

УДК 532.526

ИССЛЕДОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА МОДЕЛИ ГИПЕРЗВУКОВОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

В. Н. Ветлущий, Е. М. Хоутман*

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

* Технический университет, 2600 GB Делфт, Нидерланды

Разработан алгоритм расчета пространственного сжимаемого турбулентного пограничного слоя на поверхности заостренного тела на основе численного решения трехмерных уравнений и алгебраических моделей турбулентности. Выполнены расчеты обтекания модели гиперзвукового самолета, полученные значения чисел Стантона сопоставлены с результатами эксперимента. Проведено исследование влияния числа Маха, угла атаки и числа Рейнольдса на параметры пограничного слоя. Показано, что изменение положения зоны перехода слабо влияет на величину коэффициента трения в области развитого турбулентного течения.

1. В связи с развитием авиационной и космической техники большое значение приобретает задача изучения аэродинамического нагрева поверхности летательного аппарата, а также сил трения, вклад которых в его полное сопротивление значителен, особенно в случае заостренного тела при малых углах атаки. Для ее решения традиционно применяются два подхода: теоретический и экспериментальный. Результаты измерений считаются обычно наиболее правильными и используются, в частности, для верификации теоретических (численных) подходов, хотя эксперименты редко бывают прямыми, и исследователь вынужден выбирать некоторую модель явления, чтобы вычислить искомый параметр. Теоретический подход строится на основе некоторой модели течения, обычно не учитывающей всех особенностей явления. Кроме того, поскольку использование численных методов для решения сложных систем уравнений может вносить свои погрешности, для верификации алгоритма необходимо сравнение полученных с его помощью результатов с расчетами на основе других моделей и экспериментами.

Одним из преимуществ теоретического подхода является возможность получения в расчете сразу всех параметров течения, тогда как в эксперименте измеряется чаще всего один. Кроме того, при изучении гиперзвукового обтекания следует учитывать, что ни одна установка в мире пока не воспроизводит натурную температуру торможения, а следовательно, не моделирует полностью тепловые процессы. К преимуществам расчетного подхода можно отнести простоту изменения определяющих параметров (в рамках справедливости выбранной модели), быстрое получение нового результата, а также дешевизну расчетов по сравнению с экспериментами.

Наиболее полной моделью, описывающей различные течения, является модель на основе полных уравнений Навье — Стокса, с помощью которых получена картина обтекания ряда тел [1–8]. В первых двух работах рассмотрены двумерные течения около затупленных тел и профилей, а в остальных — пространственные. В качестве результатов везде приводятся изолинии и распределение давления на поверхности тела, и только в работах [2, 3, 5] — коэффициенты трения или числа Стантона. Однако последние не сравниваются с результатами других авторов и экспериментами, и это, по-видимому, неслучайно.

Система полных уравнений Навье — Стокса является эллиптической, поэтому маршевые методы расчета по любой физической переменной для нее некорректны. Для удобства решения к ней обычно добавляют четвертую переменную — время. Задача становится параболической, и ее решают методом установления, но такая четырехмерная задача для пространственных тел под силу только современным суперкомпьютерам.

При решении уравнений Навье — Стокса для течений с реальными числами Рейнольдса (10^7 – 10^8) требуется учитывать большие градиенты параметров потока вблизи стенки. Для точного расчета турбулентного течения необходимо не только несколько десятков точек разностной схемы поперек пограничного слоя, но и несколько точек (4–6) в ламинарном подслое. Только в этом случае удастся получить коэффициенты трения и числа Стантона на поверхности с приемлемой точностью. Однако это условие предъявляет жесткие требования к числу шагов и растяжению координаты по нормали и не всегда соблюдается в работах. Очевидно, поэтому в них чаще всего демонстрируется общая картина течения и распределение давления на поверхности, поскольку эти результаты наименее чувствительны к указанному требованию. Сравнить же коэффициенты трения и числа Стантона с экспериментальными данными не рискует в указанных работах практически никто.

Помимо полных уравнений Навье — Стокса для расчета пространственных течений часто используются параболизированные (упрощенные) уравнения Навье — Стокса, когда выбрасываются вязкие члены вдоль маршевой координаты [9–12], и уравнения вязкого ударного слоя, где оставлены вязкие члены только по нормали к поверхности [13–17]. Достоинство этих приближений, заключающееся в сохранении всех членов системы уравнений Эйлера, оборачивается их недостатком. Данные уравнения в пристеночных дозвуковых областях остаются эллиптическими, что позволяет возмущениям распространяться вверх по потоку. Поэтому использование маршевого метода возможно лишь после применения некоторой «регуляризации» в пристеночной области. Однако остается неясным, какие погрешности вносит «регуляризация» в параметры потока в этой области и, в частности, в коэффициенты трения и числа Стантона, вычисляемые дифференцированием профилей скорости и температуры именно в пристеночной области.

