

УДК 536.2(075)46

Метод получения аналитических решений краевых задач на основе определения дополнительных граничных условий и дополнительных искомым функций*

И.В. Кудинов, Е.В. Котова, В.А. Кудинов

Самарский государственный технический университет, ул. Молодогвардейская, 244, Самара, 443100
E-mails: totig@yandex.ru (И.В. Кудинов, Е.В. Котова, В.А. Кудинов)

Кудинов И.В., Котова Е.В., Кудинов В.А. Метод получения аналитических решений краевых задач на основе определения дополнительных граничных условий и дополнительных искомым функций // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2019. — Т. 22, № 2. — С. 153–165.

Используя дополнительные граничные условия и дополнительные искомые функции в интегральном методе теплового баланса, рассмотрен метод получения аналитических решений задач теплопроводности, связанный с разделением процесса теплопроводности на две стадии по времени, что позволяет свести решение уравнения в частных производных к интегрированию двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно некоторых дополнительных искомым функций. Для первой стадии отмечается быстрая сходимость аналитического решения к точному, а для второй получено точное аналитическое решение. Дополнительные граничные условия находятся в таком виде, чтобы их выполнение искомым решением было эквивалентно выполнению исходного уравнения в граничных точках и на фронте температурного возмущения. Показано, что выполнение уравнения в граничных точках приводит к его выполнению и внутри области.

DOI: 10.15372/SJNM20190203

Ключевые слова: нестационарная теплопроводность, аналитическое решение, интегральный метод теплового баланса, дополнительные граничные условия, дополнительные искомые функции, фронт температурного возмущения, координатные функции, бесконечная скорость распространения теплоты.

Kudinov I.V., Kotova E.V., Kudinov V.A. A method of obtaining analytical solutions to boundary value problems based on defining additional boundary conditions and additional desired functions // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2019. — Vol. 22, № 2. — P. 153–165.

Using additional boundary conditions and additional unknown functions in the integral method of heat balance, we consider the method of obtaining analytical solutions to the thermal conductivity problem associated with the separation process of thermal conductivity of two phases with respect to time, which allows reducing the solution of partial differential equations to the integration of two ordinary differential equations for some additional desired functions. The first stage is characterized by a rapid convergence of the analytical solution to an exact one. For the second stage, the exact analytical solution has been obtained. Additional boundary conditions for both phases are in such a form that their execution by a desired solution be equivalent to realization of the original equation at boundary points and at a front of the temperature perturbations. It is shown that the implementation of the equations at the boundary points leads to its execution also inside the domain.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания ФГБОУ ВО «СамГТУ» (проект № 1.5551.2017/8.9).

Keywords: *transient thermal conductivity, analytical solution, integral method of heat balance, additional boundary conditions, additional desired function, front of temperature perturbations, coordinate functions, infinite velocity of propagation of heat.*

1. Введение

Известно, что классические точные аналитические методы применимы лишь для линейных краевых задач, а получаемые с их помощью решения характеризуются плохой сходимостью в области малых значений временной переменной. С целью преодоления указанных трудностей в теории теплопроводности используются методы, в которых вводится понятие фронта температурного возмущения. При их использовании процесс теплопроводности разделяется на две стадии по времени, первая из которых характеризуется постепенным продвижением фронта температурного возмущения от поверхности к центру, а вторая — изменением температуры по всему объёму тела [1–4].

Применительно ко второй стадии процесса рассматривается метод, позволяющий получать точные аналитические решения во всем диапазоне времени нестационарного процесса. В его основе лежит использование дополнительной искомой функции, представляющей изменение во времени температуры в центре пластины, которая, ввиду бесконечной скорости распространения теплоты, начинает изменяться сразу после приложения граничного условия на её поверхности.

Получение решений для обеих стадий связано с использованием дополнительных граничных условий, которые находятся в таком виде, чтобы их выполнение искомым решением было эквивалентно выполнению уравнения в граничных точках и на фронте температурного возмущения. Отметим, что методы решения краевых задач посредством выполнения дифференциального уравнения в граничных точках были использованы в работах [5–7]. И, в частности, в работе [6] приводится математическое доказательство выполнения уравнения внутри области в случае его выполнения на границах. Отличие метода, изложенного в настоящей работе, состоит в рассмотрении двухстадийной модели теплопроводности, из которых в первой стадии используется модель, основанная на конечной скорости распространения теплоты, а во второй — на бесконечной.

2. Математическая постановка задачи

Основную идею метода рассмотрим на примере решения задачи теплопроводности для бесконечной пластины при симметричных граничных условиях первого рода

$$\partial\Theta(\xi, Fo)/\partial Fo = \partial^2\Theta(\xi, Fo)/\partial\xi^2 \quad (Fo > 0, 0 < \xi < 1), \quad (1)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0, \quad (2)$$

$$\Theta(0, Fo) = 1, \quad (3)$$

$$\partial\Theta(1, Fo)/\partial\xi = 0, \quad (4)$$

где $\Theta = (T - T_0)/(T_{ст} - T_0)$ — относительная избыточная температура; $Fo = at/\delta^2$ — число Фурье; $\xi = x/\delta$ — безразмерная координата; x — координата; δ — половина толщины пластины; a — коэффициент температуропроводности; t — время; T_0 — начальная температура; $T_{ст}$ — температура стенки.

