sqrt{p} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta &= R \frac{\partial \psi}{\partial x} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \\ p &= \frac{\nu}{\chi}, \quad R^2 = \text{Ra} = \frac{g \beta a h^4}{\nu \chi}, \quad \omega = \frac{\Omega h^2}{\sqrt{\nu \chi}} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь ψ — функция тока, θ — температура, p и Ra — числа Прандтля и Рэлея соответственно, ω — безразмерная частота модуляции.

Линеаризовав систему уравнений (1.2) в окрестности равновесного решения, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - \Delta \Delta \psi &= R (1 + \eta \sin \omega t) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \sqrt{p} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta &= R \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Решение системы (1.3) ищем в виде

$$\psi = \psi(t) e^{i(\alpha x + \pi z)}, \quad \theta = \theta(t) e^{i(\alpha x + \pi z)} \quad (1.4)$$

В результате приходим к одному уравнению относительно θ ¹

$$\begin{aligned} \theta'' + k^2 q \theta' + \left[k^4 - \frac{\alpha^2}{k^2} \text{Ra} (1 + \eta \sin \omega t) \right] \theta &= 0 \\ q = (1 + p) p^{-1/2}, \quad k^2 = \alpha^2 + \pi^2, \quad \theta' = d\theta / dt \end{aligned} \quad (1.5)$$

решение которого ищем в виде ряда

$$\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\omega t / 2) \quad (1.6)$$

Из (1.5) видно, что коэффициенты c_n удовлетворяют бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} a_n c_n + c_{n-2} - c_{n+2} &= 0 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ a_n &= \frac{2k^4 q n \omega}{\alpha^2 \eta \text{Ra}} - i \frac{2k^4}{\alpha^2 \eta \text{Ra}} \left(\frac{i n^4}{k^2} - \frac{\alpha^2 \text{Ra}}{k^2} - n^2 \omega^2 \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Разыскиваем такие решения системы (1.7), что $|c_n| \rightarrow 0$ при $|n| \rightarrow \infty$. Система (1.7) распадается на две независимые системы уравнений соответственно для коэффициентов c_n с четными и нечетными номерами. Система для коэффициентов с четными номерами соответствует ранее рассмотренным T -периодическим решениям [1].

Заметим, что в случае малых амплитуд ($\eta \leq 1$) уравнение (1.5) имеет только T -периодические решения [6]. Это утверждение является аналогом так называемого «принципа смены устойчивости» для стационарных задач.

Коэффициенты Фурье для $2T$ -периодического собственного решения (не являющегося T -периодическим) находим из системы

$$a_{2n+1} c_{2n+1} + c_{2n-1} - c_{2n+3} = 0 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1.8)$$

С помощью замены

$$c_{2n+1} = d_n \quad (1.9)$$

система приводится к виду

$$a_{2n+1} + \rho_n^{-1} = \rho_{n+1}, \quad \rho_n = d_n / d_{n-1} \quad (1.10)$$

Отсюда выводим два представления для ρ_n

$$\rho_n = -\frac{1}{a_{2n+1}} + \frac{1}{a_{2n+3}} + \dots, \quad \rho_n = a_{2n-1} + \frac{1}{a_{2n-3}} + \frac{1}{a_{2n-5}} \dots \quad (1.11)$$

¹ Это же уравнение получается при исследовании конвекции в постоянном гравитационном поле, если градиент температуры $\nabla \theta_0 = a (1 + \eta \sin \omega t)$ [4].

Условие совпадения этих двух выражений для ρ_n приводит к трансцендентному уравнению для определения Ra

$$a_{-1} + \frac{1}{a_{-3} + \frac{1}{a_{-5} + \frac{1}{a_{-7} + \dots}}} + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_5 + \dots}}} = 0 \quad (1.12)$$

Расчеты зависимости числа Рэлея Ra от волнового числа α и частоты модуляции ω проводились на ЭВМ «ODRA-1204».

На фиг. 1 представлена нейтральная кривая на плоскости Ra, α . (Остальные параметры имеют следующие значения: $\omega = 5$, $\eta = 10$, $p = 1$.) Зона неустойчивости находится выше нейтральной кривой.

Наиболее опасным является возмущение с волновым числом α_* , которому соответствует минимальное значение Ra_* на нейтральной кривой. С ростом частоты ω критическое волновое число α_* также растет.

