

УДК 539.370

АНАЛИЗ ПЛОСКИХ ФАЗОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИН

Л. И. Шкутин

Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск

E-mail: shkutin@icm.krasn.ru

Задача о плоской деформации стержня и пластины в интервале прямого фазового превращения сформулирована как нелинейная краевая задача термоупругости с неявной зависимостью от температуры (через фазовый параметр, имитирующий объемную долю кристаллов новой фазы). Дано аналитическое решение задачи о сворачивании стержня в кольцо, а пластины в трубу за счет фазовых деформаций при слабом воздействии торцевым изгибающим моментом. В результате численного анализа задачи о выпучивании стержня (пластины) из никелида титана (сплава) при продольном сжатии в интервале прямого фазового превращения обнаружено, что выпучивание становится возможным при сжимающей силе, намного меньшей эйлерова порога, вычисленного до начала превращения. В зависимости от фазового параметра построены ветви выпученных форм равновесия для значений силы, меньших эйлерова. Во всех случаях в окрестностях критических точек наблюдается стремительный рост прогибов. Показана эволюция форм выпучивания и представлены распределения фазовых деформаций по длине стержня (пластины).

Ключевые слова: сплавы с памятью формы, стержни, пластины, фазовые деформации, выпучивание, численный анализ.

Металлические сплавы, испытывающие фазовые превращения при термоциклировании, применяются в основном для изготовления термочувствительных конструкционных элементов. В тонкостенных элементах в таких сплавах наиболее ярко проявляется эффект памяти формы. Уникальные механические свойства сплава с памятью формы обусловлены его термоупругими фазовыми превращениями. Охлаждение нагруженного образца в интервале фазового превращения приводит к фазовой деформации, девиатор которой при фиксированной температуре пропорционален девиатору внутреннего напряжения. При последующем нагревании образца в интервале обратного превращения ранее приобретенная фазовая деформация частично или полностью исчезает (эффект памяти формы). К настоящему времени достигнуты определенные успехи в построении математических уравнений, моделирующих эффекты фазовых превращений и памяти формы. В данной работе используются микромеханические определяющие соотношения, предложенные и обоснованные в [1, 2]. В работе [3] эти уравнения используются при решении некоторых нелинейных задач изгиба стержней в интервале прямого превращения, в том числе при решении задачи продольно-поперечного изгиба. В [3] установлено, что в температурном интервале мартенситного превращения происходит интенсивное выпучивание стержня при сжимающей силе, меньшей эйлерова порога, если к торцу приложена также очень малая поперечная сила. Ниже возможность выпучивания сжатого стержня и пластины устанавливается чис-

ленным анализом ветвления решений соответствующей нелинейной краевой задачи. Кроме того, дано аналитическое решение задачи сворачивания стержня в кольцо, а пластины в трубу за счет фазовых деформаций. Решения рассмотренных задач получены в рамках кинематической модели стержня с независимыми поворотами поперечных сечений [4].

Уравнения плоской деформации стержня и пластины. Пусть x_J ($J = 1, 2, 3$) — декартова система координат, относительно которой происходит движение материальных точек деформируемого стержня, \mathbf{i}_J — ортонормированный базис этой системы. Локальная система координат t_J с ортонормированным базисом $\mathbf{e}_J^0(t_3)$ связывается с базовой линией стержня так, что t_3 — внутренний параметр линии, t_1 и t_2 — поперечные координаты.

Рассмотрим стержень с плоской базовой линией, которую в недеформированном состоянии зададим параметрическими уравнениями

$$\mathbf{x} = x_2 \mathbf{i}_2 + x_3 \mathbf{i}_3, \quad x_2 = x_2(t_3), \quad x_3 = x_3(t_3) \quad \forall t_3 \in [0, l] \quad (1)$$

($\mathbf{x}(t_3)$ — позиционный вектор произвольной точки; l — длина линии). Согласно (1) базовая линия располагается в координатной плоскости с базисом $(\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$.