Отметим, что при задании симметричных граничных условий температурное поле также будет симметричным. В связи с чем обычно рассматривается половина толщины

пластины при задании в её центре условия отсутствия теплообмена, каковым и является граничное условие (4).

Введём движущуюся во времени границу (фронт температурного возмущения $q_1(\text{Fo})$), разделяющую исходную область $0 < \xi < 1$ на две подобласти: $0 < \xi < q_1(\text{Fo})$ и $q_1(\text{Fo}) < \xi < 1$, а процесс теплообмена — на две стадии по времени: $0 < \text{Fo} \leq \text{Fo}_1$ и $\text{Fo}_1 \leq \text{Fo} < \infty$, где $q_1(\text{Fo})$ — функция, определяющая продвижение границы раздела по координате ξ во времени; Fo_1 — время достижения движущейся границей центра пластины (рисунок 1). Во второй стадии изменение температуры происходит по всему объёму тела $0 < \xi < 1$, и в рассмотрение вводится дополнительная искомая функция $q_2(\text{Fo}) = \Theta(1, \text{Fo})$, определяющая изменение температуры во времени в центре пластины.

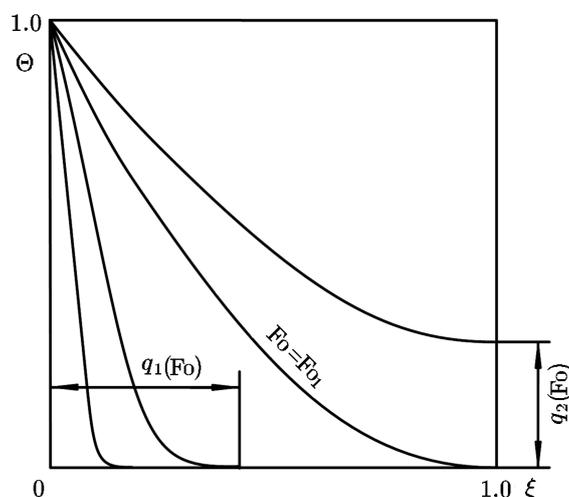


Рис. 1. Расчётная схема теплообмена

3. Первая стадия процесса теплопроводности

Математическая постановка задачи для первой стадии имеет вид

$$\partial\eta(\xi, \text{Fo})/\partial\text{Fo} = \partial^2\eta(\xi, \text{Fo})/\partial\xi^2 \quad (0 < \text{Fo} \leq \text{Fo}_1, \quad 0 < \xi < q_1(\text{Fo})), \quad (5)$$

$$\eta(0, \text{Fo}) = 1, \quad (6)$$

$$\eta(q_1, \text{Fo}) = 0, \quad (7)$$

$$\partial\eta(q_1, \text{Fo})/\partial\xi = 0, \quad (8)$$

где соотношения (7), (8) представляют условия сопряжения прогретой и непрогретой зон; $\eta = T/T_{\text{ст}}$.

Отметим, что задача (5)–(8) не содержит начального условия вида (2), задаваемого по всей толщине пластины, так как за пределами фронта температурного возмущения данная задача вообще не определена. Отметим также, что соотношения (7), (8), задаваемые на фронте температурного возмущения $q_1(\text{Fo})$, представляют условия сопряжения прогретой и непрогретой зон. Согласно соотношению (7) температура на фронте равна начальной температуре, а из (8) следует, что величина теплового потока непосредственно на фронте равна нулю, несмотря на его движение по координате ξ во времени. То есть

фронт температурного возмущения $q_1(\text{Fo})$ — это движущаяся по координате ξ во времени граница прогретого слоя. Временной закон этого движения определяется в процессе решения задачи (5)–(8), принимая $q_1(\text{Fo})$ в качестве дополнительной искомой функции.

Решение задачи (5)–(8) разыскивается в виде

$$\eta_n(\xi, \text{Fo}) = 1 + \sum_{k=1}^n a_{kn}(q_{1n}) \varphi_k(\xi), \quad (9)$$

где $a_{kn}(q_{1n})$ ($k = \overline{1, n}$) — неизвестные коэффициенты; $\varphi_k(\xi) = \xi^{2k-1}$ — координатные функции.

Найдём последовательность получения решения задачи (5)–(8) в общем виде (для любого числа приближений n), а затем рассмотрим применение метода для одного конкретного приближения. Потребуем, чтобы соотношение (9) удовлетворяло не уравнению (5), а некоторому осреднённому в пределах толщины прогретого слоя уравнению вида (интегралу теплового баланса)

$$\int_0^{q_{1n}(\text{Fo})} \frac{\partial \eta_n(\xi, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} d\xi = \int_0^{q_{1n}(\text{Fo})} \frac{\partial^2 \eta_n(\xi, \text{Fo})}{\partial \xi^2} d\xi. \quad (10)$$

Соотношение (9) в любом приближении удовлетворяет граничному условию (6). Для определения неизвестных коэффициентов $a_{kn}(q_1)$ будем использовать основные (7), (8) и дополнительные граничные условия, физический смысл которых состоит в том, что их выполнение решением (9) в граничных точках $\xi = 0$ и $\xi = 1$ (для первой стадии процесса в точке $\xi = q_{1n}(\text{Fo})$) равносильно выполнению в этих точках уравнения (5). Общая формула для них будет (см. [1])

$$\partial^i \eta_n(0, \text{Fo}) / \partial \xi^i = 0 \quad (i = 2, 4, 6, \dots). \quad (11)$$

Благодаря нечётным степеням переменной ξ соотношение (9) в любом приближении удовлетворяет условиям (11).

