

УДК 532.527

ЭВОЛЮЦИЯ ДВУХ ВИХРЕЙ ВБЛИЗИ ТВЕРДОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Д. А. Гаджиев, А. М. Гайфуллин

Центральный аэрогидродинамический институт им. Н. Е. Жуковского,
140180 Жуковский, Россия

E-mails: dghji@mail.ru, gaifullin@tsagi.ru

Получено численное решение задачи об эволюции двух противоположно закрученных вихрей в вязкой несжимаемой жидкости вблизи твердой поверхности. Определен механизм диссипации вихрей. Построена траектория движения вихрей.

Ключевые слова: вихрь, отрыв пограничного слоя, диффузия вихря, “подскок” вихря.

DOI: 10.15372/PMTF20180204

Введение. Постановка известной задачи о диффузии одиночного вихря в безграничном пространстве [1] предполагает, что в начальный момент времени существует одиночная прямолинейная вихревая нить бесконечной протяженности, окружная скорость жидкости вокруг которой уменьшается обратно пропорционально расстоянию до нее. Если выделить в направлении оси вихревой нити слой жидкости единичной протяженности, то кинетическая энергия этого слоя окажется бесконечной. Поэтому создать одиночную вихревую нить в безграничном пространстве невозможно. В реальности возникают либо замкнутые, либо уходящие в бесконечность вихревые трубки конечной толщины. В случае вихревых трубок, уходящих в бесконечность, их суммарная циркуляция равна нулю.

Одним из способов создания поля скоростей вихревой нити в ограниченной области пространства является моделирование нити с помощью вращающегося цилиндра, радиус которого стремится к нулю [2]. Под действием сил вязкости жидкость или газ вблизи цилиндра приходит в движение. Область, в которой поле скоростей близко к полю скоростей вихревой нити, со временем расширяется.

Поскольку эволюция вихревых структур часто происходит в присутствии твердых поверхностей, представляет интерес исследование явления диффузии в наиболее простом случае — над подстилающей поверхностью. Поэтому можно поставить задачу об эволюции вихревой нити бесконечной протяженности над плоскостью в вязкой жидкости, что эквивалентно плоской задаче о диффузии вихря (в начальный момент точечного) над прямолинейной твердой поверхностью. Однако не ясно, можно ли физически создать такое начальное поле скоростей даже в ограниченной области.

В настоящей работе исследуется эволюция двух точечных вихрей равной по величине и противоположной по знаку интенсивности над прямолинейной подстилающей поверхностью в вязкой ламинарной жидкости. Такая вихревая система возникает при полете

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-01-00128).

самолета с прямоугольным крылом большого удлинения вблизи поверхности Земли. Экспериментальные и расчетные исследования диффузии подобных вихревых систем в турбулентной несжимаемой жидкости, проводившиеся ранее [3, 4], основывались на решении уравнений Рейнольдса в ограниченной области. При этом воздействие пограничного слоя вблизи твердой поверхности вне данной расчетной области на характеристики течения не учитывалось. Заметим, что решение данной задачи обобщает решение задачи о диффузии двух вихрей в неограниченном пространстве [5] и соответствует ей в случае полета самолета на большом расстоянии от поверхности Земли.

В пределе, когда расстояние от центра вихря до плоскости значительно меньше расстояния между вихрями, рассматриваемая задача близка к задаче о диффузии одиночного вихря над плоскостью.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоское нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости при условии, что в начальный момент времени $t = 0$ имеется поле скоростей, которое индуцируют два точечных вихря с интенсивностями $\pm\Gamma_0$ и координатами $Y = H$, $X = \pm L$ над твердой поверхностью $Y = 0$. Будем полагать, что правый вихрь является положительным, т. е. жидкость вокруг него вращается против часовой стрелки. Пусть U , V — компоненты скорости вдоль осей X , Y ; Ω — завихренность; $\text{Re} = \Gamma_0/\nu$ — число Рейнольдса; ν — кинематическая вязкость. Определим безразмерные величины $x = X/L$, $y = Y/L$, $h = H/L$, $\tau = \Gamma_0 t/L^2$, $u = UL/\Gamma_0$, $v = VL/\Gamma_0$, $\omega = L^2\Omega/\Gamma_0$. Характеристики течения должны удовлетворять уравнениям для несжимаемой жидкости