Требование относительно количества точек поперек турбулентного пограничного слоя и в ламинарном подслое для этих моделей также имеет место, но выполняется не во всех работах. Видимо, поэтому сравнение рассчитанных коэффициентов трения или чисел Стантона с экспериментами приводится только в [13, 14, 17].

К недостаткам упрощенных уравнений Навье — Стокса следует также отнести отсутствие для них строгого математического обоснования в смысле какой-либо асимптотической теории. Кроме того, имеется некоторый произвол в выборе маршевой координаты, а следовательно, вероятность появления некоторой погрешности в решении, которую невозможно оценить априори. В этом отношении предложенная Прандтлем [18] и обоснованная Ван-Дайком [19] теория пограничного слоя есть строгая асимптотическая теория для больших чисел Рейнольдса; она тем точнее отражает реальное течение, чем выше число Рейнольдса. В силу свойства параболичности уравнения пограничного слоя могут быть решены маршевым методом, а требование о количестве точек в поперечном направлении вполне выполнимо даже для вычислительных машин среднего класса, поскольку решение строится отдельно в узкой пристеночной области.

К недостаткам модели пограничного слоя следует отнести невозможность ее независимого использования. Уравнения пограничного слоя требуют знания на внешней границе всех параметров потока, кроме нормальной компоненты скорости, которые могут быть найдены экспериментально или численно из решения задачи о невязком обтекании тела. Условия на внешней границе должны быть определены с высокой точностью, поскольку их погрешность возрастает при решении с их помощью уравнений пограничного слоя.

Обтекаемая поверхность должна быть также описана с приемлемой точностью некоторой гладкой функцией со вторыми непрерывными производными, которые входят в коэффициенты указанных уравнений.

На основании сказанного выше в настоящей работе для исследования обтекания гиперзвукового летательного аппарата выбрана классическая модель Прандтля [18], в которой течение между телом и ударной волной разбивается на невязкую область и тонкий пограничный слой. Для первой области решались уравнения Эйлера, для второй — уравнения пространственного пограничного слоя.

2. Имеется ряд работ по исследованию ламинарного пограничного слоя на острых эллиптических конусах при больших [20–24] и малых углах атаки [25, 26]. Для указанных тел получены экспериментальные значения чисел Стантона St [27]. При больших углах атаки характерно расположение линии растекания на поверхности конуса в плоскости симметрии, где имеют место максимальные значения коэффициента трения c_f и St . При малых углах атаки линия растекания может находиться вне плоскости симметрии, а положение максимума c_f и St не совпадает ни с тем, ни с другим. Пространственное обтекание заостренного биеллиптического тела рассчитано в [28], где показана возможность исчезновения в пограничном слое поверхности растекания, связанного с перемещением максимума давления из плоскости симметрии к боковой стороне.

Ряд работ посвящен ламинарному пограничному слою на плоских и профилированных треугольных крыльях [29–36]. Турбулентный пограничный слой для той же геометрии рассчитан в [37, 38]. Здесь изучено влияние определяющих параметров и оценен вклад сил трения в полное сопротивление крыла. Экспериментальные исследования турбулентного пограничного слоя выполнены для треугольных крыльев с острыми [39] и затупленными [40] передними кромками.

Алгоритм расчета ламинарного и турбулентного пограничных слоев на заостренном теле фюзеляжеобразной формы представлен в [41–43]. Экспериментальное исследование турбулентного пограничного слоя на оживально-цилиндрических телах под углами атаки приведены в [44–47]. Впервые сверхзвуковое обтекание аппарата ЕЛАС 1 рассчитано в рамках модели вязкого ударного слоя [15], однако не были представлены распределения параметров c_f и St . Числа Стантона на его поверхности измерены в ударной трубе при числе Маха 7 [48] и в сверхзвуковой трубе при числах Маха 1,5–2,5 [49].

3. Настоящие исследования турбулентного пограничного слоя выполнены на передней части модели гиперзвукового самолета ЕЛАС 1, которая представляет собой острый биеллиптический конус с углом полураствора в горизонтальной плоскости 15° . Отношение осей эллипса поперечного сечения составляет для подветренной стороны 1 : 4 и для наветренной — 1 : 6, что отвечает углам полураствора в вертикальной плоскости $3,83$ и $2,56^\circ$ соответственно.

Невязкое течение за ударной волной рассчитано с помощью записанных в дивергентном виде уравнений Эйлера, представленных в разностном виде, методом конечных объемов, предложенным в [50]. В аппроксимации производных по пространству использовалось расщепление по разностям потоков [51] с учетом свойств распространения возмущений. Вычисление потоков в ячейках выполнено в соответствии с монотонной схемой верхней релаксации Ван-Леера для законов сохранения, которая обеспечивала второй порядок точности и подавление осцилляций на разрывах (скачках уплотнения). Для расчетов использовалась разностная сетка, связанная с поверхностью обтекаемого тела, предложенная в [15] при решении уравнений вязкого ударного слоя. Система разностных уравнений решалась нелинейным многосеточным методом с релаксацией Гаусса — Зейделя для сглаживания. Расчеты выполнены на мини-суперкомпьютере Convex C3820 для чисел Маха 2,5; 4; 7 и углов атаки от 0 до 15° .