Ортонормированные базисы \mathbf{i}_J и $\mathbf{e}_J^0(t_3)$ могут быть связаны друг с другом ортогональным преобразованием $\mathbf{e}_J^0 = \mathbf{i}_J \cdot \mathbf{O}^0$ с тензором-ротатором $\mathbf{O}^0(t_3)$, компоненты которого в обоих базисах задаются ортогональной матрицей

$$O_{JK}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_0 & \sin \theta_0 \\ 0 & -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

($\theta_0(t_3)$ — угол поворота базиса $\mathbf{e}_J^0(t_3)$ относительно вектора \mathbf{i}_1).

По определению справедливы зависимости $dx_2/dt_3 = -\sin \theta_0$, $dx_3/dt_3 = \cos \theta_0$, а вектор $\mathbf{y} = \mathbf{x} + t_i \mathbf{e}_i^0$ ($i = 1, 2$) задает координаты произвольной точки стержня.

Рассмотрим плоскую деформацию стержня, т. е. такую деформацию, в процессе которой базовая линия остается плоской и представляется в деформированном состоянии позиционным вектором

$$\mathbf{a} = a_2 \mathbf{i}_2 + a_3 \mathbf{i}_3, \quad a_2 = a_2(t_3), \quad a_3 = a_3(t_3) \quad \forall t_3 \in [0, l] \quad (3)$$

(a_2, a_3 — искомые декартовы координаты точки t_3).

Ортогональным преобразованием

$$\mathbf{e}_J = \mathbf{i}_J \cdot \mathbf{O} = \mathbf{e}_J^0 \cdot \bar{\mathbf{O}}^0 \cdot \mathbf{O} \quad (4)$$

с тензором-ротатором $\mathbf{O}(t_3)$ введем локальный ортонормированный базис $\mathbf{e}_J(t_3)$, вращающийся в процессе деформации ($\bar{\mathbf{O}}^0$ — тензор, сопряженный с \mathbf{O}^0). Компоненты ротатора \mathbf{O} в базисах \mathbf{i}_J и \mathbf{e}_J определяются матрицей вида (2):

$$O_{JK} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Здесь $\theta = \theta_0 + \vartheta$ — угол поворота базиса \mathbf{e}_J относительно \mathbf{i}_1 ; $\vartheta(t_3)$ — приращение угла поворота вследствие деформации. В начальном состоянии $\vartheta \equiv 0$ и базис \mathbf{e}_J совпадает с \mathbf{e}_J^0 . Локальный поворот, представленный матрицей (5), имеет только одну степень свободы — угол поворота θ или $\vartheta = \theta - \theta_0$.

Положение произвольной точки стержня в процессе деформации определяется вектором [4]

$$\mathbf{g} = \mathbf{a} + t_i \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2). \quad (6)$$

Эта основная кинематическая аппроксимация задает движение каждого поперечного сечения как твердого тела с двумя трансляционными ($a_2(t_3)$, $a_3(t_3)$) и одной ротационной ($\theta(t_3)$) степенями свободы. Функции (6) соответствует линейная зависимость объемного поля перемещений от поперечных координат

$$\mathbf{w} \equiv \mathbf{g} - \mathbf{y} = \mathbf{u} + t_i(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_i^0), \quad \mathbf{u} \equiv \mathbf{a} - \mathbf{x}. \quad (7)$$

Объемные векторы деформаций $\mathbf{w}_J = \mathbf{g}_{,J} - \mathbf{y}_{,J} \cdot \mathbf{O}$ (см. [4]) вычисляются с помощью (6):

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{u}_3 + t_2 \mathbf{v}_3, \quad \mathbf{w}_i = \mathbf{0}. \quad (8)$$

Здесь введены контурные векторы метрических и изгибных деформаций

$$\mathbf{u}_3 \equiv \mathbf{a}_{,3} - \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{v}_3 \equiv \mathbf{e}_{2,3} - \mathbf{e}_{2,3}^0 \cdot \mathbf{O}. \quad (9)$$

Для формулировки скалярных кинематических уравнений используются согласованные с (4) и (5) разложения