$$\begin{aligned} \frac{\partial\omega}{\partial\tau} + u\frac{\partial\omega}{\partial x} + v\frac{\partial\omega}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Re}}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \omega. \end{aligned} \quad (1)$$

Начальное поле скорости для уравнений (1) соответствует полю скоростей двух вихрей над плоскостью и двух фиктивных отраженных вихрей. Комплексно-сопряженная скорость в точке $z = x + iy$ при $\tau = 0$ определяется соотношением

$$u - iv = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{z - 1 - ih} - \frac{1}{z + 1 - ih} + \frac{1}{z + 1 + ih} - \frac{1}{z - 1 + ih} \right).$$

В силу условия симметрии систему уравнений (1) можно решать только в правой полуплоскости. Зададим следующие граничные условия при $\tau > 0$:

— условие на оси симметрии

$$x = 0: \quad u = 0;$$

— условие прилипания на твердой поверхности

$$y = 0: \quad u = v = 0;$$

— условие затухания скорости на бесконечности

$$u^2 + v^2 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty;$$

— условие отсутствия особенностей скорости во всем течении

$$u^2 + v^2 < \infty.$$

Решение задачи зависит от двух параметров: числа Рейнольдса Re и начальной относительной высоты вихрей h . Исследования ограничивались случаем $\text{Re} \gg 1$, $h \sim 1$.

2. Решение задачи на малых временах. Проанализируем движение двух дискретных вихрей над твердой поверхностью в идеальной жидкости. Пусть $x_v(\tau)$, $y_v(\tau)$ — координаты правого вихря, тогда получаем

$$\frac{dx_v}{d\tau} = \frac{1}{4\pi} \frac{x_v^2}{y_v(x_v^2 + y_v^2)}, \quad \frac{dy_v}{d\tau} = -\frac{1}{4\pi} \frac{y_v^2}{x_v(x_v^2 + y_v^2)}. \quad (2)$$

Из (2) определяется связь между координатами вихря

$$x_v^{-2} + y_v^{-2} = 1 + h^{-2}. \quad (3)$$

Из соотношений (2), (3) следует, что с течением времени абсцисса вихря увеличивается, а ордината уменьшается. Кроме того, при больших значениях τ вихрь движется на некотором постоянном расстоянии $y_v = h/\sqrt{1+h^2}$ от плоскости $y = 0$, а расстояние от оси симметрии увеличивается со временем по линейному закону.

Рассмотрим эволюцию вихрей в вязкой жидкости. Основная трудность при численном интегрировании уравнений (1) с соответствующими граничными условиями заключается в том, что поле завихренности при $\tau = 0$ имеет особенность при приближении к центрам вихрей и твердой поверхности. Вместе с тем на малых временах влияние вязкости локализовано вблизи центров вихрей и твердой поверхности. Размеры вязких областей увеличиваются пропорционально $\sqrt{\tau/\text{Re}}$, т. е. они значительно меньше размера области, в которой происходит перемещение вихрей. Поэтому наличие вязких областей не оказывает существенного влияния на траекторию центров вихрей, которая остается близкой к траектории, определяемой уравнением (2). Для описания характеристик течения в самих вязких областях вместо уравнений (1) можно использовать уравнения пограничного слоя. Таким образом, на малых временах завихренность вблизи вихря диффундирует так же, как в классической задаче об одиночном вихре:

$$\omega = \frac{\text{Re}}{4\pi\tau} e^{-r^2 \text{Re}/(4\tau)}, \quad (4)$$

где $r = \sqrt{(x - x_v)^2 + (y - y_v)^2}$. Вблизи твердой поверхности в главном приближении имеем

$$\begin{aligned} \tau \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{1}{2} y_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} + \tau u \frac{\partial u}{\partial x} + \tau v_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} &= \tau \frac{\partial u_e}{\partial \tau} + \tau u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $y_1 = y/\delta$; $v_1 = v/\delta$; $u_e(x, \tau)$ — скорость, индуцируемая вихревым течением на твердой поверхности; $\delta = \sqrt{\tau/\text{Re}}$ — безразмерная толщина пограничного слоя. Граничные условия для уравнения (5) следующие: условие прилипания при $y_1 = 0$, условие выхода на внешнее невязкое решение $u(x, y_1, \tau) = u_e(x, \tau)$ при $y_1 \rightarrow \infty$ и условие симметрии $u = 0$ при $x = 0$. В окрестности точки разделения линий тока $x = 0$, $y = 0$ для компонент скорости справедливы представления [6]. Необходимо также задать начальное условие. При $\tau = 0$ из (5) следует

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \frac{1}{2} y_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} = 0,$$

откуда получаем

$$u(x, y_1, 0) = \frac{u_e(x, 0)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y_1} e^{-y_1^2/4} dy_1.$$

Поле завихренности, которое возникло вблизи центров вихрей (точек с максимальной по модулю завихренностью) и твердой поверхности, определяет скорости перемещения вихрей. Поле скоростей, индуцированное завихренностью вблизи вихрей, аналогично

полю точечных вихрей. Пограничный слой вблизи твердой поверхности оказывает вытесняющее действие, эквивалентное действию распределенных по поверхности источников с интенсивностью

$$q(x) = 2 \frac{\Gamma_0}{L} \frac{d}{dx} (u_e \delta^*),$$

где $\delta^* = \sqrt{\frac{\tau}{\text{Re}}} \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy_1$. Таким образом, изменение координаты правого вихря определяется соотношением

$$\frac{d\bar{z}_v}{d\tau} = \frac{1}{4\pi i} \left(-\frac{1}{x_v} + \frac{1}{z_v} + \frac{i}{y_v} \right) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{z_v - \xi} \frac{d}{d\xi} (u_e(\xi) \delta^*(\xi)) d\xi, \quad (6)$$

где $z_v = x_v + iy_v$, $z_v(0) = 1 + ih$.

Результаты численного решения уравнений (5), (6) показывают, что по мере уменьшения расстояния между центрами вихрей и плоскостью профиль горизонтальной составляющей скорости в пограничном слое становится менее наполненным, и в некоторый момент времени $\tau = \tau_S$ в точке на твердой поверхности $x = x_S$ производная $\partial u / \partial y_1$ обращается в нуль (предотрывное течение). При $\text{Re} = 1000$, $h = 1$ $\tau_S \approx 4$, при $h = 2$ сила трения становится равной нулю значительно позднее — $\tau_S \approx 14$.

Аналогичная задача для уравнений пограничного слоя в случае, когда вблизи твердой поверхности движутся два точечных недиффундирующих вихря равной по величине и противоположной по знаку интенсивности, рассматривалась в работе [7]. Следует отметить, что результаты работы [7] и настоящей работы близки. Так, при $h = 1$ в [7] (в переменных, введенных в настоящей работе) $\tau_S \approx 3,93$.

Дальнейшее решение уравнений (5) при $\tau > \tau_S$ невозможно. Также отсутствует необходимость проводить расчет при $\tau \leq \tau_S$. Разделение на области обусловлено необходимостью устранения особенностей в распределении завихренности. Поэтому расчет уравнений пограничного слоя проводился до значения времени $\tau = \tau_0 < \tau_S$.