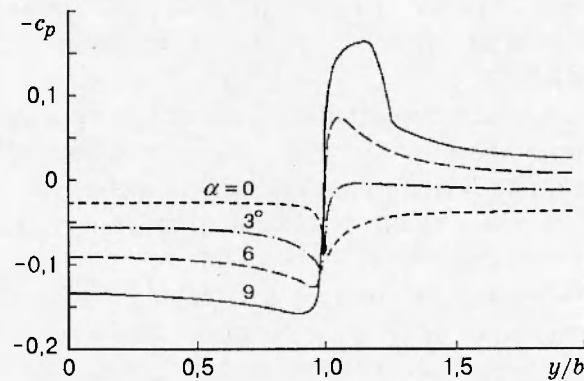


Рис. 1

На рис. 1 представлено распределение коэффициента давления c_p на поверхности тела в сечении $\xi/L = 0,36$ при $M_\infty = 2,49$ и для разных углов атаки. Здесь и далее по оси абсцисс отложено отношение декартовой координаты в поперечном направлении y к местному полуразмаху b с продолжением за переднюю кромку на подветренную сторону, где величина y/b продолжает меняться от 1 до 2. На подветренной и наветренной сторонах давление практически постоянно, лишь в окрестности передней кромки происходит его резкое изменение. Видно, что при $\alpha = 9^\circ$ на подветренной стороне ($y/b \cong 1,2$) образуется висячий скачок уплотнения.

Расчет пограничного слоя выполнен на основе уравнений трехмерного сжимаемого пограничного слоя, записанных в неортогональной системе координат (ξ, η, ζ) , связанной с поверхностью обтекаемого тела. Координата ξ отсчитывается от вершины тела вдоль некоторой оси, η — расстояние по нормали к обтекаемой поверхности, ζ — меридиональный угол в поперечном сечении [41–43]. Предполагается, что поверхность тела в окрестности вершины может быть аппроксимирована конической поверхностью. В этом случае уравнения пограничного слоя допускают автомодельное решение, зависящее от переменных ζ , $\eta/\sqrt{\xi}$ [25, 26], которое может быть использовано в качестве начальных данных для всей задачи. На внешней границе задавались параметры потока, полученные в задаче невязкого обтекания данного тела. В плоскости $\zeta = 0$ ставились условия симметрии, если она являлась поверхностью растекания, в противном случае условия не требовались. Другая граница $\zeta = \zeta_k$ всегда выбиралась таким образом, чтобы газ через нее вытекал из рассматриваемой области, поэтому условия на ней не ставились. Уравнения пограничного слоя решались численно с помощью абсолютно устойчивой разностной схемы второго порядка, которая не связана с поверхностью растекания [52].

Для расчета ламинарного, переходного и турбулентного течений в уравнениях использовались суммарные коэффициенты вязкости и теплопроводности, в которых к ламинарным коэффициентам добавлялись турбулентные с некоторым коэффициентом перемежаемости Γ . Для коэффициента турбулентной вязкости использовались четыре различные алгебраические модели турбулентности. Ранее было проведено сравнение коэффициентов трения, рассчитанных с помощью каждой из них, и показано, что полученные результаты близки друг другу [43], поэтому можно использовать любую из этих моделей. Там же отмечено, что минимальное число узлов разностной сетки по нормали к обтекаемой поверхности в турбулентном потоке должно быть равно 60. В настоящей работе оно бралось равным 60 и 80.

Величина Γ изменялась от 0 до 1 в зависимости от значения параметра $A = \text{Re}_{\delta^{**}} / \exp(0,2M_e)$, где $\text{Re}_{\delta^{**}}$ — число Рейнольдса по толщине потери импульса и M_e —

местное число Маха на внешней границе пограничного слоя [38]. В указанной работе параметры начала A_1 и конца A_2 перехода выбраны из сравнения с экспериментами для треугольного крыла равными 150 и 350 соответственно. Именно эти значения параметров перехода использовались в настоящих расчетах. Описанный алгоритм расчета турбулентного пограничного слоя опробован на телах оживально-цилиндрической формы под углами атаки в работах [42, 43], где проведено сравнение с результатами четырех экспериментальных работ [44–47]. Показано удовлетворительное совпадение результатов расчета с экспериментальными данными по профилям скорости и местным числам Маха, а также распределениям коэффициентов трения и чисел Стантона.