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{i}_2 \cos \theta + \mathbf{i}_3 \sin \theta, \quad \mathbf{e}_3 = -\mathbf{i}_2 \sin \theta + \mathbf{i}_3 \cos \theta. \quad (10)$$

Формулу (9), определяющую вектор метрических деформаций, будем понимать как уравнение относительно неизвестного позиционного вектора \mathbf{a} . Представив в (9) \mathbf{u}_3 в виде $\mathbf{u}_3 = u_{32}\mathbf{e}_2 + u_{33}\mathbf{e}_3$, с помощью (3) и (10) получим скалярные уравнения

$$a_{2,3} = u_{32} \cos \theta - (1 + u_{33}) \sin \theta, \quad a_{3,3} = u_{32} \sin \theta + (1 + u_{33}) \cos \theta. \quad (11)$$

В соответствии с (9) и (10) устанавливаем также, что вектор изгибной деформации \mathbf{v}_3 имеет только одну компоненту:

$$v_{33} = \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = \theta_{,3} - \theta_{0,3}, \quad v_{32} = \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{e}_2 = 0. \quad (12)$$

Обусловленная деформацией напряженность стержня измеряется вектором напряжения $\mathbf{s}_3 = S_{32}\mathbf{e}_2 + S_{33}\mathbf{e}_3$, действующим в поперечном сечении стержня на единицу начальной площади. Здесь S_{32} — поперечное касательное напряжение; S_{33} — нормальное напряжение растяжения-сжатия.

Результирующие векторы напряжения вводятся равенствами

$$\mathbf{t}_3 = \int_A \mathbf{s}_3 J dA, \quad \mathbf{m}_3 = \int_A \mathbf{s}_3 J t_2 dA. \quad (13)$$

Для гладких силовых полей $\mathbf{t}_3(t_3)$ и $\mathbf{m}_3(t_3)$ имеют место выполняющиеся на базовой линии динамические уравнения [4]

$$\mathbf{t}_{3,3} + \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{m}_3)_{,3} + \mathbf{a}_{,3} \times \mathbf{t}_3 + \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (14)$$

где $\mathbf{p}(t_3)$, $\mathbf{q}(t_3)$ — векторы внешних сил и моментов, распределенных по длине стержня.

В уравнениях (14) \mathbf{t}_3 , \mathbf{m}_3 , $\mathbf{a}_{,3}$ представим в виде

$$\mathbf{t}_3 = T_{32} \mathbf{e}_2 + T_{33} \mathbf{e}_3 = T_2 \mathbf{i}_2 + T_3 \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{m}_3 = M_{32} \mathbf{e}_2 + M_{33} \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{a}_{,3} = u_{32} \mathbf{e}_2 + (1 + u_{33}) \mathbf{e}_3$$

и получим динамические уравнения в скалярной форме

$$\begin{aligned} T_{2,3} + P_2 = 0, \quad T_{3,3} + P_3 = 0, \quad M_{33,3} + u_{32} T_{33} - (1 + u_{33}) T_{32} + Q_1 = 0, \\ T_{32} = T_2 \cos \theta + T_3 \sin \theta, \quad T_{33} = -T_2 \sin \theta + T_3 \cos \theta. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь T_{32} , T_{33} , M_{32} , M_{33} — компоненты внутренних сил и моментов в повернутой системе координат; T_2 , T_3 — декартовы компоненты вектора сил; P_2 , P_3 , Q_1 — декартовы компоненты внешних сил и моментов.

Уравнения (11), (12), (15) образуют систему нелинейных кинематических и динамических уравнений деформированного стержня.