3. Решение задачи на временах $\tau > \tau_0$. Начиная с момента времени $\tau = \tau_0$ до времен, на которых циркуляция вихрей существенно уменьшается [5], решение задачи определяется из ее совместного решения в различных областях.

Введем функцию тока $u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$. В области $0 \leq x \leq x_k$, $0 \leq y \leq y_k$ численное интегрирование уравнений (1) проводится в переменных ω , ψ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\omega}{\partial\tau} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\omega}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} &= -\omega. \end{aligned} \quad (7)$$

При $x > x_k$ вблизи твердой поверхности в главном приближении справедливы уравнения пограничного слоя (5). Безразмерная толщина пограничного слоя по-прежнему увеличивается пропорционально $\sqrt{\tau/\text{Re}}$, следовательно, при $\tau \sim \text{Re}$ толщина $\delta \sim O(1)$, т. е. толщина пограничного слоя становится сопоставимой с размером расчетной области y_k для уравнений (7). При $x > x_k$ влияние пограничного слоя на характеристики течения в области $0 \leq x \leq x_k$ может быть существенным, поэтому его следует учитывать при решении уравнений (7).

Определим граничные условия для уравнений (7), (5). Для первого уравнения системы (7) на линии симметрии $x = 0$ ставится условие $\omega = 0$. Размер расчетной области y_k

должен быть достаточно большим, поэтому при $y = y_k$ полагается, что течение в главном приближении не является завихренным: $\omega = 0$. На линии $x = x_k$ ставится мягкое граничное условие $\partial\omega/\partial x = 0$, на твердой границе $y = 0$ — условие прилипания. При численном решении условие прилипания аппроксимируется условием Тома [8]. Начальное распределение ω соответствует решению задачи на малых временах ($\tau = \tau_0$), т. е. суперпозиции решения уравнений (5) для пограничного слоя и решения (4) для вихрей.

Для второго уравнения (7) линии $x = 0$, $y = 0$ будем считать соответствующими нулевой линии тока $\psi = 0$. На линиях $x = x_k$, $y = y_k$ функция тока имеет вид

$$\psi(x, y, \tau) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi, \eta, \tau) \ln [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] d\xi d\eta,$$

где интегрирование ведется по всей плоскости $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, причем полагается, что в полуплоскости $y < 0$ завихренность распределена следующим образом:

$$\omega(x, y, \tau) = -\omega(x, -y, \tau).$$

Для уравнений (5) ставятся условия $u(x, 0, \tau) = 0$, $u(x, \infty, \tau) = u_e(x, \tau)$, функция $u(x_k, y_1, \tau)$ задает профиль скорости, получаемый из решения системы уравнений (7) при $x = x_k$. Здесь $u_e(x, \tau)$ — скорость, которую индуцирует завихренность, распределенная в области решения уравнений Навье — Стокса $0 \leq x \leq x_k$, $0 \leq y \leq y_k$, на твердой поверхности $y = 0$ при $x > x_k$. Начальное условие $u(x, y_1, \tau_0)$ определяется из решения на малых временах при $\tau = \tau_0$.

В ограниченной области $-x_k \leq x \leq x_k$ завихренность в основном сосредоточена в окрестности центров вихрей (точек с максимальным абсолютным значением завихренности в области диффундирующего вихря) $x = \pm x_v$, $y = y_v$, в пограничном слое и в слое смещения, являющемся продолжением пограничного слоя. Это определяет асимптотическое распределение скорости $u_e(x, \tau)$ на больших расстояниях от центров вихрей:

$$u_e(x, \tau) = \frac{A(\tau)}{x^3} + O\left(\frac{1}{x^5}\right), \quad x \gg x_v. \quad (8)$$

При этом $A(\tau) > 0$, и профиль скорости в пограничном слое можно представить в виде

$$u(x, y_1, \tau) = \frac{f(y_1, \tau)}{x^3} + O\left(\frac{1}{x^5}\right),$$

где функция $f(y_1, \tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\tau \frac{\partial f}{\partial \tau} - \frac{1}{2} y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} = \tau \frac{dA}{d\tau} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} \quad (9)$$

и граничным условиям $f(0, \tau) = 0$, $f(\infty, \tau) = A$.

