

ЛИТЕРАТУРА

1. Лэмб Г. Гидродинамика. — М.; Л.: Гостехиздат, 1947.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986.
3. Haussling H. J., Coleman R. M. Nonlinear water waves generated by an accelerated circular cylinder // J. Fluid Mech.— 1979.— V. 92, pt 4.
4. Дейли Дж., Харлеман Д. Механика жидкости. — М.: Энергия, 1971.
5. Salvesen N. On higher-order wave theory for submerged two-dimensional bodies // J. Fluid Mech.— 1969.— V. 38, pt 2.
6. Букреев В. И., Гусев А. В., Стурова И. В. Неуставившееся движение круглого цилиндра в двухслойной жидкости // ПМТФ.— 1983.— № 6.

Поступила 8/IV 1987 г.

УДК 532.59 + 532.13

ВЯЗКОЕ ЗАТУХАНИЕ УЕДИНЕННЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

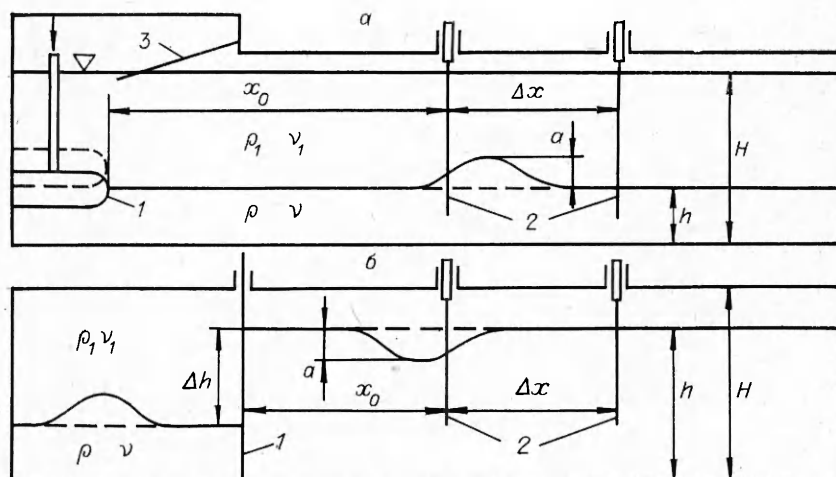
Н. В. Газрилов
(Новосибирск)

Цель работы — экспериментальное исследование затухания уединенных внутренних волн на границе раздела двух жидкостей разной плотности, обусловленное влиянием вязкости. Теоретический анализ этой задачи выполнен в [1], где результаты [2] обобщаются на случай двухслойной жидкости под крышкой. Движение со свободной поверхностью рассмотрено в [3]. Подобная [3] задача исследуется в [4] численным решением модельного интегродифференциального уравнения. Экспериментально затухание уединенных внутренних волн в двухслойной жидкости изучалось в [1, 5]. Следует отметить, что опыты в [1] проводились на границе раздела несмешивающихся жидкостей со свободной поверхностью, хотя теоретический анализ выполнен для случая под крышкой. В работе [5], с экспериментальными данными которой сравниваются результаты анализа [3], опыты проводились со смешивающимися жидкостями, в то время как в [3] учитывается трение на границе раздела, которого не было в [5]. В настоящей работе эксперименты проводились с несмешивающимися жидкостями как со свободной поверхностью, так и под крышкой. Выполнялось сравнение со всеми теоретическими моделями.

Опыты ставились на трех различных установках, схемы которых приведены на рис. 1. Одна представляла собой открытый канал (рис. 1, а) длиной 220, шириной 17,5 и высотой 15 см, две другие — заглушенные по торцам трубы сечением 6×6 и 20×6 см, длиной 390 см (рис. 1, б), h — глубина нижней жидкости, H — общая глубина слоев, a — амплитуда волны. В качестве нижней жидкости использовался слабый раствор поваренной соли в дистиллированной воде плотностью $\rho = 1$ г/см³ и вязкостью $\nu = 0,0108$ см²/с. Для верхнего слоя брались либо керосин с $\rho_1 = 0,8$ г/см³, $\nu_1 = 0,0162$ см²/с, либо смесь керосина с хладоном-113 с $\rho_1 = 0,9$ г/см³, $\nu_1 = 0,0141$ см²/с (плотность и вязкость чистого хладона-113 соответственно 1,58 г/см³ и 0,0044 см²/с).