С целью получения наиболее точного решения при минимальном числе приближений дополнительные граничные условия следует задавать и на подвижной границе $\xi = q_{1n}(\text{Fo})$. Формула для них будет

$$\partial^i \eta(q_{1n}, \text{Fo}) / \partial \xi^i = 0 \quad (i = 2, 3, 4, \dots). \quad (12)$$

Подставляя (9) в основные и дополнительные граничные условия, относительно неизвестных коэффициентов $a_{kn}(q_{1n})$ будем иметь цепочную систему n алгебраических линейных уравнений. После определения $a_{kn}(q_{1n})$ из решения этой системы соотношение (9) принимает вид

$$\eta_n(\xi, \text{Fo}) = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k A_{kn} (\xi/q_{1n})^{2k-1}, \quad (13)$$

где A_{kn} — коэффициенты, имеющие конкретные числовые значения в зависимости от числа используемых приближений n получаемого решения.

Подставляя (13) в интеграл теплового баланса (10), относительно неизвестной функции $q_{1n}(\text{Fo})$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$q_{1n}(\text{Fo}) dq_{1n}(\text{Fo}) = 2nd\text{Fo}. \quad (14)$$

Интегрируя уравнение (14), при начальном условии $q_{1n}(0) = 0$ находим

$$q_{1n}(\text{Fo}) = \sqrt{4n\text{Fo}}. \quad (15)$$

Время окончания первой стадии процесса Fo_{1n} , наблюдающееся при $q_{1n}(Fo) = 1$, в любом приближении находится по формуле $Fo_{1n} = 1/(4n)$. Отсюда следует, что с увеличением числа приближений скорость перемещения фронта температурного возмущения $dq_{1n}/dFo = 2n/q_{1n}$ возрастает, а время (Fo_{1n}) достижения фронтом температурного возмущения координаты $\xi = 1$ уменьшается. И в пределе при $n \rightarrow \infty$ $Fo_{1n} \rightarrow 0$, следовательно, решение (9) задачи (5)–(8) при $n \rightarrow \infty$ подтверждает описываемую параболическим уравнением (5) бесконечную скорость распространения теплоты. Принятие допущения о её конечности, лежащее в основе интегрального метода теплового баланса, связано с необходимостью разделения процесса на две стадии по времени с целью упрощения получения решения для каждой из них. Отметим, что с увеличением числа приближений интегрального метода точность получаемых решений возрастает ввиду возрастания точности выполнения всех соотношений задачи (5)–(8). Таким образом, для получения решения в любом приближении достаточно найти лишь неизвестные коэффициенты A_{kn} , определяемые из основных и дополнительных граничных условий. Вид дифференциального уравнения относительно $q_{1n}(Fo)$, его решение, а также время окончания первой стадии Fo_1 находятся по общим формулам (14), (15).

Например, коэффициенты A_{kn} в третьем, четвертом и пятом приближениях соответственно имеют вид: $A_{1,3} = 15/8$; $A_{2,3} = 5/4$; $A_{3,3} = 3/8$ (третье приближение); $A_{1,4} = A_{2,4} = 35/16$; $A_{3,4} = 21/16$; $A_{4,4} = 5/16$ (четвёртое приближение); $A_{1,5} = 315/128$; $A_{2,5} = 105/32$; $A_{3,5} = 189/64$; $A_{4,5} = 45/32$; $A_{5,5} = 35/128$ (пятое приближение); времена окончания первой стадии процесса для этих же приближений будут: $Fo_{1,3} = 0.08333$; $Fo_{1,4} = 0.0625$; $Fo_{1,5} = 0.05$.

Результаты расчётов по формуле (9) в сравнении с точным решением [8] даны на рис. 2, 3. На рис. 4 приведены значения температур для сверхмалых значений числа Фурье ($10^{-8} \leq Fo \leq 10^{-12}$).