Определяющие соотношения. Для того чтобы установить связь между деформациями и напряжениями в интервале прямого фазового превращения, используем систему микромеханических определяющих соотношений [1]

$$\begin{aligned} w_{32} &= \varphi_{32} + S_{32}/G, & w_{33} &= \varphi_{33} + S_{33}/E, \\ d\varphi_{32} &= (\varkappa_0\varphi_{32} + S_{32}/\sigma_0) dq, & d\varphi_{33} &= (\varkappa_0\varphi_{33} + (2/3)S_{33}/\sigma_0) dq, \\ q &= \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{T_+ - T}{T_+ - T_-}\right), & T_- &\leq T \leq T_+, \quad 0 \leq q \leq 1. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь E , G — модули упругого растяжения-сжатия и сдвига; \varkappa_0 , σ_0 — экспериментальные константы сплава в интервале прямого превращения; $\varphi_{32}(t_3)$, $\varphi_{33}(t_3)$ — фазовые деформации; q — внутренний параметр состояния, определяемый как объемная доля мартенситной фазы; T_+ , T_- — температуры начала и завершения прямого превращения; T — текущая температура. В приведенных соотношениях не учитываются термическая деформация сплава и объемный эффект фазового превращения, так что φ_{32} и φ_{33} являются, по существу, компонентами девиатора фазовых деформаций. Дополнительно полагаем, что фазовое превращение представляет собой изотермический процесс с равномерным распределением температуры по объему образца, поэтому параметр q не зависит от координат.

Из (16) следует, что фазовые деформации определяются дифференциальными (по параметру q) уравнениями. Первые слагаемые их правых частей ответственны за развитие кристаллов мартенсита, вторые — за зарождение и ориентацию кристаллов в направлении действующих напряжений. Присутствующие в (16) модули упругости сплава не остаются постоянными в интервале фазового превращения, а изменяются от их значений в аустените до значений в мартенсите. Учитывая смысл параметра q , эти модули можно представить в интервале фазового превращения в виде осредненных по Фойгту зависимостей [2]

$$E = qE_- + (1 - q)E_+, \quad G = qG_- + (1 - q)G_+,$$

где нижний индекс “−” соответствует мартенситной фазе, “+” — аустенитной фазе.

Полагая, что напряжения зависят от параметра q значительно слабее, чем фазовые деформации, найдем приближенное решение дифференциальных уравнений (16):

$$\varphi_{32} \simeq \frac{S_{32}}{\sigma_0\varkappa_0} (\exp(\varkappa_0 q) - 1), \quad \varphi_{33} \simeq \frac{2}{3} \frac{S_{33}}{\sigma_0\varkappa_0} (\exp(\varkappa_0 q) - 1). \quad (17)$$

Это решение удовлетворяет физическим условиям: фазовые деформации отсутствуют в аустените (при $q = 0$) и достигают максимальных значений в мартенсите (при $q = 1$).

Подставляя функции (17) в первое и второе уравнения системы (16), получим приближенные определяющие соотношения

$$\begin{aligned} w_{32} &\simeq \gamma_2 S_{32}/E_0, & w_{33} &\simeq \gamma_3 S_{33}/E_0, \\ \gamma_2(q) &\equiv \frac{E_0}{G} + \frac{E_0}{\sigma_0\varkappa_0} (\exp(\varkappa_0 q) - 1), & \gamma_3(q) &\equiv \frac{E_0}{E} + \frac{2}{3} \frac{E_0}{\sigma_0\varkappa_0} (\exp(\varkappa_0 q) - 1). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь E_0 — константа с размерностью напряжения, которую удобно отождествить с одной из констант E_- , E_+ .

Уравнения (18) представляют фазовое превращение как термоупругую деформацию с неявной зависимостью от температуры (через параметр q).

В соответствии с (8) и (12) имеем $w_{32} = u_{32}$, $w_{33} = u_{33} + t_2 v_{33} = u_{33} + t_2(\theta - \theta_0)_{,3}$. Подставляя эти значения в (18) и интегрируя по поперечному сечению стержня, с учетом (13) получаем результирующие определяющие соотношения

$$u_{32} \simeq \gamma_2 T_{32}/(AE_0), \quad u_{33} \simeq \gamma_3 T_{33}/(AE_0), \quad \theta_{,3} - \theta_{0,3} \simeq \gamma_3 M_{33}/(IE_0), \quad (19)$$

где A — площадь поперечного сечения; I — его момент инерции относительно вектора e_1^0 .