Генерация волн осуществлялась двумя способами. В одном случае у торцевой стенки канала располагалась пластина 1 (рис. 1, а), которая могла перемещаться по вертикали. При ее движении вниз или вверх от нее распространялась уединенная волна в виде бугра или ямы (на рис. 1, а приведен пример генерации бугра). При проведении опытов со свободной поверхностью устанавливался волногаситель 3, необходимый для ослабления колебаний, вызванных движением волнопродуктора (особенно при генерации волн в виде ямы). Другой способ заключался в следующем: часть канала длиной 60 см была отделена непроницаемой перегородкой 1 (рис. 1, б), на которой создавался перепад уровней Δh . При кратковременном подъеме перегородки по одну сторону от нее распространяется уединенная волна в виде ямы, а по другую — в виде бугра.

Волны регистрировались датчиками электропроводности 2 [6], которые располагались вдоль канала на расстоянии Δx один от другого. Первый датчик устанавливался на расстоянии x_0 от волнопродуктора, достаточном для того, чтобы уединенная волна успевала полностью сформироваться, а нежелательные коротковолновые колебания границы раз-



Р и с. 1

дела, возникающие при генерации волны, — затухнуть. Погрешность измерения волн амплитудой 0,5 мм не превышала 5 % и уменьшалась при увеличении амплитуды.

Прежде чем перейти к изложению полученных экспериментальных данных, необходимо сделать ряд замечаний, относящихся к проверяемым теоретическим моделям. Работы [1, 3] дают для затухания уединенных внутренних волн одну и ту же зависимость от пройденного расстояния:

$$(1) \quad a(x) = a_0(x_0) [1 + K a_0^{1/4} (x - x_0)]^{-1},$$

но разные соотношения для коэффициента K .

Как уже упоминалось выше, в [1] теоретический анализ выполнен для несмешивающихся жидкостей под крышкой и получено для K выражение

$$(2) \quad K_1 = A_1 \left[\left(1 + \frac{2h}{B}\right) \frac{H-h}{h} + \beta_1 \frac{H^2}{h(H-h)} + \gamma_1 \frac{2h}{B} \right],$$

в котором три слагаемых в квадратных скобках описывают соответственно потери в нижней жидкости (на дне и стенках), на границе раздела (снизу и сверху) и в верхней жидкости (на стенках); B — ширина канала; параметры A_1 , β_1 и γ_1 определены в [1]. Трение на границе раздела снизу принималось равным трению на дне, а сверху — трению о крышку.

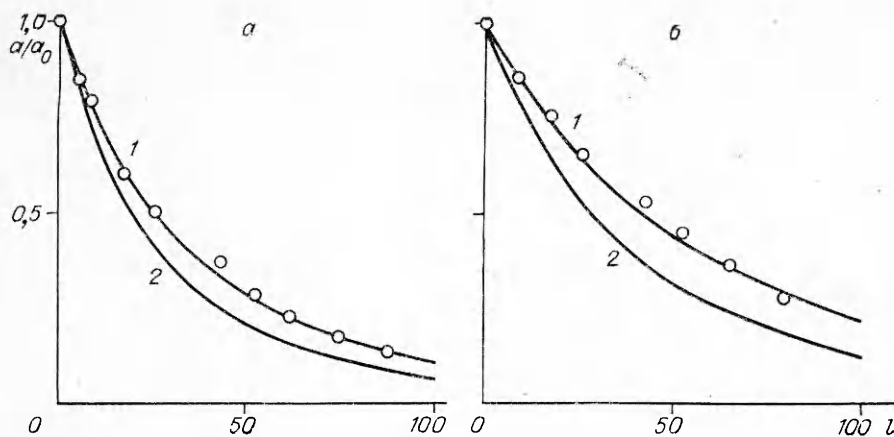
Хотя в (2) трение о предполагаемую крышку в последнем слагаемом и опущено, надо иметь в виду, что параметры A_1 , β_1 и γ_1 выведены с ее учетом. Поэтому сравнение расчетов и опытов в [1] не совсем корректно, так как экспериментальная проверка этой модели проводилась в канале со свободной поверхностью.

