УДК 533

КОНИЧЕСКИЕ ЗАКРУЧЕННЫЕ ТЕЧЕНИЯ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

С. В. Хабиров

Институт механики Уфимского научного центра РАН, 450054 Уфа
E-mail: habirov@anrb.ru

Исследованы новые закрученные течения, представляющие собой течения в каналах, обтекание тел вращения и сток или источник на оси симметрии. Рассмотрены построенные по надгруппе групповые решения, являющиеся обобщениями конических течений.

Ключевые слова: конические течения газа, инвариантные решения, частично инвариантные решения, дифференциально-инвариантные решения.

Введение. Конические течения являются инвариантными решениями уравнений газовой динамики, построенными по группе, состоящей из операторов переноса по времени, вращения и равномерного растяжения по всем независимым переменным [1–3]. Обычно рассматриваются движения газа без вращения, представляющие собой обтекание тел вращения с ударными волнами и гладкими сопряжениями через характеристики. В данной работе рассмотрены конические течения с вращением. Выводятся уравнения инвариантной подмодели на трехпараметрической группе, состоящей из операторов переноса по времени, вращения и растяжения. С помощью надгруппы найдены специальные точные решения. Построена асимптотическая модель почти равномерного потока. В качестве обобщений конических течений предложена дифференциально-инвариантная подмодель ранга $1 + 0$ на пятимерной надгруппе, решения которой принадлежат множеству частично инвариантных решений ранга 1 дефекта 2.

1. Подмодель конически закрученных течений. Рассмотрим самонормализованную подалгебру с номером 3.1 из оптимальной системы [4]. Базис операторов состоит из оператора вращения вокруг оси x ∂_θ, оператора переноса по времени ∂_t, оператора равномерного растяжения $t\,\partial_t + x\,\partial_x + r\,\partial_r$ в цилиндрической системе. Инварианты этих операторов задают представление компонент скорости, плотности ρ и энтропии S:

$$U = U(s), \quad V = V(s), \quad W = W(s), \quad \rho = \rho(s), \quad S = S(s), \quad s = xr^{-1}.$$

Здесь U, V, W — продольная вдоль оси x, радиальная и окружная компоненты скорости. Из уравнения состояния $p = f(\rho, S)$ следует представление для давления $p = p(s)$. Скорость звука a определяется равенством $a^2 = f_\rho$. Подставляя эти представления в уравнения газовой динамики [1], получаем инвариантную подмодель конических течений

$$(U - sV)U' + \rho^{-1}p' = 0, \quad (U - sV)V' + \rho^{-1}sp' = W^2, \quad (U - sV)W' = -VW,$$
$$(U - sV)\rho' + \rho\big((U - sV)' + 2V\big) = 0, \quad (U - sV)S' = 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 11-01-000026-а, 11-01-00147-а, НШ-4368.2010.1) и гранта № 11.G34.31.0042 Правительства РФ по постановлению № 220.

Для подмодели найдены три интеграла [3]: интеграл энтропии $S = S_0$, интеграл Бернулли $U^2 + V^2 + W^2 + 2I(\rho) = 0$, $I(\rho) = -\int\limits_{\rho}^{\rho_*} \rho^{-1} f_\rho \, d\rho$, $\rho_* > \rho$, интеграл закрутки $W^2 = \rho|U - sV|$, где постоянная интегрирования равна единице с учетом преобразования растяжения $D^{-1}\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{u}$, $D^{-2}f \to f$. Используя эти интегралы, подмодель конических течений сведем к равенствам

$$\begin{gathered} U^2 + V^2 + \sigma\rho(U - sV) + 2I(\rho) = 0, \\ sU' + V' = \rho\sigma, \\ U'(1 - \rho^{-1} I_\rho^{-1}(U - sV)^2) - sV' + V = 0, \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $\sigma = \operatorname{sgn}(U - sV)$. Если $W = 0$ ($D = 0$), то получаем конические течения без закрутки, которые исследованы достаточно подробно [1–3]. Далее рассматриваются решения при $W \neq 0$.

2. Особое решение. Для особых решений определитель системы квазилинейных дифференциальных уравнений (1.1) равен нулю.

Утверждение. *Существует единственное особое решение системы* (1.1) *с уравнением состояния* $p = a_0^2\rho^2/2 + p_0$:

$$\begin{gathered} \rho = a_0^2 \lambda^{-2}, \qquad V = \sigma a_0^2 s \lambda^{-2}, \qquad U = \sigma a_0^2 (2 - \lambda^{-2}), \\ W = a_0^2 \lambda^{-1}, \qquad \lambda^2 = 1 + s^2. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Доказательство. Если определитель квазилинейной системы (1.1) равен нулю, то коэффициенты уравнений пропорциональны:

$$V = \sigma s \rho, \quad U = \sigma(s^2\rho + \lambda a), \quad a^2 = \rho I_\rho = f_\rho, \quad W^2 = \rho\lambda a \quad \Rightarrow \quad \lambda > 0.$$