Уравнения (11), (12), (15) и (19) образуют замкнутую систему шести дифференциальных уравнений первого порядка, решение которой зависит от параметра q . При численном интегрировании системы ее решения отыскиваются для дискретных значений параметра q из интервала $0 \leq q \leq 1$. Последнее равенство в (16) устанавливает связь параметра q с температурой сплава.

Сформулированная система моделирует также плоскую деформацию пластин и панелей, испытывающих термоупругие фазовые превращения.

Безразмерная формулировка системы уравнений. Введем независимый аргумент $t = t_3/l$, геометрический параметр $\varepsilon^2 = I/(Al^2)$, параметры внешних сил $p_2 = P_2 l^3/(IE_0)$, $p_3 = P_3 l^3/(IE_0)$, $q_1 = Q_1 l^2/(IE_0)$ и неизвестные функции

$$y_0 = \theta, \quad y_1 = M_{33}l/(IE_0), \quad y_2 = a_2/l, \quad y_3 = a_3/l, \quad y_4 = T_2 l^2/(IE_0), \quad y_5 = T_3 l^2/(IE_0).$$

Тогда система уравнений (11), (12), (15), (19) может быть представлена в безразмерном виде

$$\begin{aligned} y'_0 &= \gamma_3 y_1 + \theta'_0, & y'_1 &= f_2 + (\gamma_3 - \gamma_2)\varepsilon^2 f_2 f_3, & y'_2 &= -\sin y_0 + \varepsilon^2(\gamma_2 f_2 \cos y_0 - \gamma_3 f_3 \sin y_0), \\ y'_3 &= \cos y_0 + \varepsilon^2(\gamma_2 f_2 \sin y_0 + \gamma_3 f_3 \cos y_0), & y'_4 &= -p_2, & y'_5 &= -p_3, \\ f_2 &\equiv y_4 \cos y_0 + y_5 \sin y_0, & f_3 &\equiv -y_4 \sin y_0 + y_5 \cos y_0. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь γ_2, γ_3 — параметры состояния сплава (см. (18)); штрих обозначает производную по аргументу t . Граничные условия для системы (20) формулируются в конкретных задачах.

Представленные ниже решения краевых задач получены для стержней и пластин, изготовленных из никелида титана (сплава) со следующими экспериментальными значениями параметров термоупругого мартенситного превращения [2]: $T_- = 25^\circ\text{C}$, $T_+ = 50^\circ\text{C}$, $E_- = 28$ ГПа, $E_+ = 84$ ГПа, $E_0 = E_+$, $\sigma_0 = 0,049E_+$, $\varkappa_0 = 0,718$, $\nu_- = 0,48$, $\nu_+ = 0,33$ (ν_- , ν_+ — коэффициенты Пуассона в мартенситной и аустенитной фазах соответственно).

Изгиб прямого стержня и пластины торцевым моментом. В принятой выше системе ориентации прямой стержень следует располагать в направлении координаты x_3 , а пластину — в плоскости (x_3, x_1) , при этом $\theta_0 = 0$. Пусть l — длина стержня или пластины в направлении x_3 . При плоском изгибе консольного стержня (пластины) торцевым моментом M отсутствуют распределенные внешние нагрузки ($P_2 = P_3 = Q_1 = 0$) и система (20) приводится к виду

$$y'_0 = \gamma_3 y_1, \quad y'_1 = 0, \quad y'_2 = -\sin y_0, \quad y'_3 = \cos y_0, \quad y'_4 = 0, \quad y'_5 = 0 \quad \forall t \in (0, 1). \quad (21)$$

Условия жесткой заделки в торце $x_3 = 0$ и отсутствия кинематических ограничений в торце $x_3 = l$ выражаются равенствами

$$y_0(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = 0, \quad y_1(1) = -\mu, \quad y_4(1) = 0, \quad y_5(1) = 0, \quad (22)$$

где $\mu = Ml/(IE_0)$ — числовой параметр заданного торцевого момента; в скобках указаны граничные значения аргумента t .