В [3] анализ выполнен для несмешивающихся жидкостей со свободной поверхностью. Здесь трение на границе раздела учтено более строго и для K получено выражение

$$(3) \quad K_2 = A_2 \left[\alpha_2 \left(1 + \frac{2h}{B}\right) \frac{H-h}{h} + \beta_2 \frac{H^2}{h(H-h)} + \gamma_2 \frac{2h}{B} \right].$$

Слагаемые в квадратных скобках имеют такой же смысл, как и в (2) (A_2 , α_2 , β_2 и γ_2 определены в [3]). Опытные данные, с которыми сравнивались результаты [3], получены в экспериментах со смешивающимися жидкостями [5], когда трение на границе отсутствовало. Этим, по-видимому, и объясняется более медленное затухание волн в опытах, чем при расчетах.

В настоящей работе использовались несмешивающиеся жидкости и опыты проводились как со свободной поверхностью, так и под крышкой.



Р и с. 2

Поэтому (2) и (3) дополнены уравнениями

$$(4) \quad K_3 = A_1 \left[\left(1 + \frac{2h}{B} \right) \frac{H-h}{h} + \beta_1 \frac{H^2}{h(H-h)} + \gamma_1 \left(1 + \frac{2(H-h)}{B} \right) \frac{h}{H-h} \right];$$

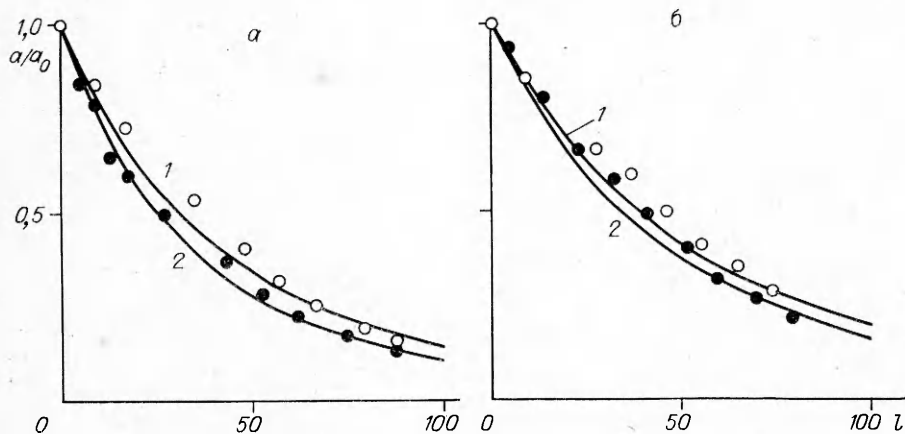
$$(5) \quad K_4 = A_2 \left[\alpha_2 \left(1 + \frac{2h}{B} \right) \frac{H-h}{h} + \beta_2 \frac{H^2}{h(H-h)} + \gamma_2 \left(1 + \frac{2(H-h)}{B} \right) \frac{h}{H-h} \right],$$

в которых в последнем слагаемом добавлено трение на крышке. При проведении расчетов со свободной поверхностью необходимо пользоваться (2) и (3).

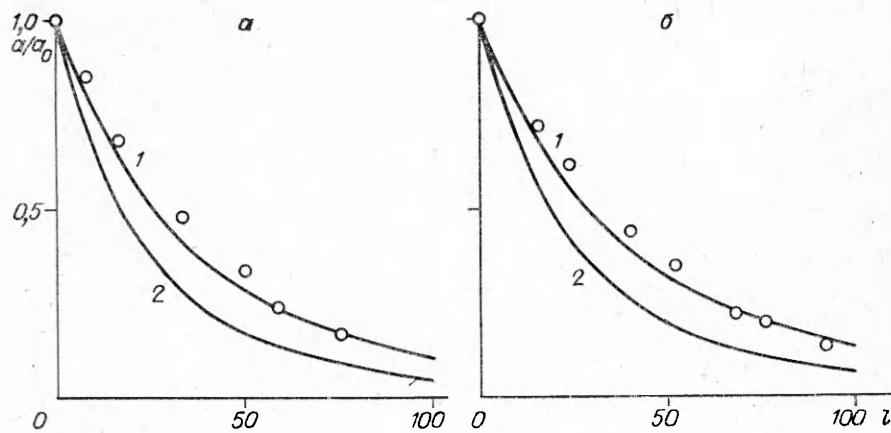
Как показано ниже, модель [1] не дает удовлетворительного согласования с опытными данными, а расчеты по модели [3] достаточно хорошо с ними совпадают. Расчет, выполненный на ЭВМ по модели [4] Г. А. Хабахпашевым по данным одного из опытов, дал близкие [3] результаты.