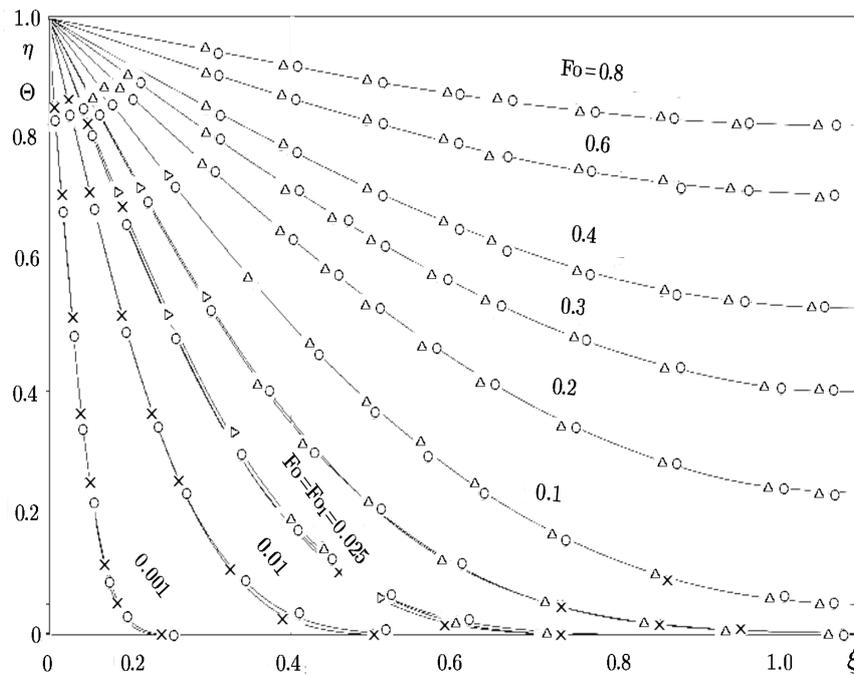


Рис. 2. Распределение температуры в пластине: \times — 10-е приближение первой стадии (по формуле (9) при $n = 10$); \triangle — 4-е приближение второй стадии (по формуле (34) при $n = 4$); \circ — точное решение [8] и по формуле (34) при $n = 100$

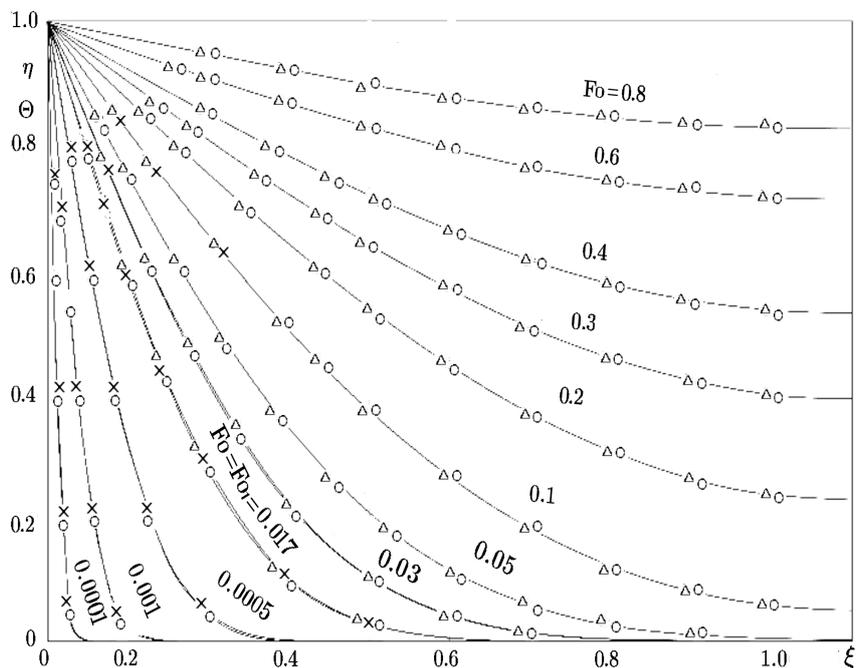


Рис. 3. Распределение температуры в пластине: \times — 15-е приближение первой стадии (по формуле (9)); Δ — 6-е приближение второй стадии (по формуле (34) при $n = 6$); o — точное решение [8] и по формуле (34) при $n = 1000$

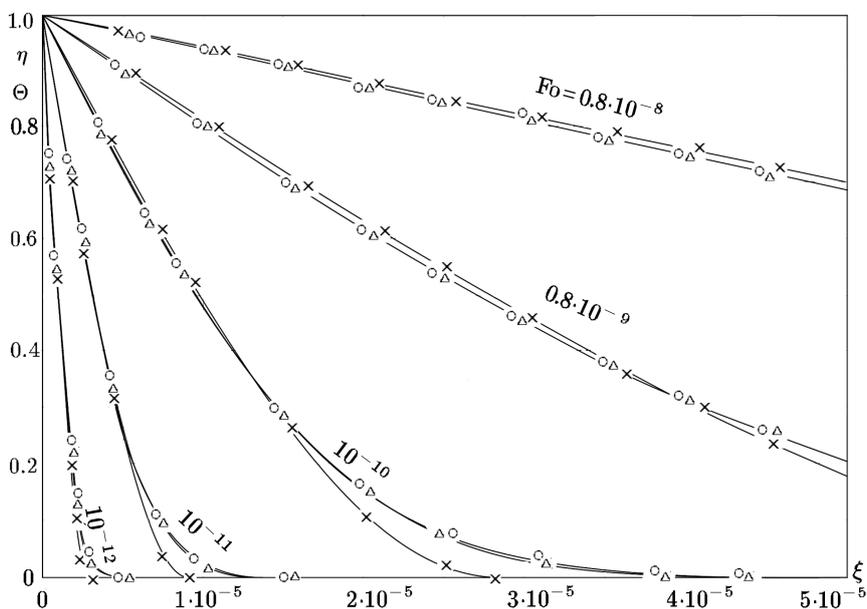


Рис. 4. Распределение температуры в пластине: \times — второе приближение первой стадии; Δ — двадцатое приближение первой стадии; o — точное решение [8] и по формуле (34) при $n = 1000000$

Анализ полученных результатов позволяет заключить, что расхождение с точным решением в двадцатом приближении составляет менее 1%, а в тридцатом наблюдается их практически полное совпадение. Следует отметить трудности получения точного

решения по формулам из [8] для столь малых чисел Фурье, ввиду необходимости использования большого числа членов ряда. В частности, расчёты показали, что при $Fo = 10^{-12}$ для сходимости точного решения необходимо использовать около $5 \cdot 10^5$ членов ряда.