Исследование пограничного слоя на модели ELAC 1 было начато с сопоставления с экспериментами, выполненными для этой модели. В [48] приведены измеренные распределения чисел Стантона

$$St = q|_{\eta=0} / \rho_{\infty} U_{\infty} c_p (T_0 - T_w),$$

полученные в ударной трубе при $M_{\infty} = 7$, углах атаки от 0 до 15° и числе Рейнольдса по длине модели $Re_x = 1,1 \cdot 10^6$. Там же представлены результаты расчетов по описанному алгоритму в сечениях $x/X = 0,3; 0,45; 0,6$. Показано, что расхождение не превышает 16 % и пограничный слой на всей поверхности ламинарный.

Другая серия экспериментов на модели ELAC 1 выполнена в сверхзвуковой аэродинамической трубе Аэродинамического института в г. Ахене (ФРГ) при $M_{\infty} = 1,5 \div 2,5$, $\alpha = 0 \div 9^{\circ}$ [49]. Особенность этой экспериментальной установки заключается в том, что у нее отсутствует форкамера высокого давления, воздух засасывается из атмосферы, а выхлоп происходит в вакуумную емкость, поэтому следует ожидать, что уровень возмущений в ее рабочей части ниже, чем в обычных аэродинамических трубах. В расчетах для сравнения с этими экспериментами параметры ламинарно-турбулентного перехода A_1 и A_2 были выбраны равными 250 и 550 соответственно. Кроме того, температура торможения потока была близка к температуре поверхности модели, а следовательно, знаменатель в выражении для числа Стантона близок к нулю, поэтому в указанной работе вычислялся параметр

$$St^+ = q|_{\eta=0} / \rho_{\infty} U_{\infty} c_p (T_w - T_{\infty}).$$

На рис. 2 приведено сопоставление рассчитанных значений St^+ (сплошные линии) с экспериментальными (значки) при $M_{\infty} = 2,5$, $Re_x = 7,1 \cdot 10^6$ и различных углах атаки в сечении $x/X = 0,3$. Здесь турбулентная область располагается на наветренной стороне до значений $y/b = 0,5 \div 0,7$, а далее до передней кромки течение ламинарное. С ростом угла атаки увеличение значений St^+ в турбулентной области по сравнению с ламинарной становится все более заметным. Сопоставление показало удовлетворительное совпадение теоретических и экспериментальных результатов: расхождение не превышает 16 %.

4. Далее исследование пограничного слоя было выполнено для энтальпийного фактора $H_w/H_{\infty} = 0,565$ и $Re_x = 3 \cdot 10^6$. На рис. 3 распределение модуля коэффициента трения c_f в зависимости от y/b в ряде поперечных сечений представлено при $\alpha = 5^{\circ}$ и $M_{\infty} = 7$. На графике видно, что течение в начальном сечении $x/X = 0,2$ всюду ламинарное, затем в окрестности плоскости симметрии оно переходит в турбулентное, область турбулентности распространяется к передним кромкам, достигая в последнем сечении значения $y/b = 0,3$. К ней примыкает узкая зона ламинарно-турбулентного перехода, далее до передних кромок течение везде ламинарное.

Снижение числа Маха до 4 привело к тому, что в сечении $x/X = 0,2$ уже имеется заметная область турбулентного течения в окрестности плоскости симметрии. По мере продвижения вдоль оси модели зона турбулентности расширяется и в последнем сечении 45

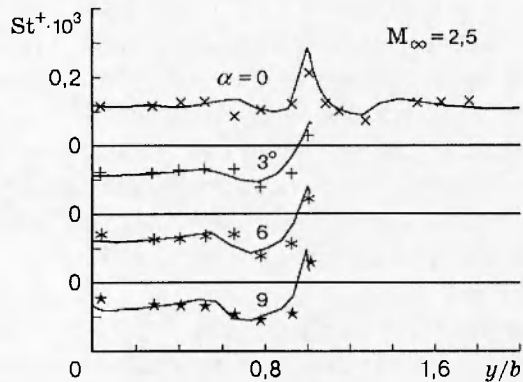


Рис. 2

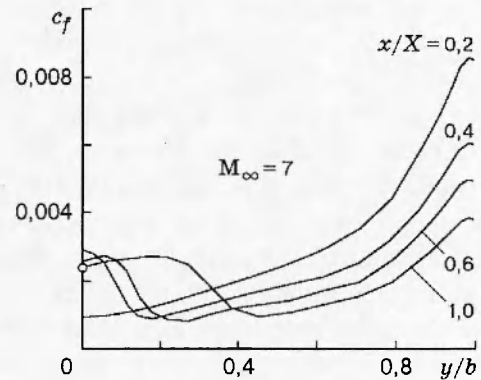


Рис. 3

приближается к значению $y/b = 0,8$. В окрестности передних кромок течение на всей модели остается ламинарным.

При $M_\infty = 2,5$ уже в сечении $x/X = 0,2$ область турбулентности занимает почти половину поверхности ЕЛАС1, затем распространяется практически на всю поверхность, и в последнем сечении пограничный слой остается ламинарным только на самой кромке.