Краевая задача (21), (22) имеет точное решение

$$y_5 = y_4 = 0, \quad y_1 = -\mu, \quad y_0 = \theta = -\mu\gamma_3 t, \quad y_2 = \frac{1 - \cos(\mu\gamma_3 t)}{\mu\gamma_3}, \quad y_3 = \frac{\sin(\mu\gamma_3 t)}{\mu\gamma_3},$$

согласно которому стержень (пластина) изгибается по дуге окружности радиуса $l/(\mu\gamma_3)$ с центром в точке $x_2 = l/(\mu\gamma_3)$, $x_3 = 0$, при этом внутренний изгибающий момент $M_{33} = -M = -\mu E_0 I/l$ остается постоянным по дуге. Дуга становится окружностью при условии $\mu = 2\pi/\gamma_3$. Это значение параметра μ зависит от q и других внутренних параметров материала. Наименьшим по q оно становится при $q = 1$: $\mu_- = 2\pi/\gamma_3(1) \simeq 0,274$.

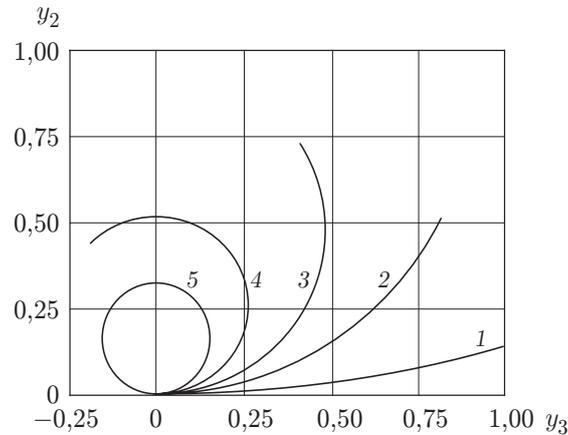


Рис. 1. Эволюция изгибных форм стержня (пластины) при различных значениях параметра q :

1 — $q = 0$; 2 — $q = 0,2$; 3 — $q = 0,4$; 4 — $q = 0,7$; 5 — $q = 1,0$

На рис. 1 показана эволюция изгибных форм стержня (пластины) в зависимости от параметра q при $\mu = 0,274$. Изгиб стержня в кольцо, а пластины в трубу радиуса $l/(2\pi)$ происходит в конце фазового превращения ($q = 1$). Необходимая для этого величина изгибающего момента вычисляется по формуле $M = 0,274E_+I/l$, где I — момент инерции поперечного сечения стержня или пластины. Для того чтобы получить кольцо или трубу вне интервала фазового превращения, требуется приложить момент $M = 2\pi E_+I/l$ в аустенитной фазе и момент $M = 2\pi E_-I/l$ в мартенситной фазе.

Выпучивание стержня и пластины при продольном сжатии. Рассматривается прямой двухшарнирный стержень, закрепленный от перемещений в торце $t = 0$ и нагруженный в аустенитной фазе сжимающей силой $T_3 = -P$, приложенной к торцу $t = 1$. Как и в предыдущей задаче, отсутствуют распределенные внешние нагрузки ($P_2 = P_3 = Q_1 = 0$) и $\theta_0 = 0$. Граничные условия для системы (20) выражаются отличными от (22) равенствами

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = 0, \quad y_1(1) = 0, \quad y_4(1) = 0, \quad y_5(1) = -p, \quad (23)$$

где $p = Pl^3/(IE_0)$ — числовой параметр заданной торцевой силы.

Численный анализ нелинейной краевой задачи (20), (23) выполнен методом стрельбы с привлечением пакета Mathcad [5]. В зависимости от параметра нагрузки p и фазового параметра q исследовалось ветвление решений краевой задачи.