Таким образом, при сравнительно небольших $x \geq x_k$ уравнения пограничного слоя решаются с использованием уравнений (5), при $x \gg x_v$ — уравнения (9).

Численное решение задачи свидетельствует о том, что отрыв потока, возникающий при $\tau = \tau_S$, продолжает существовать и при больших временах. Отрыв нулевой линии тока от твердой поверхности при $h = 2$, $Re = 1000$ происходит в точках $x_S = 2,7$ при $\tau = 30$, $x_S = 3,8$ при $\tau = 80$, $x_S = 4,2$ при $\tau = 150$. Согласно (8) на расстояниях $x \gg x_S$ вблизи поверхности горизонтальная компонента скорости положительна. Следовательно, оторвавшаяся от поверхности в точке $x = x_S$ нулевая линия тока должна присоединиться к ней в точке $x = x_r$. При тех же значениях h , Re присоединение происходит в точках $x_r = 5,1$ при $\tau = 30$, $x_r = 7,3$ при $\tau = 80$, $x_r = 7,6$ при $\tau = 150$. Таким образом, часть

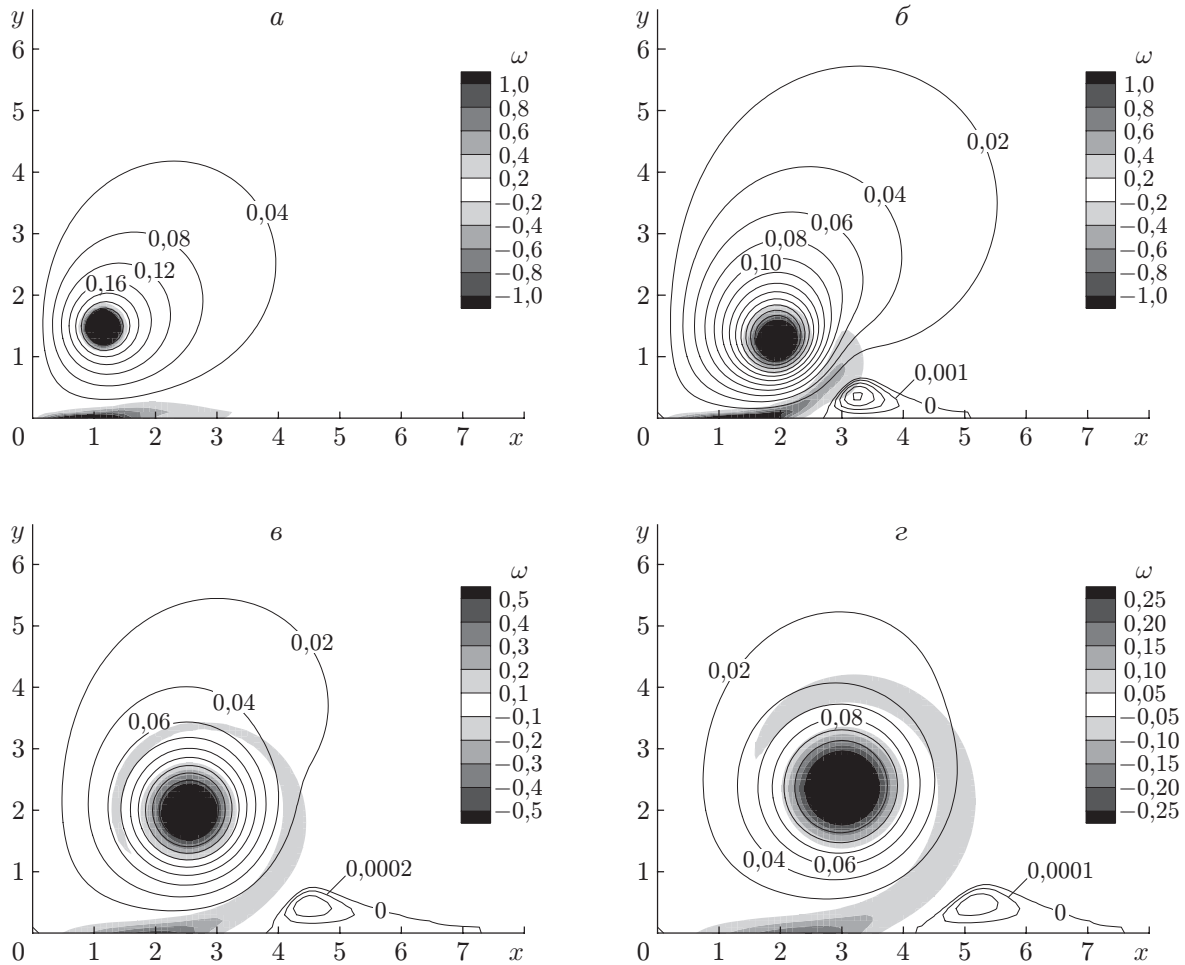


Рис. 1. Поле завихренности и линии тока в неподвижной системе координат при $Re = 1000$, $h = 2$ и различных значениях безразмерного времени τ :
 а — $\tau = 10$, б — $\tau = 30$, в — $\tau = 80$, г — $\tau = 150$

области $x_S \leq x \leq x_r$ является зоной рециркуляционного течения, примыкающей к твердой поверхности (рис. 1).

Пограничный слой на твердой поверхности, образующийся при $x = 0$, обладает большой завихренностью, которая сначала распределена вдоль твердой поверхности, а затем, в окрестности области рециркуляции, отрывается от поверхности и начинает “наматываться” на вихрь. Завихренность положительна в окрестности центра вихря и отрицательна в пограничном слое и слое смешения. На рис. 1 показаны поле завихренности и линии тока в неподвижной системе координат, на рис. 2 — в системе координат, в которой горизонтальная скорость центра вихря равна нулю.

При $h \ll 1$ наблюдается аналогичная картина течения, близкая к картине течения, соответствующей эволюции одного точечного вихря над твердой поверхностью.

Со временем циркуляция вихрей уменьшается. Известна зависимость циркуляции от времени при $h = \infty$ [5]. При этом под термином “циркуляция” понимается циркуляция скорости по контуру, охватывающему правую (или левую) половину овального контура, перемещающегося вместе с вихрями. При $h \sim 1$ такую процедуру вычисления циркуляции провести невозможно, так как отсутствует замкнутый контур, перемещающийся вместе с вихрями (см. рис. 1, 2). Для определения характеристик вихря вычислим циркуляцию