Модель ЕЛАС1 представляет собой профилированное треугольное крыло со скругленными кромками, что позволяет сопоставить параметры его пограничного слоя с расчетами, выполненными для треугольного крыла с острыми передними кромками. Однако следует учитывать, что картины их обтекания существенно различаются, особенно вблизи передних кромок. Для модели ЕЛАС1 ударная волна всегда отсоединена от них, а для крыла с острыми кромками она является присоединенной до некоторого угла атаки. Но по мере удаления струек тока от кромок их влияние будет ослабевать, и можно ожидать, что в окрестности плоскости симметрии параметры пограничных слоев в обоих случаях будут близки друг другу.

Для данного сравнения с помощью алгоритма, представленного в [37, 38], выполнены расчеты пограничного слоя на плоском треугольном крыле с острыми кромками при $M_\infty = 7$, $\alpha = 5, 10, 15^\circ$ и тех же значениях остальных определяющих параметров, что и для модели ЕЛАС1. Поскольку местный угол атаки в плоскости симметрии для ЕЛАС1 отличается от угла атаки плоского крыла на $2,58^\circ$, была выполнена интерполяция последних результатов на тот же местный угол атаки. Сопоставление полученных значений чисел Стантона и коэффициентов трения при трех углах атаки для $y/b = 0$ показало, что расхождение не превышает 3%. На рис. 3 результаты интерполяции для треугольной пластины представлены кружком. Такое совпадение результатов расчетов, полученных с помощью двух различных алгоритмов и программ, является еще одним подтверждением их достоверности.

В [39, 40] измерение чисел Стантона производилось вдоль продольных сечений, параллельных плоскости симметрии, на расстоянии y_1/b_1 от нее (b_1 — полуразмах модели). На рис. 4 представлены рассчитанные значения c_f в зависимости от x'/X при $M_\infty = 4$, $\alpha = 5^\circ$ в сечениях $y_1/b_1 = 0,2; 0,4; 0,6$ (здесь и далее координата x' отсчитывается от передней кромки). Поскольку изучаемое тело близко к плоской пластине, давление на его нижней поверхности изменяется слабо, кроме окрестности передних кромок (см. рис. 1). Поэтому и пограничный слой вдоль продольных сечений развивается подобным образом, небольшое различие наблюдается лишь в переходной области, однако оно практически полностью исчезает в зоне развитого турбулентного течения. Из этого следует, что за-

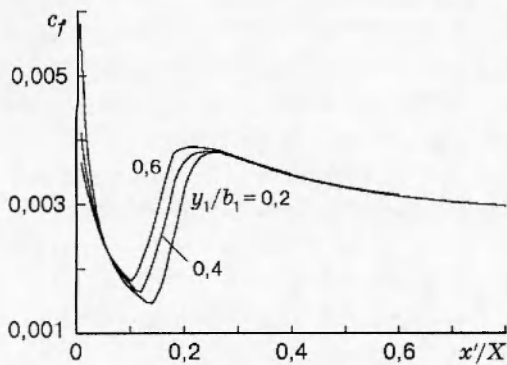


Рис. 4

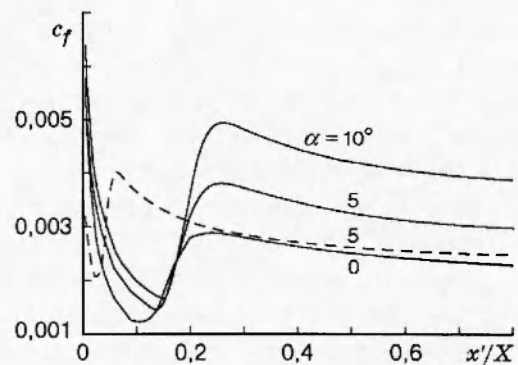


Рис. 5

кономерности, установленные для одного такого сечения, могут быть распространены на всю наветренную поверхность модели.

Влияние угла атаки на течение в пограничном слое прослеживается на рис. 5, где сплошными линиями представлена зависимость c_f от координаты x'/X при $M_\infty = 4$, $Re_x = 3 \cdot 10^6$ и трех значениях α в сечении $y_1/b_1 = 0,2$. С ростом угла атаки зона перехода удаляется от передней кромки, а значения параметра c_f в турбулентной области существенно возрастают. Подобная закономерность наблюдалась и в экспериментах [39, 40]. Результаты расчетов при $M_\infty = 4$, $\alpha = 5^\circ$, $Re_x = 1 \cdot 10^7$ представлены штриховой линией. Как и следовало ожидать, зона ламинарно-турбулентного перехода при этом существенно сдвигается к передней кромке. Значение же коэффициента c_f в развитой турбулентной области снижается примерно на 20%, что не является неожиданным, поскольку зависимость от числа Рейнольдса при $Re \sim 10^7$ довольно слабая.