Заметим, что в отличие от случая T -периодических решений минимальное значение Ra_* достигается при всех ω на первом языке.

С ростом ω возрастает и критическое значение числа Рэлея. На фиг. 2а, 2б представлены графики зависимости Ra_* и α_* от ω при фиксированных значениях $\eta = 10$ и $p = 1$.

Сравнение этих графиков с соответствующими результатами работы [1] показывает, что в значительном диапазоне частот $2T$ -периодическим решениям отвечают меньшие числа Рэлея и лишь при очень малых или очень больших частотах первыми возникают T -периодические решения.

2. Для исследования $2T$ -периодических течений, появляющихся после потери устойчивости относительного равновесия, воспользуемся методом Ляпунова — Шмидта [6]. При этом будем предполагать, что критическое значение числа Рэлея Ra_* простое. Заметим, что простота Ra_* далее подтверждается расчетом. При этом единственность собственного решения (1.6) следует из однозначной разрешимости (1.7), отсутствие присоединенных векторов доказывается численной проверкой условия леммы 1.5 из [3].

Систему уравнений (1.2) запишем в виде операторного уравнения в пространстве пар функций $w = (\psi, \theta)$, периодических по времени с периодом $2T$

$$Aw = RB(t)w + L(w, w)$$

$$Aw = \begin{pmatrix} \frac{1}{Vp} \frac{\partial \Delta}{\partial t} - \Delta & 0 \\ 0 & Vp \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \theta \end{pmatrix}, \quad Bw = \begin{pmatrix} 0 & \Phi \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \theta \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

$$L(w_1, w_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi_2}{\partial z} - \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial \Delta \psi_2}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial \theta_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad \Phi = 1 + \eta \sin \omega t$$

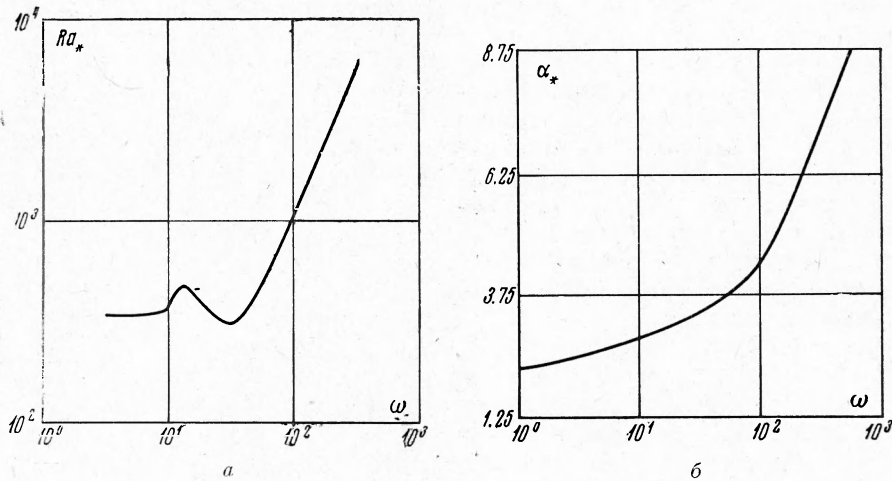
Через $\varphi = (\psi_0, \theta_0)$ обозначим решение линеаризованной задачи (1.3)

$$Aw = RB(t)w \quad (2.2)$$

отвечающее критическому значению параметра $\bar{R}_* = Ra_*^{1/2}$.

Применяя обычную схему Ляпунова — Шмидта, можно вывести, что если постоянная γ вещественна и отлична от нуля, то существует одно с точностью до сдвига по x [7] нетривиальное решение задачи (1.3)

$$w = \gamma \varepsilon \varphi + \gamma^2 \varepsilon^2 w_1 + O(\varepsilon^3), \quad \varepsilon = \sqrt{R - R_*} \quad (2.3)$$



Фиг. 2 а, б

Постоянная γ определяется по формуле

$$\gamma^2 = \left[\bar{R}_* \int_0^{2T} (L^\circ(\varphi, w_1), w_*)_E dt \right]^{-1} \quad (2.4)$$