На рис. 2 показано ветвление зависимостей параметров состояния u и w от параметра нагрузки вне интервала фазового превращения для стержня с геометрическим параметром $\varepsilon = 0,02$ (u — отношение продольного перемещения свободного торца к длине стержня, выраженное в процентах; w — отношение максимального прогиба к длине, выраженное в процентах). Если сила меньше эйлеровой критической силы и фазовые деформации в стержне отсутствуют, то в деформированном состоянии стержень остается прямолинейным ($w = 0$). Ветвление показано в окрестности эйлерова критического значения параметра нагрузки $p \simeq 9,8$. При $p < 9,8$ имеют место только прямолинейные формы равновесия стержня: $w = 0$, а значения параметра u настолько малы, что соответствующая им линия в масштабе рисунка не отличима от оси абсцисс. В окрестности критической точки начинается интенсивное выпучивание стержня, сопровождающееся стремительным ростом обоих параметров состояния. Результаты, представленные на рис. 2, соответствуют и аустенитной, и мартенситной фазам стержня. Следует только учесть, что при вычисле-

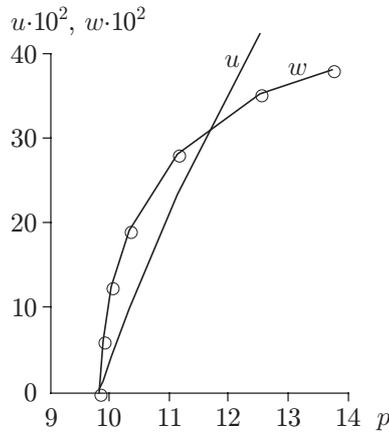


Рис. 2

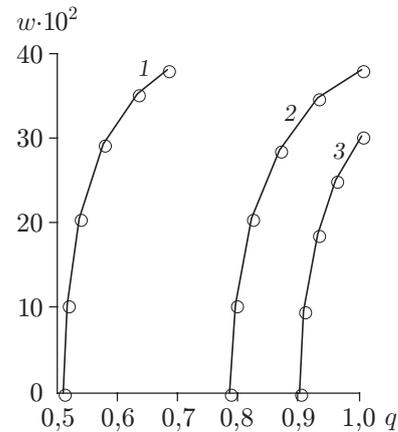


Рис. 3

Рис. 2. Зависимости параметров состояния u , w от параметра нагрузки p вне интервала фазового превращения

Рис. 3. Зависимость $w(q)$ в интервале фазового превращения при различных значениях параметра нагрузки p :

1 — $p = 1,0$; 2 — $p = 0,6$; 3 — $p = 0,5$

нии физических силовых параметров в аустенитной фазе $E_0 = E_+$, а в мартенситной — $E_0 = E_-$.

Результаты анализа картины ветвления в интервале фазового превращения представлены на рис. 3. В зависимости от фазового параметра q показаны ветви выпучивания при значениях параметра нагрузки $p = 1,0; 0,6; 0,5$. При $p = 1,0$ выпучивание начинается в точке $q \simeq 0,507$, при $p = 0,6$ — в точке $q \simeq 0,784$, при $p = 0,5$ — в точке $q \simeq 0,899$. В окрестностях критических точек наблюдается стремительное увеличение прогибов. Наименьшее значение параметра нагрузки, при котором возможно выпучивание стержня за счет фазового превращения, $p \simeq 0,43$.

В таблице и на рис. 4, 5 представлены более подробные данные об эволюции фазовых деформаций стержня при $p = 0,6$. В таблице для ряда значений параметра q приведены не только значения параметров u и w , но и величины угла поворота в граничной точке и максимальные значения тангенциальных $|u_{32}|$, $|u_{33}|$, изгибных $|v_{33}|$ и полных $|w_{33}|$ деформаций. Из данных, представленных в таблице, следует, что сдвиговые, изгибные и полные деформации увеличиваются значительно быстрее, чем деформация чистого сжатия u_{33} , причем деформация поперечного сдвига u_{32} достигает максимального значения в граничных точках, а изгибные и полные деформации — в среднем сечении стержня.