На рис. 2—5 приведено сопоставление теоретических расчетов с экспериментальными данными о затухании амплитуды уединенных внутренних волн и эволюции их формы. Следует отметить, что часть опытных данных относится к волнам, отразившимся от торцовых стенок экспериментальной установки. На рис. 2—4 по оси абсцисс отложено пройденное волной расстояние $l = (x - x_0)/H$, а по оси ординат — амплитуда волны, отнесенная к амплитуде в точке x_0 . Для всех рисунков (кроме рис. 3, б) $\rho_1 = 0,8 \text{ г/см}^3$ и $\nu_1 = 0,0162 \text{ см}^2/\text{с}$, $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ и $\nu = 0,0108 \text{ см}^2/\text{с}$.

На рис. 2 представлены данные о затухании уединенных волн в виде бугра (а) и ямы (б) в опытах со свободной поверхностью, линии 1 и 2 — расчет по формулам (1), (3) и (1), (2), точки — экспериментальные



Р и с. 3



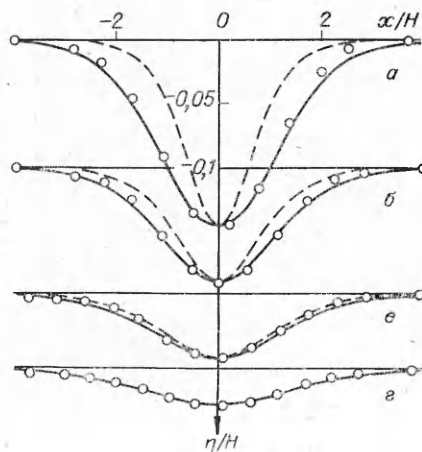
Р и с. 4

данные, $H = 5,7$ см, $B = 6$ см, $x_0 = 160$ см. Для рис. 2, а $h = 1,45$ см, $a_0 = 0,51$ см, а для рис. 2, б $h = 4,25$ см, $a_0 = -0,615$ см. Видно, что затухание волны в виде ямы происходит медленнее, так как меньше вклад от трения о дно канала.

Рис. 3 иллюстрирует, как меняется затухание волны в виде бугра в зависимости от ширины канала (а) и волны в виде ямы при разных плотностях верхней жидкости (б), линии — расчет по формулам (1), (3), точки — опытные данные, $H = 5,7$ см. На рис. 3, а кривая 1 и светлые точки получены при $h = 1,45$ см, $B = 17,5$ см, $x_0 = 250$ см, $a_0 = 0,53$ см, а 2 и темные точки — соответственно при 1,45; 6; 160; 0,51 см. На рис. 3, б кривая 1 и светлые точки получены при $B = 6$ см, $h = 4,25$ см, $x_0 = 260$ см, $a_0 = -0,51$ см, $\rho_1 = 0,8$ г/см³, $\nu_1 = 0,0162$ см²/с, а кривая 2 и темные точки — соответственно при 6; 4,25; 210; $-0,64$ см, $0,9$ г/см³, $0,0141$ см²/с.

На рис. 4 приведено затухание уединенных внутренних волн в виде ямы в опытах под крышкой, линии 1 и 2 — расчет по формулам (1), (5) и (1), (4), точки — экспериментальные данные, $H = 6$ см, $h = 4,5$ см. Для рис. 4, а $x_0 = 210$ см, $a_0 = -0,59$ см, $B = 6$ см, а для рис. 4, б 48; $-0,88$; 20 см. Необходимо отметить, что параметры A_2 , α_2 , β_2 и γ_2 в модели [3] получены при наличии свободной поверхности и поэтому применение формулы (5) не совсем корректно. Но тем не менее видно достаточно хорошее согласование расчетных и опытных данных.