При этом система (1.1) сводится к одному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{\lambda + a_\rho}{a + 2\lambda\rho} \, d\rho = 0, \tag{2.2}$$

интеграл Бернулли принимает вид

$$\lambda^4\rho^2 + 2\lambda^3\rho a + \lambda^2(a^2 - \rho^2) - \lambda\rho a + 2I = 0.$$

В силу (2.2) дифференциал интеграла Бернулли записывается в виде

$$(a + 2\lambda\rho)((a + 2\lambda\rho)^2 - 9a^2) = 0.$$

Это уравнение имеет три корня: $-a(2\rho)^{-1}$, $-2a\rho^{-1}$, $a\rho^{-1}$, среди которых только положительный корень имеет физический смысл. Подставляя $\lambda = a\rho^{-1}$ в дифференциальное равенство (2.2), получаем равенство $a = a_0\sqrt{\rho}$, из которого следуют уравнение состояния и решение (2.1).

Решение (2.1) описывает сверхзвуковое течение:

$$q^2 = U^2 + V^2 + W^2 = 2a_0^4(1 + 2s^2)/(1 + s^2) > a_0^4/(1 + s^2) = a^2.$$

В начальном сечении $x = 0$ ($s = 0$) имеем $V = 0$, $\rho = a_0^2$, $U = a_0^2 = W$, т. е. закрученный постоянный поток ($\sigma = 1$). При $x < 0$ этот поток можно считать заданным, так как поверхность $x = 0$ является характеристикой на решении (2.1) подмодели установившихся осесимметричных движений (инвариантная подмодель подалгебры $\{\partial_\theta, \partial_t\}$). Следовательно, эта поверхность представляет собой слабый разрыв с равномерным закрученным потоком. Скачок ускорения равен $[V_x] = a_0^2 r^{-1}$.

При $s \to \infty$ имеем $V = W = 0$, $U = 2a_0^2$, $\rho \to 0$, т. е. истечение в вакуум с удвоенной начальной продольной скоростью. Линии тока L удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx}{r^2 + 2x^2} = \frac{dr}{xr} = \frac{d\theta}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

и определяются равенствами

$$x^2 = r^2(K_0^2 r^2 - 1), \qquad r = K_0^{-1} \operatorname{ch}(\theta - \theta_0),$$

где K_0, θ_0 — постоянные, задающие линию тока. Таким образом, $r > K_0^{-1}$, график функции $r = r(x)$ симметричен относительно оси r, в первом квадранте имеются точка перегиба $(K_0^{-1}\sqrt{3}/2, K_0^{-1}\sqrt{3}/\sqrt{2}\,)$ и точка минимума $(0, K_0^{-1})$, асимптоты отсутствуют. Линия тока представляет собой спираль, намотанную на поверхность вращения кривой $r = r(x)$ вокруг оси x. Поверхность вращения задает разгонное сопло, преобразующее закрученный поток в поступательный поток. При $\sigma = -1$, наоборот, поступательный поток преобразуется в закрученный поток в диффузоре.

3. Решения, полученные по надалгебре. Рассмотрим для подалгебры 3.1 надалгебру 4.2 с базисом ∂_x, ∂_t, ∂_θ, $t\partial_t + x\partial_x + r\partial_r$ [4]. Инвариантами являются все газодинамические функции. Частично инвариантное решение ранга 0 дефекта 4 может быть частным решением подмодели конических течений. Это значит, что одна из функций постоянна.

Пусть $U = U_0$, тогда $\rho = \rho_0$, $V = \sigma\rho_0 s$, $W^2 = \rho_0(U_0 - \rho_0 s^2)$, где положительные постоянные U_0, ρ_0 удовлетворяют соотношению $U_0^2 + \rho_0 U_0 + 2I(\rho_0) = 0$. То же решение получаем, полагая $\rho = \rho_0$. Решение определено вне конуса: $|x| \leqslant \sqrt{U_0\rho_0^{-1}}\,r$. На характеристике $x = 0$ ($\sigma = 1$) имеем $U = U_0$, $V = 0$, $W = \sqrt{\rho_0 U_0}$, т. е. постоянный закрученный поток в области $x < 0$. При $x > 0$ линия тока L есть прямая на однополостном гиперболоиде $U_0 r^2 = \rho_0(x^2 + K_0^2)$, $r\sqrt{U_0\rho_0^{-1}} \cos(\theta - \theta_0) = K_0$. При $r \to \infty$ имеем $U = U_0$, $W^2\big|_L = K_0^2\rho_0^2 r^{-2} \to 0$, $V \to \sqrt{\rho_0 U_0}$. В этом случае течение стремится к равномерному вдоль конуса течению. В результате получаем безударное обтекание конуса закрученным потоком. При $\sigma = -1$ получаем течение в противоположном направлении.