На рис. 6 сплошными линиями представлены распределения c_f при $\alpha = 5^\circ$, $Re_x = 3 \cdot 10^6$ и различных значениях M_∞ в сечении $y_1/b_1 = 0,2$. Видно, что с увеличением числа Маха почти в три раза координата начала перехода возрастает на порядок. Кроме того, различие значений c_f в два раза в ламинарной области уменьшается примерно до 20% в зоне развитого турбулентного течения. Подобная зависимость от числа Маха была отмечена при измерении чисел Стантона [39, 40].

В каждом расчете турбулентного пограничного слоя остается открытым вопрос о положении зоны перехода и его влиянии на результаты расчета в турбулентной области,

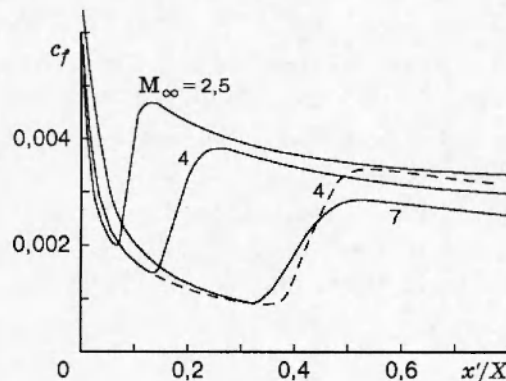


Рис. 6

поэтому вариант при $M_\infty = 4$ был повторен, но параметры перехода A_1 и A_2 взяты равными соответственно 250 и 550, как и при сравнении с экспериментами Аэродинамического института [49]. Полученные значения c_f представлены на рис. 6 штриховой линией. Как и следовало ожидать, начало перехода существенно сдвигается вниз по потоку и значения c_f в этой зоне заметно отличаются. Однако в области развитого турбулентного течения это различие составляет примерно 5%. Таким образом, погрешность в задании зоны перехода слабо влияет на параметры пограничного слоя в развитой турбулентной области.

5. В работе показано, что трехмерные уравнения пограничного слоя имеют ряд преимуществ перед полными и параболизированными уравнениями Навье — Стокса. Только с их помощью можно строго рассчитать силы трения и аэродинамический нагрев на поверхности пространственных тел, не используя суперкомпьютеры.

Алгоритм расчета трехмерного пограничного слоя, включающий предложенный критерий ламинарно-турбулентного перехода, вначале был основательно протестирован сравнением рассчитанных результатов с экспериментами. Дальнейшее исследование, выполненное для модели гиперзвукового самолета с помощью созданной программы, позволило получить данные о влиянии числа Маха и угла атаки на параметры потока. Представлено явление распространения зоны ламинарно-турбулентного перехода от плоскости симметрии к передним кромкам при продвижении вниз по потоку, причем тем быстрее, чем меньше число Маха. Увеличение угла атаки приводит к росту коэффициента трения и числа Стантона, при этом координаты зоны перехода практически не изменяются. Уменьшение числа Маха также вызывает увеличение указанных параметров в области развитого турбулентного течения, но менее значительное. Однако зона перехода в этом случае существенно сдвигается вверх по потоку.

Авторы выражают благодарность профессору Э. Краузе за внимание и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Laurien E., Bohle M., Holthoff H., et al. Numerical simulation of reentry flows near the continuum limit // Proc. 2nd Intern. Conf. on Fluid Mech. Beijing, 1993.
2. Radespiel R., Swanson R. C. Progress with multigrid schemes for hypersonic flow problems // ICASE. Report 91-89. 1991.
3. Herrman U., Radespiel R., Longo J. M. A. Critical flow phenomena on the winglet of winged reentry vehicles // Z. Flugwiss. Weltraumforsch. 1995. V. 19. P. 309-319.
4. Eggers T., Radespiel R., Waibel M., Hummel D. Flow phenomena of hypersonic waveriders and validation of design methods. N. Y., 1993 (Paper/AIAA, N 93-5045).
5. Schröder W., Hartmann G. Detailed numerical analysis of hypersonic flows over a two-stage spacecraft // Comp. Fluid Dynamics J. 1993. V. 1, N 4. P. 375-404.
6. Schröder W., Hartmann G. Analysis of inviscid and viscous hypersonic flows past a two-stage spacecraft // J. Spacecraft and Rockets. 1993. V. 30, N 1. P. 8-13.
7. Schmatz M. A. Hypersonic three-dimensional Navier-Stokes calculations for equilibrium gas. N. Y., 1989 (Paper/AIAA, N 89-2183).
8. Schmatz M. A. Three-dimensional viscous flow simulations using an implicit relaxation scheme // Numerical Simulation of the Transonic DFVLR-F5 Wing Experiment / Ed. by W. Kordulla. Notes on Numerical Fluid Mech. 1988. V. 22. P. 226-242.
9. Harris T. B. An efficient method for supersonic viscous flow field calculations. N. Y., 1982 (Paper/AIAA, N 83-0222).
10. Lin A., Rubin S. G. Three-dimensional supersonic viscous flow over a cone at incidence // AIAA J. 1982. V. 20, N 11. P. 1500-1507.