Рис. 5 иллюстрирует эволюцию профиля одной и той же уединенной волны в виде ямы на расстоянии 48; 192; 352 и 504 см от волнопродуктора в опытах под крышкой (а—г), остальные параметры такие же, как и на рис. 4, б. Здесь по оси абсцисс отложена горизонтальная координата x , а по оси ординат — отклонение границы раздела от положения равновесия η , нормированные на глубину жидкостей H , сплошные линии — расчет профиля волны по модели [7], штриховые — по [1], точки — опытные данные. При проведении теоретических расчетов профиля волны брались экспериментальные значения амплитуды волны. Видно, что [1] хорошо описывает только волны малой амплитуды, в то время как [7] справедлива для любых волн.



Р и с. 5

Расчеты, выполненные по модели [5], дают близкие [4] результаты. Автор благодарит В. И. Букреева и Г. А. Хабахпашева за полезное обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Koop C. G., Butler G. An investigation of internal solitary waves in a two-fluid system // J. Fluid Mech.— 1981.— V. 112.
2. Keulegan G. H. Gradual damping of solitary waves // J. Res. Nat. Bur. Stand.— 1948.— V. 40, N 6.
3. Leone C., Segur H., Hammack J. L. Viscous decay of long internal solitary waves // Phys. Fluids.— 1982.— V. 25, N 6.
4. Хабахпашев Г. А. Влияние вязкости на эволюцию возмущений свободной поверхности и границы раздела двухслойной жидкости // Гидродинамика и тепломассообмен течений жидкости со свободной поверхностью.— Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1985.
5. Segur H., Hammack J. L. Soliton models of long internal waves // J. Fluid Mech.— 1982.— V. 118.
6. Букреев В. И., Гаврилов Н. В., Знобищев К. Р. Экспериментальное исследование волн в двухслойной жидкости со сдвигом скорости между слоями // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1984.— Вып. 64.
7. Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн.— Новосибирск: Наука, 1985.

Поступила 24/IV 1987 г.

УДК 532.516

О ВЕТВЛЕНИИ СТАЦИОНАРНО БЕГУЩИХ ВОЛНОВЫХ РЕЖИМОВ ВЯЗКОЙ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ

Ю. Я. Трифионов, О. Ю. Цвелодуб

(Новосибирск)

В [4] получена модельная система уравнений, описывающая поведение длинноволновых возмущений на вертикально стекающей пленке жидкости при умеренных расходах:

$$(1) \quad \frac{\partial q}{\partial t} + 1,2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right) = - \frac{3\nu q}{h^2} + g\dot{h} + \frac{\sigma}{\rho} h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

Здесь q — мгновенный расход жидкости в сечении x ; h — мгновенная толщина пленки; g — ускорение свободного падения; σ — коэффициент поверхностного натяжения; ν — коэффициент кинематической вязкости; ρ — плотность жидкости. Как показано в [2—4], она имеет два семейства решений в виде стационарно бегущих волн $h = h_0(\xi)$, $q = q_0(\xi)$, $\xi = x - ct$, количественно хорошо согласующихся с экспериментом [5] (c — фазовая скорость волны). Так как в эксперименте волны, близкие к стационарным, наблюдаются лишь на начальном ограниченном участке течения, а в дальнейшем развиваются и разваливаются, то для понимания этой эволюции течения необходимо исследовать вопрос об устойчивости и бифуркациях полученных решений системы (1).

Впервые устойчивость первого семейства волн (ответвляется от плоскопараллельного течения) изучалась в [6] при $Re \geq 30$. В [7] рассматривалась устойчивость слабо-нелинейных решений уравнения, описывающего волновые режимы при $Re \leq 1$. В [8, 9] систематично исследована устойчивость обоих семейств, а в [10] — бифуркация удвоения периода первого семейства волн. В данной работе проведен более общий бифуркационный анализ волн этого семейства и изучены новые семейства стационарных волн, сформировавшиеся в процессе нелинейного развития неустойчивых возмущений. Так как метод, изложенный в [8, 9], наряду с исследованием устойчивости позволяет проводить и бифуркационный анализ, то необходимо воспроизвести основные моменты из постановки задачи по устойчивости.

Предварительно обезразмеривая систему (1) аналогично [3, 4] и подставляя в нее

$$(2) \quad h(\xi, t) = h_0(\xi) + h'(\xi, t), \quad q(\xi, t) = q_0(\xi) + q'(\xi, t),$$

после линеаризации для исследования устойчивости решений $h_0(\xi)$, $q_0(\xi)$ получаем систему линейных уравнений в частных производных с перио-