Сходимость получаемого решения к точному при $n \rightarrow \infty$ покажем на примере доказательства следующей теоремы.

Теорема 1. *Если функция, представляющая бесконечный ряд по нечётным степеням пространственной переменной, удовлетворяет уравнению (5) в граничных точках, то при бесконечно большом числе членов ряда она будет удовлетворять уравнению и внутри рассматриваемой области.*

Доказательство. Для доказательства потребуем, чтобы при $\xi = 0$ выполнялось уравнение (5) и k -е производные от него по переменной ξ были равны нулю

$$\frac{\partial^k}{\partial \xi^k} \left(\frac{\partial \eta(\xi, Fo)}{\partial Fo} \right)_{\xi=0} = \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} \left(\frac{\partial^2 \eta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} \right)_{\xi=0} \quad (k = \overline{0, n}). \quad (16)$$

Отметим, что при $k = 0$ соотношение (16) приводится к уравнению (5). При $k = (1, 2, 3, \dots, n)$ соотношение (16) представляет уравнение (5), от правой и левой части которого взяты производные k -го порядка. Таким образом, соотношение (16) представляет систему n дифференциальных уравнений в частных производных. Подставляя (9) в (16), при $\xi = 0$ находим

$$\frac{\partial a_1}{\partial Fo} = 6a_2; \quad \frac{\partial a_2}{\partial Fo} = 20a_3; \quad \frac{\partial a_3}{\partial Fo} = 42a_4; \quad \frac{\partial a_4}{\partial Fo} = 72a_5; \quad \dots \quad (17)$$

Умножая соотношения (17) на ξ^{2k-1} ($k = \overline{1, n}$) и суммируя полученные выражения, будем иметь

$$\frac{da_1}{dFo} \xi + \frac{da_2}{dFo} \xi^3 + \frac{da_3}{dFo} \xi^5 + \frac{da_4}{dFo} \xi^7 + \dots = 6a_2 \xi + 20a_3 \xi^3 + 42a_4 \xi^5 + 72a_5 \xi^7 + \dots \quad (18)$$

Можно заметить, что соотношение (18) представляет уравнение (5) после подстановки в него ряда (9). Таким образом, удовлетворяя искомым решением уравнению (5) в граничной точке $\xi = 0$, получаем, что при $k = \overline{1, n}$ и $n \rightarrow \infty$ уравнение (5) удовлетворяется всюду в рассматриваемой области. Отметим, что при чётных степенях k уравнение (5) удовлетворяется в предельном смысле, т. е. через равенство нулю его правой и левой части. \square

В работе [6] дано доказательство выполнения уравнения внутри рассматриваемой области при его выполнении на границе для решения, составленного из чётных и нечётных степеней размерной пространственной переменной, применительно к полупространству.

4. Вторая стадия процесса теплопроводности

Во второй стадии процесса теплопроводности, соответствующей времени $Fo_1 \leq Fo < \infty$, температура изменяется по всей толщине пластины, и понятие фронта температурного возмущения теряет смысл. В качестве дополнительной искомой функции принимается функция, характеризующая изменение температуры во времени в центре пластины. Ввиду бесконечной скорости распространения теплоты, описываемой решением параболического уравнения теплопроводности и подтверждаемой решением, полученным в

первой стадии процесса, температура в центре пластины начинает изменяться сразу же после приложения граничного условия первого рода в точке $\xi = 0$. В связи с чем во второй стадии вполне физически обосновано можно принять $Fo_1 = 0$. Математическая постановка задачи в данном случае будет совпадать с задачей (1)–(4).

Введём дополнительную искомую функцию

$$\Theta(1, Fo) = q_2(Fo), \quad (19)$$

характеризующую изменение во времени температуры в центре пластины, т. е. при $\xi = 1$. Так как температура в центре пластины является искомой величиной задачи (1)–(4), то использование этой функции никоим образом не изменяет данную задачу и является лишь вспомогательным средством для упрощения процесса получения её решения.

Точное решение задачи (1)–(4) разыскивается в виде

$$\Theta_n(\xi, Fo) = 1 + \sum_{k=1}^n b_{kn}(q_{2n}) \Psi_k(\xi), \quad (20)$$

где $b_{kn}(q_{2n})$ ($k = \overline{1, n}$) — неизвестные коэффициенты; $\Psi_k(\xi) = \sin(r\pi\xi/2)$ — координатные функции ($r = 2k - 1$).

Очевидно, что соотношение (20), благодаря принятой системе координатных функций при любом n , удовлетворяет граничным условиям (3), (4). Коэффициенты $b_{kn}(q_{2n})$ ($k = \overline{1, n}$) определяются из вспомогательного условия (19) и некоторых дополнительных граничных условий, которые будем находить так, чтобы в граничных точках $\xi = 0$ и $\xi = 1$ выполнялось дифференциальное уравнение (1). Дополнительные граничные условия в точке $\xi = 0$, как и для первой стадии процесса, находятся по общей формуле (11), т. е. $\partial^i \Theta(0, Fo) / \partial \xi^i = 0$ ($i = 2, 4, 6, \dots$). Отметим, что все они, благодаря принятой системе координатных функций соотношением (20), выполняются точно в любом приближении.