Пусть $V = V_0$. При $V_0 = 0$ из (1.1) следуют равенства

$$\sigma = \operatorname{sgn} U, \quad |U| = a, \quad a^2 + \rho a + 2I = 0, \quad sU' = \sigma\rho, \quad W^2 = \rho a,$$

из которых получаем уравнение состояния $a = 2K\rho$, $K > 0$. Следовательно, $p = K\rho^2 + p_0$. В этом случае решение (1.1) имеет вид

$$\rho = \rho_0|s|^{1/(2K)}, \qquad U = 2\sigma K\rho_0|s|^{1/(2K)}, \qquad W = \sqrt{2K}\rho_0|s|^{1/(2K)}.$$

Линиями тока течения являются спирали $x = r_0\sqrt{2K}\,(\theta - \theta_0) + x_0$ на цилиндре $r = r_0$. Мировые линии задаются равенством

$$x^{(2K-1)/(2K)} = x_0^{(2K-1)/(2K)} + (2K-1)\rho_0 r_0^{-1/(2K)} t \quad (x = x_0 \exp(\rho_0 r_0^{-1} t) \quad \text{при} \quad K = 1/2).$$

Здесь x_0, r_0, θ_0 — лагранжевы координаты частицы.

При $V_0 \neq 0$ преобразование эквивалентности $UV_0^{-1} \to U$, $\rho V_0^{-1} \to \rho$, $WV_0^{-1} \to W$, $1 + 2V_0^{-2}I \to I$ приводит к равенствам $V = 1$, $\sigma = \operatorname{sgn}(U - s)$, $sU' = \sigma\rho$, $U^2 + \sigma\rho(U - s) + 2I = 0$, $(U - s)^2 = I_\rho(\rho + \sigma s)$, $W^2 = \rho\sigma(U - s)$, из которых следует неравенство $U^2 + 2I < 0$.

Исключая из системы (1.1) с учетом полученных соотношений переменную s, имеем систему уравнений

$$\rho I_\rho(U^2 + 2I + \rho\sigma U + \rho^2) = (U^2 + 2I)^2,$$
$$\sigma U_\rho(U^2 + 2I) = \rho I_\rho. \qquad (3.1)$$

Исключая из системы (3.1) переменную ρ, имеем уравнение

$$(U^2+2I)(1+I_{UU})=I_U(I_U+U).$$

В переменных $-z^2=1+2IU^{-2}$, $\beta(z)=z+Uz_U$ получаем уравнение Абеля

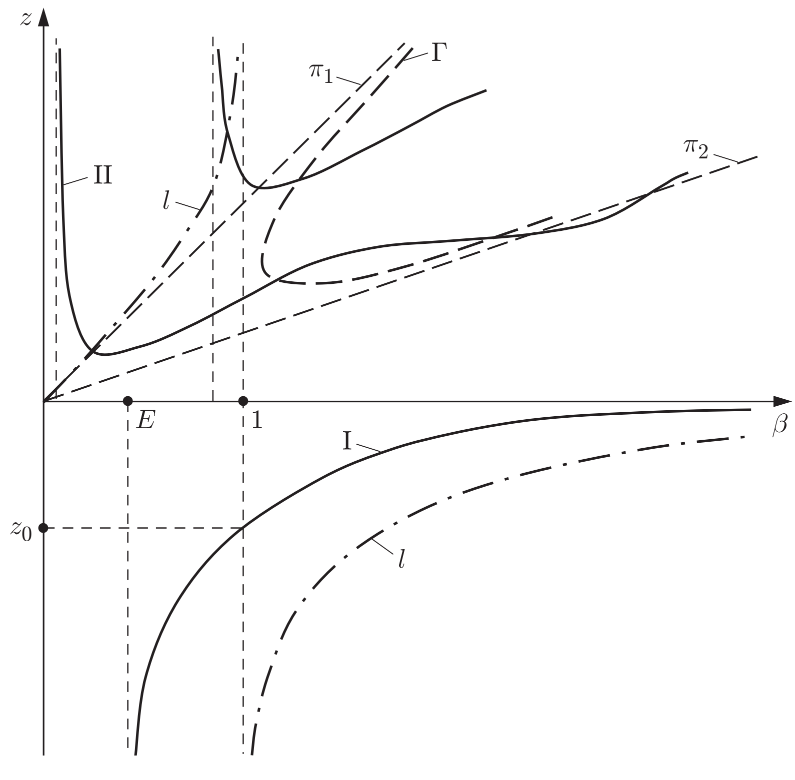
$$z_\beta=z^2-\beta^{-1}z^3. \tag{3.2}$$