11. Markatos N. C. G., Spalding D. B., Tatchell D. G., Vlachos N. Solution method for three-dimensional turbulent boundary layers on bodies of arbitrary shapes // *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engn.* 1978. V. 15, N 2. P. 161–174.
12. Vigneron Y. C., Rakich J. V., Tannehill J. C. Calculation of supersonic viscous flow over delta wings with sharp subsonic leading edges. N. Y., 1978 (Paper/AIAA, N 78-1137).
13. Sturek W. B., Schiff L. B. Numerical simulation of steady supersonic flow over spinning bodies of revolution // *AIAA J.* 1982. V. 20, N 12. P. 1724–1731.
14. Schröder W., Hartman G. Implicit solutions of three-dimensional viscous hypersonic flows // *Computers and Fluids.* 1992. V. 21, N 1. P. 109–132.
15. Hänel D., Henze A., Krause E. Supersonic and hypersonic flow computations for the research configuration ELAC 1 and comparison to experimental data // *Z. Flugwiss. Weltraumforsch.* 1993. V. 17, N 2. P. 90–98.
16. Брыкина И. Г., Гершбейн Э. А. Гиперзвуковой вязкий ударный слой на стреловидных крыльях бесконечного размаха, обтекаемых под углом атаки // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1979. № 2. С. 91–102.
17. Вершинин И. В., Тирский Г. А., Утюжников С. В. Сверхзвуковое ламинарное обтекание наветренной части скользящих крыльев бесконечного размаха в широком диапазоне чисел Рейнольдса // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1991. № 4. С. 40–44.
18. Prandtl L. Über die Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung // *Verhandlung III. Intern. Math. Kongress, Heilderberg, 1904.* P. 484–491.
19. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
20. Башкин В. А. Расчетные соотношения и программы для численного интегрирования уравнений пространственного ламинарного пограничного слоя на конических телах // *Тр. ЦАГИ.* 1968. Вып. 1106. С. 97–160.
21. Башкин В. А. Ламинарный пограничный слой в сжимаемом газе при коническом внешнем течении // *Тр. ЦАГИ.* 1968. Вып. 1093. С. 1–78.
22. Башкин В. А. Исследование теплообмена на острых эллиптических конусах в сверхзвуковом потоке при больших углах атаки // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1969. № 1. С. 84–88.
23. Башкин В. А. Результаты численного анализа первого класса автомодельных пространственных течений // *Тр. ЦАГИ.* 1973. Вып. 1448. С. 17–35.
24. Башкин В. А. Треугольные крылья в гиперзвуковом потоке. М.: Машиностроение, 1984.
25. Ветлущкий В. Н., Ганимедов В. Л. К численному решению задачи о пограничном слое на эллиптическом конусе // *Числ. методы механики сплошной среды.* 1977. Т. 8, № 5. С. 36–47.
26. Vetlutsky V. N., Ganimedov V. L. The investigation of a compressible laminar boundary layer past an elliptical cone // *Computers and Fluids.* 1982. V. 10, N 3. P. 173–179.
27. Смыгина Г. В., Юшин А. Я. Экспериментальное исследование в ударной трубе при $M = 13,6$ теплоотдачи к моделям треугольных крыльев, составленных из двух эллиптических полуконусов с разными значениями коэффициента эллиптичности // *Тр. ЦАГИ.* 1968. Вып. 1106. С. 44–67.
28. Ветлущкий В. Н. Расчет сжимаемого ламинарного пограничного слоя на заостренном теле биеллиптического сечения // *ПМТФ.* 1991. № 1. С. 55–61.
29. Щекин Г. А. Численный расчет трехмерного пограничного слоя в ламинарной и турбулентной областях течения на крыле при сверхзвуковых скоростях полета // *Экспериментальные и теоретические исследования аэродинамических элементов летательного аппарата и его частей.* М.: Изд-во Моск. авиац. ин-та, 1983. С. 52–56.