Общие формулы для дополнительных граничных условий применительно к точке $\xi = 1$ имеют вид [1]

$$\partial^i \Theta(1, Fo) / \partial \xi^i = 0 \quad (i = 3, 5, 7, \dots), \quad (21)$$

$$\partial^{2i} \Theta(1, Fo) / \partial \xi^{2i} = d^i q_2(Fo) / dFo^i \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (22)$$

Отметим, что условия (21) соотношением (20) выполняются в любом приближении. Неизвестные коэффициенты $b_{kn}(q_{2n})$ ($k = \overline{1, n}$) будем находить из условия (19) и дополнительных граничных условий, получаемых по общей формуле (22).

Как и для первой стадии процесса, рассмотрим сначала общую последовательность получения решения, а затем приведём обобщение метода для определённого конкретного приближения.

Потребуем, чтобы соотношение (20) удовлетворяло не уравнению (1), а некоторому осреднённому в пределах толщины пластины уравнению вида (интегралу теплового баланса)

$$\int_0^1 \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = \int_0^1 \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} d\xi. \quad (23)$$

Подставляя (20) в (23), относительно неизвестной функции $q_{2n}(Fo)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка, константы интегрирования которого

находятся из начального условия (2) путём составления его невязки и требования её ортогональности ко всем координатным функциям $\varphi_j(\xi) = \sin(j\pi\xi/2)$ ($j = r = 2k - 1$). Ввиду ортогональности функции синус неизвестные в системе алгебраических уравнений относительно констант интегрирования разделяются (каждое уравнение содержит одно неизвестное). В итоге удаётся получить общую формулу для определения констант интегрирования в любом приближении.

В качестве конкретного примера рассмотрим получение решения задачи (1)–(4) во втором приближении, подставляя (20) (ограничиваясь двумя членами ряда) в (19) и (22) (при $i = 1$). Относительно неизвестных коэффициентов $b_{1,2}(q_2)$ и $b_{2,2}(q_2)$ получим систему двух алгебраических линейных уравнений. Соотношение (20) с учётом найденных из её решения коэффициентов принимает вид

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = 1 + \frac{1}{8\pi^2} \left[- (4q'_{2,2} + 9\pi^2(q_{2,2} - 1)) \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) + (4q'_{2,2} + \pi^2(q_{2,2} - 1)) \sin\left(\frac{3\pi\xi}{2}\right) \right], \quad (24)$$

где $q'_{2,2} = dq_{2,2}/d\text{Fo}$.

Подставляя (24) в (23), находим

$$\frac{4}{3\pi^3} q''_{2,2} + \frac{10}{3\pi} q'_{2,2} + \frac{3\pi}{4} q_{2,2} - \frac{3\pi}{4} = 0, \quad (25)$$

где $q''_{2,2} = d^2q_{2,2}$.

Интегрируя уравнение (25), получаем

$$q_{2,2}(\text{Fo}) = C_{1,2} \exp(-\pi^2\text{Fo}/4) + C_{2,2} \exp(-9\pi^2\text{Fo}/4) + 1, \quad (26)$$

где $C_{1,2}, C_{2,2}$ – постоянные интегрирования.

Подставляя (26) в (24), находим

$$\Theta_2(\xi, \text{Fo}) = 1 + C_{1,2} \exp\left(-\frac{\pi^2}{4}\text{Fo}\right) \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) + C_{2,2} \exp\left(-\frac{9\pi^2}{4}\text{Fo}\right) \sin\left(\frac{3\pi\xi}{2}\right). \quad (27)$$

Для определения постоянных $C_{1,2}$ и $C_{2,2}$ составляется невязка начального условия (2) и требуется ортогональность невязки к координатным функциям $\sin(j\pi\xi/2)$ ($j = 1, 3$):

$$\int_0^1 \left(C_{1,2} \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) - C_{2,2} \sin\left(\frac{3\pi\xi}{2}\right) \right) \sin\left(\frac{j\pi\xi}{2}\right) d\xi = - \int_0^1 \sin\left(\frac{j\pi\xi}{2}\right) d\xi \quad (j = 1, 3). \quad (28)$$

Соотношение (28) относительно $C_{1,2}$ и $C_{2,2}$ представляет систему двух алгебраических уравнений. Ввиду ортогональности тригонометрических функций неизвестные в системе разделяются так, что каждое уравнение содержит лишь одно неизвестное. Общий вид этих уравнений

$$C_{k,2} \int_0^1 \sin^2\left(\frac{r\pi}{2}\xi\right) d\xi = \int_0^1 \sin\left(\frac{r\pi}{2}\xi\right) d\xi \quad (k = 1, 2; r = 2k - 1). \quad (29)$$

Определяя интегралы в (29), находим

$$C_{k,2} = 4(-1)^k / (r\pi) \quad (k = 1, 2; \quad r = 2k - 1). \quad (30)$$

Формула (27), с учётом найденных значений постоянных интегрирования, принимает вид

$$\Theta_2(\xi, \text{Fo}) = 1 - \sum_{k=1}^2 \frac{4}{r\pi} \exp\left(-\frac{r^2\pi^2}{4}\text{Fo}\right) \sin\left(\frac{r\pi}{2}\xi\right) \quad (r = 2k - 1; \quad n = 2). \quad (31)$$

В третьем приближении для определения неизвестных коэффициентов $b_{k3}(q_{2,3})$ ($k = 1, 2, 3$) используется соотношение (19) и два дополнительных граничных условия, получаемые по общей формуле (22) (при $i = 1, 2$). Обыкновенное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $q_{2,3}(\text{Fo})$, найденное из интеграла теплового баланса (23), имеет вид

$$\frac{4}{15\pi^5} q_{2,3}''' + \frac{7}{3\pi^3} q_{2,3}'' + \frac{259}{60\pi} q_{2,3}' + \frac{15}{16} \pi q_{2,3} - \frac{15}{16} \pi = 0, \quad (32)$$

где $q_{2,3}''' = d^3 q_{2,3} / d\text{Fo}^3$.