Отражение переменных относительно начала системы координат не приводит к изменению уравнения (3.2). Достаточно построить интегральные кривые в полуплоскости $\beta>0$. Прямые $\beta=0$ и $z=0$ являются интегральными прямыми. Уравнение прямой максимумов $z=\beta$. Точки перегибов расположены на гиперболе $(2\beta-3z)(z-\beta)=1$ (гиперболе Γ) с асимптотами $z=\beta$ и $z=2\beta/3$ (асимптотами π_1, π_2 соответственно). Гипербола не пересекает оси z, β. При $|z|\to\infty$ интегральные кривые описываются выражением $\beta\sim E+E(2z^2)^{-1}+E^2(3z^3)^{-1}$. При $\beta\to\infty$, $0<z<\beta$ интегральные кривые аппроксимируются гиперболой Γ. При $\beta\to\infty$, $z<0$ асимптотика решений имеет вид

$$z=-\frac{1}{\beta}\Big(1+\frac{c}{\beta}+\frac{c^2+1}{\beta^2}+\frac{C(C^2+5/2)}{\beta^3}+\frac{C^4+13C^2/3+4/3}{\beta^4}+\dots\Big).$$

Решение описывается интегральными кривыми типов I и II (см. рисунок). Вычислим параметры течения вдоль каждой интегральной кривой:

$$U=U_0\exp\Big(\int\frac{dz}{\beta-z}\Big),\qquad I=-\frac{1}{2}U^2(1+z^2),\qquad \rho=\sigma\frac{Uz^2}{1+\beta z}, \\ s=-U\beta z,\qquad W=s\beta^{-1}. \tag{3.3}$$



Интегральные кривые уравнения Абеля:
Γ — гипербола $(2\beta-3z)(z-\beta)=1$; π_1 — асимптота $z=\beta$; π_2 — асимптота $2\beta/3$; l — кривая $z=\beta(1-\beta^2)^{-1}$; I — немонотонная интегральная кривая; II — монотонная интегральная кривая

Из (3.3) следует равенство для определения уравнения состояния

$$-a^2\rho^{-1} = (1+\beta z)^4 z^{-4}(\beta z^{-1} - 1 + \beta^2) \leqslant 0.$$

Таким образом, $\beta z^{-1} - 1 + \beta^2 \leqslant 0$.

Кривая $z = \beta(1-\beta^2)^{-1}$ (кривая l) разделяет интегральные кривые на физически допустимые и недопустимые для газа. Интегральные кривые типа I, при $z \to -\infty$ стремящиеся к прямой $\beta = E \leqslant 1$, соответствуют решениям, имеющим физический смысл: по этим кривым определяется уравнение состояния из параметрического уравнения

$$f_\rho = \rho^2 z^{-4}(1+\beta z)^4(1-\beta^2-\beta z^{-1}), \qquad \rho = \sigma U_0 z^2 (1+\beta z)^{-1} \exp\Big(\int \frac{dz}{\beta - z}\Big).$$

Поскольку выполнено неравенство $1+\beta z > 0$, должно выполняться соотношение $\sigma U_0 < 0$. В силу (3.3) величины U, s имеют один и тот же знак и $W^2 = -sUz\beta^{-1} > 0$.

Для имеющих физический смысл кривых типа I справедливо соотношение

$$C = C(E) < 0, \qquad 0 < E < 1.$$

Опишем поведение траекторий течения. Из (3.3) следует формула

$$s = -U_0\beta z \exp\Big(\int \frac{z^2\,d\beta}{\beta}\Big) = -U_0\beta z \exp\Big(\int \frac{dz}{\beta - z}\Big). \tag{3.4}$$

Так как $dr/dt = 1$, то траектория лежит на поверхности вращения кривой, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{dx}{dr} = U = -\frac{s}{\beta z}, \qquad s = \frac{x}{r}, \qquad r\,\frac{d\varphi}{dr} = \frac{s}{\beta}.$$

Следовательно,

$$-\frac{dr}{r} = z\,d\beta = \frac{\beta}{z(\beta - z)}\,dz. \tag{3.5}$$

При $\beta \to \infty$, $z \to -0$ имеем $z \simeq -\beta^{-1}(1 + C\beta^{-1})$, и из (3.5) следует $r \simeq K(\beta - C)$, $K > 0$ и $r \to \infty$ при $\beta \to \infty$. В силу (3.4) из этих соотношений получаем

$$x \simeq U_0 r\Big(1 + \frac{K(C+K)}{r+KC}\Big).$$

Эта функция монотонно возрастает и имеет асимптоту $x = U_0(r + KC + K^2)$. Таким образом, траектория течения представляет собой кривую на поверхности вращения, форма которой близка к форме конуса при $r \to \infty$. Так как $\varphi \simeq \varphi_0 - KU_0 r^{-1}$, то при $r \to \infty$ $\varphi \to \varphi_0$.

При $\beta \to E$, $z \to -\infty$ имеем $\beta \simeq E(1+(2z^2)^{-1})$, и из (3.5) следует $r \simeq N(1-Ez^{-1}) \to N$ при $z \to -\infty$, $N > 0$. В силу (3.4) из этих соотношений получаем

$$r \to N\colon \qquad x \simeq U_0 E^2 N.$$

Форма траектории течения близка к окружности. Такие траектории в виде окружностей образуют нелинейный источник. Угол поворота точки на траектории изменяется по закону $\varphi = \varphi_1 - ENU_0 r^{-1} \to \varphi_0 - U_0 E$.