На рис. 4 показано распределение деформаций по длине стержня (в процентах) при соответствующих значениях параметра q из таблицы. Выше оси абсцисс расположены линии изгибных деформаций, ниже — линии полных деформаций в наиболее сильно сжатом

Номер кривой на рис. 4, 5	q	u , %	w , %	$\theta(1)$	$ u_{32} $, %	$ u_{33} $, %	$ v_{33} $, %	$ w_{33} $, %
1	0,790	2,4635	9,0904	0,2873	0,1881	0,3979	3,1322	3,5301
2	0,811	9,0354	18,1850	0,5912	0,3828	0,4116	6,4819	6,8935
3	0,865	24,3790	28,7220	1,0017	0,6312	0,4482	11,1490	11,5970
4	1,000	55,1510	38,1960	1,5713	0,9296	0,5497	18,1820	18,7320

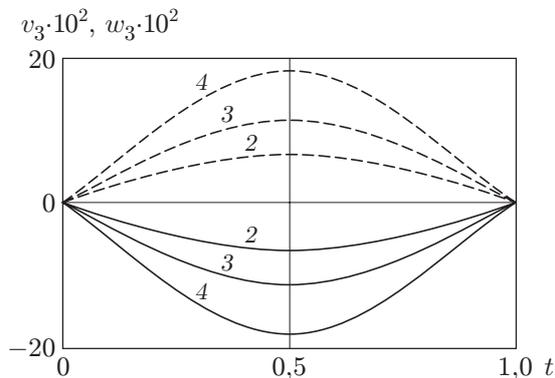


Рис. 4

Рис. 4. Распределение деформаций по длине стержня при различных значениях параметра q (см. таблицу):

сплошные линии — полные деформации в наиболее сильно сжатом волокне стержня;
штриховые — изгибные деформации

Рис. 5. Выпученные формы стержня при различных значениях параметра q (см. таблицу)

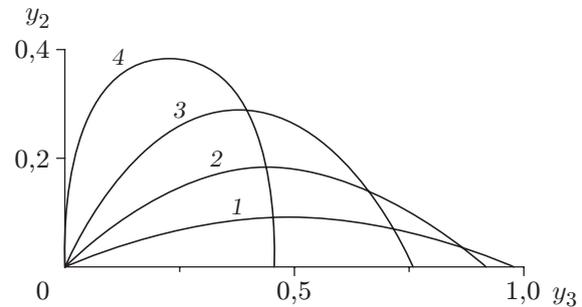


Рис. 5

волокне стержня. Почти полная симметрия верхних и нижних линий относительно оси абсцисс свидетельствует о малой величине тангенциальных деформаций по сравнению с изгибными (об этом свидетельствуют также данные таблицы). В рассматриваемом сплаве термоупругие деформации могут достигать 15 %, так что в интервале $0,865 < q < 1,000$ возможно возникновение пластических деформаций или разрушение стержня.

На рис. 5 показаны выпученные формы стержня при соответствующих значениях параметра q из таблицы. В ненагруженном аустенитном состоянии стержень соответствует единичному отрезку оси абсцисс.

Заключение. Из результатов теоретического анализа следует, что в широком диапазоне значений внешней нагрузки фазовое превращение может существенно влиять на критическую нагрузку. Это может быть использовано для нахождения оптимальных технологических решений. Безусловно, полученные теоретические результаты нуждаются в экспериментальной проверке. Можно выделить две наиболее вероятные причины несоответствия теоретических и экспериментальных данных. Первая причина состоит в том, что физические свойства любого сплава варьируются в достаточно широком диапазоне. Вторая причина — это неадекватность математической модели фазового превращения. Если математическая модель адекватна, теоретический анализ может быть использован для уточнения физических констант реального сплава. В противном случае экспериментальные данные должны быть использованы для построения более точной модели фазового превращения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовчан А. А. Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы // Пробл. машиностроения и надежности машин. 1994. № 6. С. 47–53.
2. Мовчан А. А. Учет переменности упругих модулей и влияния напряжений на фазовый состав в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1998. № 1. С. 79–90.

3. **Мовчан А. А., Данилин А. Н.** Метод решения геометрически нелинейных задач изгиба стержней из сплавов с памятью формы при прямом превращении // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2002. № 4. С. 83–90.
4. **Шкутин Л. И.** Инкрементальная модель деформации стержня // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 4. С. 229–235.
5. **Шкутин Л. И.** Численный анализ разветвленных форм изгиба стержней // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 2. С. 141–147.

Поступила в редакцию 29/VI 2005 г.