Интегрируя уравнение (32), находим

$$q_2(\text{Fo}) = C_{1,3} \exp\left(-\frac{\pi^2}{4}\text{Fo}\right) + C_{2,3} \exp\left(-\frac{9\pi^2}{4}\text{Fo}\right) + C_{3,3} \exp\left(-\frac{25\pi^2}{4}\text{Fo}\right) + 1. \quad (33)$$

Подставляя (33) в (20), с учётом найденных из начального условия (2) коэффициентов $C_{k,3}$ ($k = 1, 2, 3$), получаем

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{4}{r\pi} \exp(-\nu_k \text{Fo}) \sin\left(\frac{r\pi\xi}{2}\right), \quad (34)$$

где $\nu_k = r^2\pi^2/4$ ($r = 2k - 1; \quad k = \overline{1, n}$); $n = 3$. Результаты расчётов во втором (по формуле (31)) и в третьем (по формуле (34)) приближениях в сравнении с точным решением [8] приведены на рис. 2. Их анализ позволяет заключить, что в диапазоне чисел $0.02 \leq \text{Fo} < \infty$ расхождение с точным решением во втором приближении (по сравнению с первым) уменьшилось до 2%, а решение в третьем приближении практически совпадает с точным. Анализируя решение (34), можно заметить, что формула для коэффициентов перед экспонентой совпадает с формулой для аналогичных коэффициентов (получаемых из выполнения начального условия) классического точного аналитического решения, а формула для чисел ν_k — с формулой для собственных чисел этого решения [8]. Следовательно, соотношение (34) при $n \rightarrow \infty$ является точным аналитическим решением задачи (1)–(4).

5. Теоретическое обоснование возможности получения точного аналитического решения

На основе полученных выше результатов рассмотрим доказательство теоремы о возможности получения точных аналитических решений задач нестационарной теплопроводности интегральным методом теплового баланса (относящимся к приближённым аналитическим методам), если использовать особой конструкции системы ортогональных координатных функций, заранее точно удовлетворяющих граничным условиям краевой задачи и некоторые дополнительные граничные условия.

Теорема 2. Если в интегральном методе теплового баланса использовать системы ортогональных координатных функций, в любом приближении точно удовлетворяющих граничным условиям краевой задачи (1)–(4), то можно получить её точное аналитическое решение в форме бесконечного ряда.

Доказательство. Для доказательства теоремы соотношение (20) представим в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(Fo) \Psi_k(\xi), \quad (35)$$

где $f_k(Fo) = b_k(q_2(Fo))$ ($k = \overline{1, n}$) — неизвестные коэффициенты; $\Psi_k(\xi) = \sin(r\pi\xi/2)$ ($r = 2k - 1$) — координатные функции, в любом приближении точно удовлетворяющие граничным условиям (3), (4).

Составляя невязку уравнения (1) и требуя её ортогональности ко всем координатным функциям $\Psi_k(\xi)$ ($k = \overline{1, \infty}$), находим

$$\int_0^1 \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial f_k}{\partial Fo} \sin\left(\frac{r\pi}{2}\xi\right) + \left(\frac{r^2\pi^2}{4}\right) \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin\left(\frac{r\pi}{2}\xi\right) \right] \sin\left(\frac{j\pi}{2}\xi\right) d\xi = 0 \quad (36)$$

$(j = r = 2k - 1).$

Соотношение (36) с учётом ортогональности синусов приводится к виду

$$\frac{df_k}{dFo} + \frac{r^2\pi^2}{4} f_k = 0. \quad (37)$$

Интегрируя уравнение (37) и подставляя найденное решение в (35), получаем

$$\Theta(\xi, Fo) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{-\nu_k Fo} \sin\left(\frac{r\pi\xi}{2}\right), \quad (38)$$

где $\nu_k = r^2\pi^2/4$ ($r = 2k - 1$); B_k — константы интегрирования, определяемые из начального условия (2). Для этого составляется его невязка и требуется её ортогональность ко всем координатным функциям $\Psi_k(\xi)$ ($k = \overline{1, \infty}$)

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\left(\frac{r\pi\xi}{2}\right) - 1 \right) \sin\left(\frac{j\pi\xi}{2}\right) d\xi = 0 \quad (j = r = 2k - 1). \quad (39)$$

Соотношение (39) относительно B_k представляет бесконечную систему алгебраических линейных уравнений. Ввиду ортогональности синусов, неизвестные в системе разделяются, и она приводится к одному уравнению

$$\int_0^1 \left(B_k \sin^2\left(\frac{r\pi\xi}{2}\right) - \sin\left(\frac{r\pi\xi}{2}\right) \right) d\xi = 0, \quad (40)$$

из решения которого получаем $B_k = 4/(r\pi)$ ($k = \overline{1, \infty}$).