Итак, траектории лежат на поверхности вращения кривой, исходящей из точки на поверхности нелинейного источника и приближающейся к асимптоте.

4. Почти одномерный поток с вращением. Пусть функция I линейна: $I = I_0 + I_1\rho$. В этом случае уравнение состояния является квадратичным: $p = p_0 + I_1\rho^2/2$. Уравнения конической модели (1.1) принимают вид ($\sigma = \pm 1$)

$$U^2 + V^2 + 2I_0 + \rho(2I_1 + \sigma(U - sV)) = 0, \qquad W^2 = \sigma\rho(U - sV),$$
$$sU' + V' = \sigma\rho, \qquad ((U - sV)^2 I_1^{-1}\rho^{-1} - 1)U' + sV' = V.$$

С учетом преобразований $U \to I_1 U$, $V \to I_1 V$, $\rho \to I_1\rho$, $I_0 \to I_1^2 I_0$ $\;I_1 = 1$, $2I_0 = -m^2$. Исключая ρ из полученных выше выражений, в полярных координатах плоскости годографа $U = q\cos\varphi$, $V = q\sin\varphi$ имеем

$$W^2 = \sigma q(\cos\varphi - s\sin\varphi)\rho, \qquad \rho = \frac{m^2 - q^2}{2 + \sigma q(\cos\varphi - s\sin\varphi)},$$
$$q'(s\cos\varphi + \sin\varphi) + q\varphi'(\cos\varphi - s\sin\varphi) = \sigma\rho,$$
$$(q^2(\cos\varphi - s\sin\varphi)^2\rho^{-1} - 1)(q'\cos\varphi - q\varphi'\sin\varphi) + s(q'\sin\varphi + q\varphi'\cos\varphi) = q\sin\varphi.$$

Моделируем почти одномерный поток растяжением: $r \to \varepsilon r$, $\varphi \to \varepsilon\varphi$, $V \to \varepsilon V$, где ε — малый параметр. Тогда

$$s \to \varepsilon^{-1}s, \quad W^2 = \sigma q(\cos(\varepsilon\varphi) - s\varepsilon^{-1}\sin(\varepsilon\varphi))\rho, \quad \rho^{-1} = \frac{2 + \sigma q(\cos(\varepsilon\varphi) - s\varepsilon^{-1}\sin(\varepsilon\varphi))}{m^2 - q^2},$$
$$q'(s\cos(\varepsilon\varphi) + \varepsilon\sin(\varepsilon\varphi)) + \varepsilon^2 q\varphi'(\cos(\varepsilon\varphi) - \varepsilon^{-1}\sin(\varepsilon\varphi)) = \sigma\rho,$$
$$(q^2(\cos(\varepsilon\varphi) - s\varepsilon^{-1}\sin(\varepsilon\varphi))^2\rho^{-1} - 1)(q'\cos(\varepsilon\varphi) - \varepsilon q\varphi'\sin(\varepsilon\varphi)) +$$
$$+ s(q'\varepsilon^{-1}\sin(\varepsilon\varphi) + q\varphi'\cos(\varepsilon\varphi)) = q\varepsilon^{-1}\sin(\varepsilon\varphi).$$

Нулевое приближение по малому параметру ε имеет вид

$$\begin{gathered} W^2 = \sigma q(1 - s\varphi)\rho, \quad \rho^{-1} = \frac{2 + \sigma q(1 - s\varphi)}{m^2 - q^2}, \quad U = q, \quad V = q\varphi, \\ sq' = \rho\sigma, \qquad (q^2(1 - s\varphi)^2\rho^{-1} - 1)q' + s(q'\varphi + q\varphi') = q\varphi. \end{gathered} \tag{4.1}$$

В переменных $\psi = s\varphi - 1$, $\tau = \ln s$ получаем автономную систему

$$q_\tau = \sigma\,\frac{m^2 - q^2}{2 - \sigma q\psi} = \rho\sigma, \quad q\psi_\tau = -\sigma q^2\psi^2 + 2q(\psi + 1) - \sigma\psi\,\frac{m^2 - q^2}{2 - \sigma q\psi}, \tag{4.2}$$

из которой следует уравнение

$$(m^2 - q^2)q\,\frac{d\psi}{dq} = -\sigma q^3\psi^3 - q^2\psi + 4q\sigma(\psi + 1) - m^2\psi - 4q^2\psi^2.$$

В общем случае в области $q \geqslant 0$ имеется четыре стационарные точки. Точка $q = \psi = 0$ представляет собой седло с сепаратрисами $q = 0$, $2\sigma q = m^2\psi$ (касательная сепаратрисы). При $q = \sigma m$ величина ψ удовлетворяет кубическому уравнению $m^2\psi^3 + 4m\psi^2 + 2(m - 2)\psi = 4$.