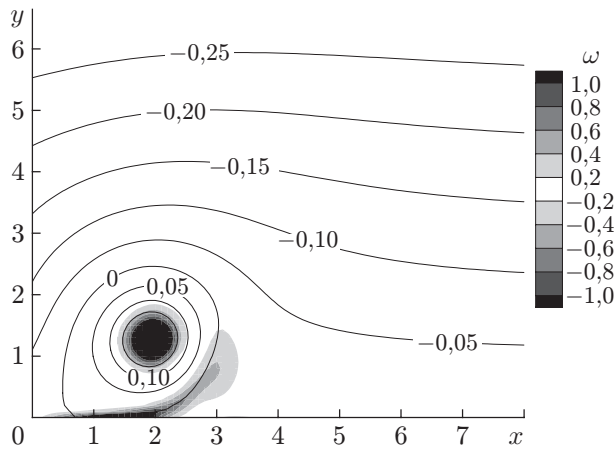


Рис. 2

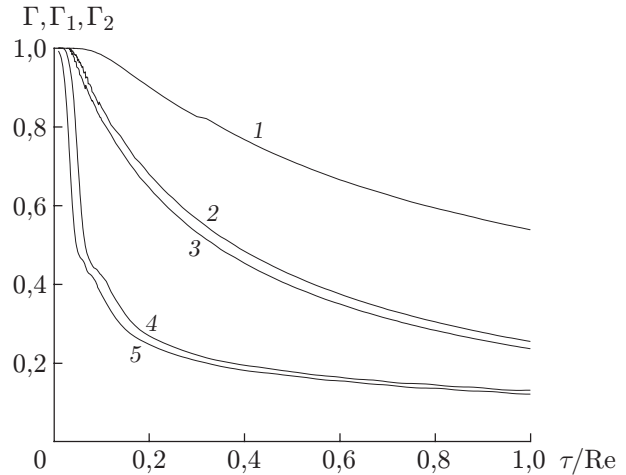


Рис. 3

Рис. 2. Поле завихренности и линии тока при $Re = 1000$, $h = 2$ в момент времени $\tau = 30$ в системе координат, в которой горизонтальная скорость центра вихря равна нулю

Рис. 3. Зависимости циркуляции правого вихря от времени при $Re = 1000$ и различных значениях h :

1 — Γ ($h = \infty$) [5], 2, 3 — Γ_1 (2 — $h = 3$, 3 — $h = 2$), 4, 5 — Γ_2 (4 — $h = 3$, 5 — $h = 2$)

скорости по окружности с центром, совпадающим с центром вихря, через поток завихренности:

$$\Gamma(r, \tau) = \iint_{(x-x_v)^2+(y-y_v)^2 \leq r^2} \omega(x, y, \tau) dx dy.$$

Введем два значения циркуляции: $\Gamma_1(\tau) = \max_r \Gamma(r, \tau)$, $\Gamma_2(\tau) = \Gamma(r, \tau)|_{r=\min(x_v, y_v)}$. Функции $\Gamma_1(\tau)$ соответствует окружность, на которой значение циркуляции максимально, $\Gamma_2(\tau)$ — окружность с максимальным радиусом, расположенная в первом квадранте. Изменение этих величин со временем для двух значений h представлено на рис. 3. При наличии твердой поверхности циркуляция вихрем уменьшается значительно быстрее. Это обусловлено различием механизмов потери циркуляции. В отсутствие поверхности вихри диссипируют только вследствие взаимодействия друг с другом, при наличии поверхности — вследствие взаимодействия с противоположно завихренным слоем, оторвавшимся от твердой поверхности.

Траектория движения центра правого вихря существенно отличается от траектории вихрей (3) в идеальной жидкости (рис. 4). Слой смещения индуцирует на вихре положительную вертикальную и отрицательную горизонтальную скорость, замедляя его движение, а в некоторые моменты, возможно, даже заставляя его двигаться в обратном направлении и подниматься вверх. Данное явление известно как “подскок” вихря [9]. Существует критическое число Рейнольдса $Re_*(h)$, при котором траектория меняется. При $Re \leq Re_*$ в некоторый момент времени расстояние от центра вихря до плоскости достигает минимума, после чего координаты вихрей монотонно увеличиваются (см. рис. 4,а). При $Re > Re_*$ после достижения минимального расстояния координаты вихря меняются немонотонно (см. рис. 4,б). На больших временах направление движения вихря не меняется, скорость со временем уменьшается. Результаты численного исследования показывают, что в случае $h = 2$ при $Re = 1000$ течение является докритическим, при $Re = 2000$ — закритическим.