С учётом найденных значений B_k и ν_k соотношение (38) приводится к соотношению (34) (при $n \rightarrow \infty$), представляющему точное аналитическое решение задачи (1)–(4), что и требовалось доказать. Отметим, что соотношение (34) удовлетворяет дополнительным граничным условиям (11), (21), (22). \square

Рассмотренный выше метод наиболее эффективен применительно к краевым задачам, решение которых затруднительно получить классическими аналитическими методами (нелинейные, с переменными физическими свойствами среды, с переменными во времени граничными условиями и др.). Применительно к их решению разделение теплового процесса на две стадии по времени позволяет значительно упростить получение их высокоточных приближённых аналитических решений.

Результаты расчётов по формуле (34) приведены на рис. 2–4. При этом для чисел Фурье от $Fo = 0.001$ до $Fo = 10^{-12}$ было использовано от $n = 100$ до $n = 1000000$ членов ряда (34). В связи с чем для малых значений времени рекомендуется использование решений, полученных для первой стадии процесса.

6. Заключение

1. На основе определения дополнительной искомой функции (фронта температурного возмущения) и дополнительных граничных условий исходная краевая задача для уравнения в частных производных сводится к интегрированию двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно дополнительных искомого функций $q_1(Fo)$ и $q_2(Fo)$. Доказательством соответствующей теоремы показано, что выполнение исходного уравнения (в частных производных) в граничных точках краевой задачи приводит к его выполнению и внутри области.
2. Рассмотрение во второй стадии процесса функции $q_2(Fo) = \Theta(1, Fo)$ основано на свойстве параболического уравнения теплопроводности, связанном с бесконечной скоростью распространения теплоты, согласно которому температура в центре пластины начинает изменяться сразу после приложения граничного условия первого рода на её поверхности. Использование этой функции в интегральном методе теплового баланса позволяет получить решение, полностью совпадающее с классическим точным аналитическим решением (теоретическое обоснование метода представлено доказательством соответствующей теоремы).

Литература

1. **Кудинов В.А., Кудинов И.В.** Аналитические решения параболических и гиперболических уравнений теплопереноса. — М.: Инфра-М, 2013.
2. **Лыков А.В.** Методы решения нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности // Энергетика и транспорт. — 1970. — № 5. — С. 109–150.
3. **Гудмен Т.** Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена // Проблемы теплообмена. Сб. научных трудов. — М.: Атомиздат, 1967. — С. 41–96.
4. **Кудинов В.А., Кудинов И.В., Скворцова М.П.** Обобщенные функции и дополнительные граничные условия в задачах теплопроводности для многослойных тел // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2015. — Т. 55, № 4. — С. 129–140; Перевод: Kudinov V.A., Kudinov I.V., Skvortsova M.P. Generalized functions and additional boundary conditions in heat conduction problems for multilayered bodies // Comput. Maths. Math. Phys. — 2015. — Vol. 55, iss. 4. — P. 666–676.
5. **Канторович Л.В.** Об одном методе приближённого решения дифференциальных уравнений в частных производных // ДАН СССР. — 1934. — Т. 2, № 9. — С. 532–534.
6. **Фёдоров Ф.М.** Граничный метод решения прикладных задач математической физики. — Новосибирск: Наука, 2000.

7. **Кудряшов Л.И., Меньших Н.Л.** Приближённые решения нелинейных задач теплопроводности. — М.: Машиностроение, 1979.
8. **Лыков А.В.** Теория теплопроводности. — М.: Высшая школа, 1967.

Поступила в редакцию 16 февраля 2016 г.

После доработки 17 апреля 2018 г.

Принята к публикации 21 января 2019 г.

Литература в транслитерации

1. **Kudinov V.A., Kudinov I.V.** Analiticheskie resheniya parabolicheskikh i giperbolicheskikh uravneniy teplomassoperenosa. — М.: Infra-M, 2013.
2. **Lykov A.V.** Metody resheniya nelineynykh uravneniy nestatsionarnoy teploprovodnosti // Energetika i transport. — 1970. — № 5. — S. 109–150.
3. **Gudmen T.** Primenenie integral'nykh metodov v nelineynykh zadachah nestatsionarnogo teploobmena // Problemy teploobmena. Sb. nauchnykh trudov. — М.: Atomizdat, 1967. — S. 41–96.
4. **Kudinov V.A., Kudinov I.V., Skvortsova M.P.** Obobshchennye funktsii i dopolnitel'nye granichnye usloviya v zadachah teploprovodnosti dlya mnogoslownykh tel // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2015. — Т. 55, № 4. — S. 129–140.
5. **Kantorovich L.V.** Ob odnom metode priblizhennogo resheniya differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh // DAN SSSR. — 1934. — Т. 2, № 9. — S. 532–534.
6. **Fedorov F.M.** Granichnyy metod resheniya prikladnykh zadach matematicheskoy fiziki. — Novosibirsk: Nauka, 2000.
7. **Kudryashov L.I., Men'shih N.L.** Priblizhennyye resheniya nelineynykh zadach teploprovodnosti. — М.: Mashinostroenie, 1979.
8. **Lykov A.V.** Teoriya teploprovodnosti. — М.: Vysshaya shkola, 1967.