Пусть $m = -2$, тогда из (4.1) следует $\sigma = -1$, $\psi > 0$, $0 < q < 2$. При $q = 2$ на границе области $q \geqslant 0$ имеется еще одна стационарная точка $\psi = \psi_* \approx 2{,}83$ — седло с сепаратрисой $q = 2$. Другая сепаратриса имеет асимптотику $\psi \sim \psi_* - K(q - 2) = 2{,}83 - 1{,}26(q - 2)$. При $q \to 0$, $\psi \to \infty$ асимптотика интегральных кривых имеет вид

$$\psi = Cq^{-1} + C(C^2/4 - C - 1) + O(q).$$

Сепаратриса седла $\psi = \Psi(q)$, $q \in [0, 2)$, $\psi_* = \Psi(2)$, $\Psi(0) = \infty$ входит в стационарную точку при некотором значении параметра C. На сепаратрисе решение уравнений (4.2) имеет вид

$$s = s_0 \exp\Big(\int\limits_0^q \frac{2 + q\Psi(q)}{q^2 - 4}\,dq\Big), \qquad s\varphi = 1 + \Psi(q).$$

Гладкая аппроксимация сепаратрисы задается формулой

$$\Psi(q) \simeq \begin{cases} \psi_* - K(q-2), & q_1 < q < 2, \\ Cq^{-1} + C_1, & 0 < q < q_1, \end{cases}$$

где $q_1 \approx 1{,}96$; $C = Kq_1^2 \simeq 4{,}84$; $C_1 = C(C^2/4 - C - 1) \approx 0{,}1$.

Траектории движения частиц зададим параметрически по формулам

$$d\ln x = \frac{2 + q\Psi}{\Psi(4 - q^2)}\,dq, \qquad d\ln r = (1 + \Psi)\,d\ln x.$$

При $q \approx 2$ получаем ($2 - q = \delta$ — малая величина)

$$x \sim x_1 \delta^{-(1+\psi_*^{-1})/2}(1 + (1 - \psi_*^{-1} + 4K\psi_*^{-2})\delta/8),$$

$$r \sim r_1 \delta^{-\psi_*^{-1}(1+\psi_*)^2/2}\Big(1 + \Big(-\frac{1}{4}\,(2K-1) + \frac{1}{8}\,\psi_*^{-1} + \frac{1}{8}\,(4K+1)\psi_*^{-2}\Big)\delta\Big),$$

$$W \sim 4\psi_*\delta^{1/2}(1 + \delta(K\psi_*^{-1} - 5/8)).$$

Отсюда следует уравнение для траекторий при $x \to \infty$, которые лежат на поверхности вращения кривой, описываемой убывающей функцией

$$|x/x_1|^{-1{,}5} + 2{,}14\,|r/r_1|^{-0{,}4} = 2{,}66,$$

или

$$r/r_1 \sim 0{,}6(1 + 0{,}4|x/x_1|^{-3/2})$$

с малым вращением W при $\delta \to 0$.

При $q \approx 0$ получаем следующие асимптотические зависимости:

$$x \sim x_0\Big(1 + \frac{2 + C}{8C}\,q^2\Big), \quad r \sim r_0\Big(1 + \frac{2 + C}{4}\,q\Big), \quad W \sim 2\Big(\frac{C}{2 + C}\Big)^{1/2}\Big(1 + \frac{C_1(1 + C)}{C(2 + C)}\,q\Big).$$

Значит, траектории лежат на поверхности вращения параболы, при этом окружная компонента скорости $W \approx 1{,}7$.

Выбирая одну из поверхностей вращения в качестве стенки, получаем сужающийся канал, в котором вращение потока замедляется, на выходе стремясь к нулю.

5. Простая волна на пятимерной надалгебре. Рассмотрим пятимерную алгебру 5.3 из оптимальной системы [4], в базис которой в дополнение к рассматриваемым в п. **1** операторам входят операторы переносов по y и z в декартовой системе координат. В цилиндрической системе координат операторы переносов принимают вид

$$\partial_y = \cos\theta\,\partial_r - r^{-1}\sin\theta\,(\partial_\theta + W\,\partial_V - V\,\partial_W),$$

$$\partial_z = \sin\theta\,\partial_r - r^{-1}\cos\theta\,(\partial_\theta + W\,\partial_V - V\,\partial_W).$$

Базис дифференциальных инвариантов [5] алгебры 5.3 имеет вид

$$\rho, \quad p, \quad U, \quad Q, \quad J_0 = Y_0\vartheta, \quad J_1 = Y_1\vartheta, \quad J_2 = Y_2\vartheta + s\sin\vartheta, \quad J_3 = Y_3\vartheta - s\cos\vartheta,$$

где $Q = \sqrt{V^2 + W^2}$; $\operatorname{tg}\vartheta = W/V$; $Y_0 = xD_t$, $Y_1 = xD_x$, $Y_2 = x(\cos\vartheta D_r + r^{-1}\sin\vartheta D_\theta)$, $Y_3 = x(\sin\vartheta D_r - r^{-1}\cos\vartheta D_\theta)$ — операторы инвариантного дифференцирования; D_t, D_x, D_r, D_θ — операторы полного дифференцирования по независимым цилиндрическим координатам.