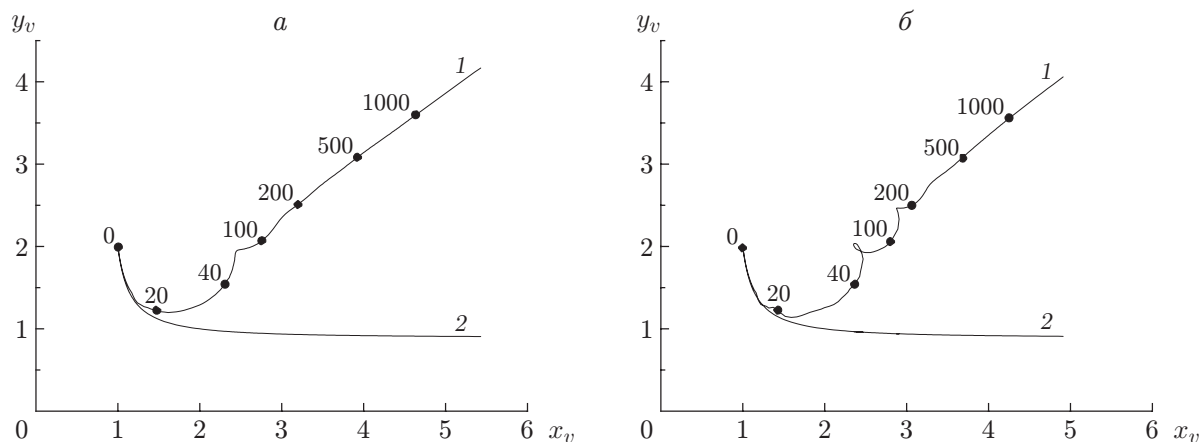


Рис. 4. Траектории движения центра правого вихря $x_v(\tau)$, $y_v(\tau)$ при $h = 2$ и различных значениях числа Рейнольдса:

a — $Re = 1000$, b — $Re = 2000$; 1 — в вязкой жидкости, 2 — в идеальной жидкости; точки — положения центра вихря в различные моменты времени τ

Заключение. Исследована эволюция двух точечных противоположно закрученных вихрей в вязкой несжимаемой жидкости вблизи твердой поверхности. Получено решение при наличии особенности в распределении завихренности на малых временах. Показано, что взаимодействие с поверхностью играет большую роль в процессе уменьшения циркуляции вихрей. Причины диссипации циркуляции существенно различаются для случаев $h = \infty$, $h \sim 1$. В отсутствие твердых границ диссипация вихрей обусловлена диффузией завихренности через внутреннюю и внешнюю границы овальной области [5], в случае $h \sim 1$ — взаимодействием вихрей с пограничным слоем на твердой поверхности. На твердой поверхности имеется точка отрыва потока, за которой образуется зона рециркуляции. В окрестности этой точки пограничный слой начинает “наматываться” на вихри, образуя своеобразную “шубу” из противоположной завихренности.

В зависимости от значения числа Рейнольдса траектория вихрей может иметь монотонный либо немонотонный характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
2. Гайфуллин А. М. Вихревые течения. М.: Наука, 2015.
3. Harvey J. K., Perry F. J. Flowfield produced by trailing vortices in the vicinity of the ground // AIAA J. 1971. V. 9, N 8. P. 1659–1660.
4. Gaifullin A. M., Gadzhiev D. A. Evolution of vortex wake near the Earth's surface // AIP Conf. Proc. 2016. V. 1770. P. 1–8.
5. Гайфуллин А. М., Зубцов А. В. Диффузия двух вихрей // Изв. РАН. 2004. № 1. С. 126–142.
6. Фроловская О. А. Автомодельное нестационарное течение вязкой жидкости вблизи критической точки // ПМТФ. 2016. Т. 57, № 3. С. 3–8.
7. Ersoy S., Walker J. D. A. Viscous flow induced by counter-rotating vortices // Phys. Fluids. 1985. V. 28, N 9. P. 2687–2698.
8. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
9. Zheng Z. C., Ash R. L. Study of aircraft wake vortex behavior near the ground // AIAA J. 1996. V. 34, N 3. P. 580–589.

Поступила в редакцию 1/II 2017 г.,
в окончательном варианте — 2/V 2017 г.