30. Дудин Г. Н. Взаимодействие гиперзвукового потока с пограничным слоем на тонком треугольном крыле // Тр. ЦАГИ. 1978. Вып. 1912. С. 3–10.
31. Дудин Г. Н. К расчету пограничного слоя на треугольной пластине на режиме сильного вязкого взаимодействия // Учен. зап. ЦАГИ. 1978. Т. 9, № 5. С. 65–70.
32. Дудин Г. Н., Лыжин Д. О. Об одном методе расчета режима сильного вязкого взаимодействия на треугольном крыле // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1983. № 4. С. 119–124.
33. Ветлуцкий В. Н., Поплавская Т. В. К расчету ламинарного пограничного слоя на плоской треугольной пластине со сверхзвуковыми передними кромками // Числ. методы механики сплошной среды. 1982. Т. 13, № 1. С. 31–43.
34. Ветлуцкий В. Н., Поплавская Т. В. Сжимаемый ламинарный пограничный слой на плоской треугольной пластине с присоединенной ударной волной // ПМТФ. 1985. № 5. С. 23–29.
35. Ветлуцкий В. Н., Поплавская Т. В. К расчету ламинарного сжимаемого пограничного слоя на треугольном профилированном крыле со сверхзвуковыми передними кромками // Моделирование в механике. 1989. Т. 3(20), № 6. С. 11–29.
36. Ветлуцкий В. Н., Поплавская Т. В. Численный расчет трехмерного ламинарного сжимаемого пограничного слоя на профилированных треугольных крыльях со сверхзвуковыми передними кромками // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 5. С. 88–94.
37. Ветлуцкий В. Н., Поплавская Т. В. Расчет трехмерного турбулентного пограничного слоя на треугольных крыльях // Моделирование в механике. 1992. Т. 6(23), № 1. С. 23–36.
38. Ветлуцкий В. Н., Поплавская Т. В. Расчетное исследование пространственного сжимаемого турбулентного пограничного слоя на наветренной стороне треугольных крыльев при сверхзвуковом обтекании // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 1. С. 68–74.
39. Ковалева Н. А., Колина Н. П., Косых А. П., Юшин А. Я. Результаты экспериментального и численного исследований аэродинамического нагрева нижней поверхности треугольных крыльев с острыми передними кромками при числах $M_\infty = 6,1$ и 8 // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1991. № 4. С. 183–188.
40. Ковалева Н. А., Колина Н. П., Юшин А. Я. Экспериментальное исследование теплообмена и ламинарно-турбулентного перехода на моделях треугольного полукрыла с затупленной передней кромкой в сверхзвуковом потоке // Учен. зап. ЦАГИ. 1993. Т. 24, № 3. С. 46–52.
41. Ветлуцкая Л. М., Ветлуцкий В. Н. К расчету пространственного сжимаемого ламинарного пограничного слоя на заостренном теле // Числ. методы механики сплошной среды. 1986. Т. 17, № 5. С. 25–42.
42. Vetlutsky V. N., Krause E. Berechnung dreidimensionaler kompressibler Grenzschichten an spitzen Körpern // Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Inst. der RWTH, Aachen. 1990. H. 30. S. 60–63.
43. Vetlutsky V. N., Krause E. Calculation of three-dimensional, compressible boundary layers on pointed bodies and comparison with experiments // Z. Flugwiss. Weltraumforsch. 1992. V. 16. P. 308–316.
44. Васенев Л. Г., Ветлуцкий В. Н., Клеменков Г. П., Харитонов А. М. Исследование пространственного ламинарного и турбулентного пограничного слоя // IV Всесоюз. шк. по методам аэрофиз. исслед., Новосибирск, 22–28 июня 1986 г.
45. Horstmen C. C., Owen F. K. Turbulent properties of a compressible boundary layer // AIAA J. 1972. V. 10, N 11. P. 1418–1424.
46. Dolling D. S., Gray W. K. Experimental study of supersonic turbulent flow on a blunted axisymmetric body // AIAA J. 1986. V. 24, N 5. P. 793–799.

47. **Kayser L. D., Sturek W. B.** Experimental measurements in the turbulent boundary layer on a yawed, spinning ogive-cylinder body of revolution at Mach 3.0. Pt II: Data tabulation // ARRADCOM Memo. Report. ARBRL-MR-02813, 1978.
48. **Olivier H., Schulte-Rödding J.-H., Grönig H., Vetlutsky V. N.** Measurements with the ELAC 1-configuration at Mach 7 // Z. Flugwiss. Weltraumforsch. 1996. V. 20. P. 53–60.
49. **Henze A., Houtman E. M., Jacobs M., Vetlutsky V. N.** Comparison between experimental and numerical heat flux data for supersonic flow around ELAC 1 // Z. Flugwiss. Weltraumforsch. 1996. V. 20. P. 61–70.
50. **Roe P. L.** Approximate riemann solvers, parameter vectors and difference schemes // J. Comp. Physics. 1981. V. 43. P. 357–372.
51. **Houtman E. M., Bannink W. J.** Experimental and numerical investigation of the vortex flow over a delta wing at transonic speed // Vortex Flow Aerodynamics, AGARD CP-494. 1991. P. 5–11.
52. **Vetlutsky V. N.** Laminar boundary layer on a flat plate with rotating cylinder // Computers and Fluids. 1981. V. 9, N 4. P. 427–434.

*Поступила в редакцию 9/IV 1997 г.,
в окончательном варианте — 26/V 1997 г.*