Операторы полного дифференцирования образуют алгебру над полем дифференциальных инвариантов, поскольку

$$[Y_0, Y_1] = -Y_0, \qquad [Y_0, Y_2] = -J_0Y_3, \qquad [Y_0, Y_3] = J_0Y_2,$$
$$[Y_1, Y_2] = Y_2 - J_1Y_3, \qquad [Y_1, Y_3] = Y_3 + J_1Y_2, \qquad [Y_2, Y_3] = J_2Y_2 + J_3Y_3.$$

Рассмотрим дифференциально-инвариантную подмодель ранга $1 + 0$, в случае когда все инварианты являются функциями одного параметра ρ (плотность ρ — функция общего вида). Эти решения, которые можно назвать простыми волнами для подалгебры 5.3, являются частично инвариантными решениями ранга 1 дефекта 2, если ρ, ϑ — функции общего вида, а функции p, U, Q зависят только от ρ.

Представление решения имеет вид

$$\begin{gathered} p = p(\rho), \qquad U = U(\rho), \qquad Q = Q(\rho), \qquad Y_0\vartheta = J_0(\rho), \qquad Y_1\vartheta = J_1(\rho), \\ Y_3\vartheta - s\cos\vartheta = J_3(\rho), \qquad Y_2\vartheta + s\sin\vartheta = J_2(\rho). \end{gathered} \tag{5.1}$$

Все остальные дифференциальные инварианты, полученные действием операторов инвариантного дифференцирования на инварианты меньшего порядка, также являются функциями ρ, например: $Y_i\rho = R_i(\rho)$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Условия совместности для представления решения получаются в результате действия коммутационных соотношений на величины ϑ, ρ:

$$R_0J_1' - R_1J_0' = -J_0, \quad R_0J_3' - R_3J_0' = J_0J_2, \quad R_0J_2' - R_2J_0' = -J_0J_3,$$
$$R_1J_2' - R_2J_1' = J_2 - J_1J_3, \quad R_1J_3' - R_3J_1' = J_3 + J_1J_2, \quad R_3J_2' - R_2J_3' = -J_2^2 - J_3^2,$$
$$R_0R_1' - R_1R_0' = -R_0, \quad R_0R_2' - R_2R_0' = -J_0R_3, \quad R_0R_3' - R_3R_0' = J_0R_2,$$
$$R_1R_2' - R_2R_1' = R_2 - J_1R_3, \quad R_1R_3' - R_3R_1' = R_3 + J_1R_2, \quad R_2R_3' - R_3R_2' = J_2R_2 + J_3R_3.$$

Эта переопределенная инволюционная система 12 дифференциальных уравнений для восьми функций имеет общее решение, зависящее от произвольных функций $\varphi(\rho)$, $\sigma(\rho)$ и одной постоянной D:

$$\begin{gathered} R_0 = (\varphi')^{-1}, \quad R_1 = -\varphi(\varphi')^{-1}, \quad R_2 = D(\varphi')^{-1}\cos\sigma, \quad R_3 = D(\varphi')^{-1}\sin\sigma, \\ J_0 = (\varphi')^{-1}\sigma', \quad J_1 = -\varphi(\varphi')^{-1}\sigma', \quad J_2 = D(\varphi')^{-1}\sigma'\cos\sigma, \quad J_3 = D(\varphi')^{-1}\sigma'\sin\sigma. \end{gathered} \tag{5.2}$$

Для любых функций $\sigma(\rho)$, $\varphi(\rho)$ система (5.2) определяет плотность ρ и угол наклона скорости ϑ:

$$\vartheta = \sigma(\rho) - \theta, \qquad \varphi(\rho) = x^{-1}(t + Dr\cos\theta). \tag{5.3}$$

Уравнения газовой динамики в дифференциальных инвариантах алгебры 5.3 имеют вид

$$\begin{gathered} Y_0U + UY_1U + QY_2U + \rho^{-1}Y_1p = 0, \qquad Y_0Q + UY_1 + QY_2Q + \rho^{-1}Y_2p = 0, \\ J_0 + UJ_1 + QJ_2 - Q^{-1}\rho^{-1}Y_3p = 0, \\ Y_0\rho + UY_1\rho + QY_2\rho + \rho(Y_1U + Y_2Q - QJ_3) = 0, \qquad Y_0S + UY_1S + QY_2S = 0. \end{gathered} \tag{5.4}$$

Подставляя в (5.4) представления (5.1), (5.2), получаем уравнения
$$mS' = 0, \qquad m + \rho(-\varphi U' + D(Q\cos\sigma)') = 0, \qquad \rho m U' = \varphi p',$$
$$\rho m Q' + Dp'\cos\sigma = 0, \qquad \rho m Q\sigma' = Dp'\sin\sigma,$$
где $m = 1 - U\varphi + DQ\cos\sigma$.