Здесь w_1 — решение неоднородной задачи

$$Aw - R_* B(t)w = L(\varphi, \varphi) \quad (2.5)$$

w_* — собственный вектор сопряженного уравнения

$$Aw - R_* B^*(t)w = 0, \quad R_* \int_0^{2T} (B\varphi, w_*)_E dt = 1 \quad (2.6)$$

Оператор L° и скалярное произведение в (2.4) определены так:

$$\begin{aligned} L^\circ(u_1, u_2) &= L(u_1, u_2) + L(u_2, u_1) \\ (u_1, u_2)_E &= ((\psi_1, \theta_1), (\psi_2, \theta_2))_E = (\psi_1, \psi_2)_{L_2} + (\theta_1, \theta_2)_{L_2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Исследуя уравнение в вариациях

$$Au - R_* Bu - \varepsilon \gamma L^\circ(\varphi, u) + \varepsilon^2 \gamma^2 L^\circ(w_1, u) + \dots = -\sigma u \quad (2.8)$$

как и в [8], можно показать, что решение (2.3) будет устойчивым или неустойчивым в зависимости от того, в левой или в правой полуплоскости окажется собственное число σ_ε уравнения (2.8), возникающее из $\sigma = 0$.

Нетрудно вывести, что

$$\sigma_\varepsilon = \zeta (R - R_*) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad \zeta = \left[R_* \int_0^{2T} (\varphi, w_*)_E dt \right]^{-1} \quad (2.9)$$

Итак, течение (2.3) устойчиво по линейному приближению, если $\zeta (R - R_*) > 0$, и неустойчиво в противном случае. Из результатов работы [9] следует, что имеет место и нелинейная устойчивость (в классе возмущений той же периодичности по x).

Вычисление постоянной γ приводилось следующим образом. Решение системы (1.3) ищем в виде

$$\psi = \psi_0(t) \sin \alpha x \sin \pi z, \quad \theta = \theta_0(t) \cos \alpha x \sin \pi z \quad (2.10)$$

Амплитуду $\theta_0(t)$ находим из уравнения (1.5) с помощью ряда (1.6). Коэффициенты c_{2n+1} ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) находятся по формулам

$$c_1 = 1, \quad c_{2n+1} = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n \quad (n > 0), \quad c_{-2n-1} = \bar{c}_{2n+1}$$

(черта — знак комплексного сопряжения).

Амплитуду $\psi_0(t)$ функции тока находим теперь из второго уравнения системы (1.3). Решения сопряженной системы находятся аналогично.

Неоднородная система (2.5) в данном случае такова:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi_1 - \Delta \Delta \psi_1 &= R_* (1 + \eta \sin \omega t) \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \\ \sqrt{p} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} - \Delta \theta_1 &= R_* \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\pi \alpha}{2} \psi_0(t) \theta_0(t) \sin 2\pi z \end{aligned} \quad (2.11)$$

Решение системы (2.11) ищем в виде

$$w_1 = \varphi_1(t) \sin 2\pi z \quad (2.12)$$

Периодическую с периодом $2T$ вектор-функцию $\varphi_1(t) = (\psi_1(t), \theta_1(t))$ находим из уравнений

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \psi_1' + 4\pi^2 \psi_1 = 0, \quad \sqrt{p} \theta_1' + 4\pi^2 \theta_1 = -\frac{\pi \alpha}{2} \psi_0 \theta_0 \quad (2.13)$$

При этом $\psi_1 = 0$, а θ_1 легко находится по известным $\psi_0(t)$ и $\theta_0(t)$.

Вычисления показали, что $\zeta > 0$ и $\gamma^2 > 0$ при всех значениях ω .

Таким образом, при малых $Ra - Ra_* > 0$ существует одно с точностью до сдвига по x устойчивое вторичное течение, $2T$ -периодическое по времени.

Заметим, что в случае T -периодических решений в широком диапазоне частот ω возникают неустойчивые докритические режимы. Вычисления показали (см. фиг. 2а), что в этом диапазоне частот $2T$ -периодическим режимам соответствуют меньшие критические значения числа Рэлея, при переходе через которые возникают устойчивые $2T$ -периодические вторичные течения.

Поступила 26 IV 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркман Г. С., Юдович В. И. Численное исследование возникновения конвекции в слое жидкости под действием периодических по времени внешних сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 3.
2. Мешалкин Л. Д., Синай Я. Г. Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости. ПММ, 1961, т. 25, вып. 6.