При $m = 0$ получаем изобарическую волну, описываемую соотношениями $p = p_0$, $U = 0$, $Q = -(D\cos\sigma)^{-1}$, причем σ, φ — произвольные функции ρ. Этот режим соответствует состоянию покоя с распределенной плотностью в равномерно движущейся системе координат.

При $m \neq 0$ получаем изоэнтропическую волну, описываемую соотношениями
$$S = S_0, \qquad \chi = K\operatorname{ctg}\sigma + D^{-1}, \qquad Q = K(\sin\sigma)^{-1}, \qquad \varphi = -DU'\chi'^{-1},$$
$$\chi^2 + U^2 = I^2 = 2\int\limits_{\rho}^{\rho_*}\frac{dp}{\rho} \quad (\rho_* > \rho), \qquad \chi'^2 + U'^2 = \rho^{-2}p', \quad p' = a^2.$$
Последнее уравнение интегрируется с помощью подстановки $\chi = I\sin n(\rho)$, $U = I\cos n(\rho)$. В результате получаем $n' = a\rho^{-1}I^{-1}\cos\lambda$, $\varphi = D\operatorname{tg}(n-\lambda)$, $\sin\lambda = -aI^{-1}$.

Мировые линии для изоэнтропической волны определяются уравнениями
$$\dot{x} = I\cos n(\rho), \qquad \dot{r} = K\cos(\sigma-\theta)(\sin\sigma)^{-1}, \qquad r\dot{\theta} = K\sin(\sigma-\theta)(\sin\sigma)^{-1}$$
или в силу (5.3) уравнениями в декартовых координатах
$$\dot{y} = I\sin n - D^{-1}, \qquad \dot{z} = K, \qquad \operatorname{tg}(n-\lambda) = x^{-1}(tD^{-1} + y).$$
Следовательно,
$$(n' - \lambda')\dot{\rho} = -x^{-1}I\sin\lambda\cos(n-\lambda).$$

Для траекторий течения получаем интегрируемые уравнения с параметром ρ
$$\frac{dx}{d\rho} = x\,\frac{(n'-\lambda')\cos n}{\sin\lambda\cos(n-\lambda)}, \qquad \frac{dy}{d\rho} = x\,\frac{(n'-\lambda')(I\sin n - D^{-1})}{I\sin\lambda\cos(n-\lambda)},$$
$$\frac{dz}{d\rho} = \frac{xK(n'-\lambda')}{I\sin\lambda\cos(n-\lambda)}. \qquad (5.5)$$

В случае линейного уравнения состояния $p = a_0^2\rho + p_0$ имеем выражения для основных величин
$$a = a_0, \qquad I^2 = 2a_0^2\ln(\rho_*/\rho), \qquad \sin\lambda = -\big(2\ln(\rho_*/\rho)\big)^{-1/2}.$$
Следовательно,
$$\rho < \exp(-1/2)\rho_* = \rho_1.$$

Рассмотрим поведение траекторий при $\rho_1 - \rho = \delta \to 0$. В этом случае
$$\sin\lambda \sim -1 + \rho_1^{-1}\delta, \qquad \lambda \sim -\pi/2 + \rho_1^{-1/2}\delta^{1/2}, \qquad I \sim a_0(1 + \rho_1^{-1}\delta).$$
Так как $n \sim n_0 - (2/3)\rho_1^{-3/2}\delta^{3/2}$, то $n'_\rho \sim \rho_1^{-3/2}\delta^{1/2}$ (n_0 — постоянная).

Из (5.5) получаем приближенные уравнения траекторий
$$x \sim x_0(1 + 2\rho_1^{-1/2}\delta^{1/2}), \qquad y \sim y_0 + 2x_0(1 - (Da_0\sin n_0)^{-1})\rho_1^{-1/2}\delta^{1/2},$$
$$z \sim z_0 + 2x_0Ka_0^{-1}\rho_1^{-1/2}\delta^{1/2}.$$
Следовательно, при $\rho \to \rho_1$ траектории стремятся к прямой.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Лекции по газовой динамике. М.: Наука, 1981.
2. **Кочин Н. Е.** Теоретическая гидромеханика / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. Т. 2.
3. **Хабиров С. В.** Аналитические методы в газовой динамике. Уфа: Гилем, 2003.
4. **Овсянников Л. В.** Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
5. **Хабиров С. В.** Классификация дифференциально-инвариантных подмоделей // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 682–701.

Поступила в редакцию 24/X 2011 г.