

УДК 533.6.011

К ГИПОТЕЗЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНОСТИ ПРИ ИСТЕЧЕНИИ ГАЗА ИЗ РЕСИВЕРА

В. А. Архипов, А. П. Березиков, В. Ф. Трофимов

Научно-исследовательский институт прикладной математики и механики
при Томском государственном университете, 634050 Томск

Рассмотрен полуэмпирический метод определения времени установления квазистационарного режима истечения газа из ресивера при внезапном вскрытии сопла, а также зависимости реального расхода от времени на стадии переходного процесса. Численное решение уравнений газодинамики истечения в двумерной постановке и результаты модельных экспериментов показали возможность использования метода для оценки условий применимости гипотезы квазистационарности, а также для определения с контролируемой точностью коэффициента расхода сопла.

Ключевые слова: ресивер, расход, квазистационарный режим.

Одним из центральных допущений при математическом моделировании переходных процессов в полузамкнутом объеме в рамках термодинамического (нульмерного) подхода является гипотеза квазистационарности истечения [1]. Согласно этой гипотезе при сколь угодно быстром изменении определяющих параметров (например, площади критического сечения сопла $F_{кр}$) массовый секундный расход газа через сопло соответствует мгновенным значениям этих параметров и определяется квазистационарной зависимостью от времени, которая для сверхкритического режима истечения имеет вид

$$G_{кст}(t) = \varphi_0 p(t) F_{кр}(t) \Gamma(k) / \sqrt{\chi R T(t)}, \quad (1)$$

где $p(t)$, $T(t)$ — текущие значения давления и температуры торможения в ресивере (осредненные по его свободному объему V); $\Gamma(k) = \sqrt{k} (2/(k+1))^{(k+1)/(2(k-1))}$; k — показатель адиабаты; χ — коэффициент тепловых потерь (в дальнейшем полагается $\chi = 1$, т. е. стенки ресивера теплоизолированы); R — газовая постоянная продуктов истечения; φ_0 — коэффициент расхода сопла.

Физический смысл гипотезы состоит в том, что скорость распространения возмущений по потоку значительно превосходит скорость изменения параметров в любой его точке. Использование этой гипотезы существенно упрощает постановку и интерпретацию результатов задач теоретического и экспериментального исследования переходных процессов в различных технических устройствах. Однако практическая значимость гипотезы определяется тщательным обоснованием условий и границ ее применимости. Наиболее подробно эти вопросы исследованы применительно к ударному запуску сопел и к процессам в импульсных аэродинамических трубах [2–7]. В большинстве работ использовались методы численного расчета одно- или двумерного нестационарного течения, возникающего при внезапном разрыве мембраны, отделяющей ресивер от сопла или от окружающей атмосферы. Начальная стадия процесса истечения из мгновенно вскрываемого сопла сопровождается сложными волновыми явлениями, подробный анализ которых проведен в [6]. С течением времени нестационарные возмущения затухают, что в конечном счете обеспечивает установление квазистационарного режима истечения.

Отметим, что в указанных работах расчеты проводились для конкретных значений режимных и геометрических параметров задачи, полученные в них времена установления квазистационарности истечения относятся к рассмотренным условиям. Вопросы сравнения нестационарного и квазистационарного подходов наиболее полно отражены в [5, 7]. В [7] получена оценка разности давлений в ресивере, рассчитанных в обеих постановках при истечении из цилиндрического ресивера с площадью поперечного сечения F_k через сопло с площадью критического сечения $F_{кр}$, установленное в одной из торцевых стенок ресивера. Для малых значений параметра $\alpha = F_{кр}/F_k$

$$\varepsilon_P = \frac{p_{нст} - p_{кст}}{p_{кст}} = \left[1 + \beta_1 \frac{\alpha^2 \bar{t}}{1 + \beta_2^2 \bar{t}} \right]^{-2k/(k-1)} - 1,$$

где $\beta_1 = \frac{(k+1)(k-1)}{4} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{3(k+1)/(2(k-1))}$; $\beta_2 = \frac{k-1}{2} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{(k+1)/(2(k-1))}$; $\bar{t} = t/B$; $B = V/(a_0 F_{кр})$; a_0 — скорость звука, рассчитанная по начальным значениям параметров газа в ресивере.

В работе [7] на основе численных расчетов одномерного нестационарного течения в импульсной аэродинамической трубе проведен анализ условий применимости гипотезы квазистационарности в зависимости от геометрии сопла. Показано, что процесс запуска сопла включает прохождение первой волны разрежения в камере за время t_1 и системы ударных волн в сопле за время t_2 . Продолжительность запуска определяется по большему из времен (t_1 или t_2). Для приближенной оценки времени запуска сопла t_c предложено использовать следующие выражения:

$$t_1 = 2L_k/a_0, \quad t_2 = 2L_c/a_0,$$

где L_k , L_c — длина камеры и сопла соответственно.

Оценки по приведенным выше формулам показывают, что время установления квазистационарного течения $t \approx 10^{-2} \div 10^{-4}$ с, т. е. для большинства практических задач, связанных с изучением переходных процессов, применимость гипотезы квазистационарности можно считать обоснованной.

Однако в ряде случаев необходимо учитывать нестационарность истечения, когда характерные времена внутрикамерных процессов сравнимы с t_c . В качестве примера можно привести задачи, связанные с нестационарным горением газов или конденсированных веществ в полузамкнутом объеме, когда характерные времена химических реакций достаточно малы [8]. При этом необходимо знать как время установления квазистационарного режима истечения, так и закономерности изменения расхода от времени в переходных процессах (например, при сбросе давления в ракетном двигателе). Численные расчеты подобных задач должны проводиться, как правило, в двумерной постановке с учетом конкретной геометрии с достаточно мелкой сеткой.

В настоящей работе рассмотрен полуэмпирический метод определения времени установления квазистационарного режима истечения газа из ресивера при внезапном вскрытии сопла, а также реального расхода $G(t)$ на стадии переходного процесса. Кроме того, данный метод позволяет определить с контролируемой точностью коэффициент расхода сопла. Метод основан на измерении зависимости давления от времени $p(t)$ при адиабатическом опорожнении ресивера через сопло.

Система уравнений в осредненных по объему ресивера переменных имеет вид

$$V \frac{d\rho}{dt} = -G, \quad \frac{p}{\rho^k} = \text{const}, \quad p = \rho RT, \quad (2)$$

где ρ — плотность газа в ресивере.

Начальные условия: $G = 0$; $p = p_0$; $T = T_0$.

Обозначим через $g(t)$ отношение реального расхода к квазистационарному, определяемому формулой (1):

$$g(t) = G(t)/G_{\text{кст}}(t).$$

В процессе истечения величина $g(t)$ будет изменяться и достигнет значения $g(t) = 1$ при установлении квазистационарного режима. Первое уравнение системы (2) примет вид

$$V \frac{d\rho}{dt} = -\varphi_0 g p F_{\text{кр}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{RT}}. \quad (3)$$

Величина $\varphi(t) \equiv \varphi_0 g(t)$ при установлении квазистационарного режима истечения будет равна коэффициенту расхода сопла φ_0 . При адиабатическом опорожнении полужамкнутого объема через сопло уравнение (3) с учетом (2) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{p_0} \right) = -\varphi \frac{k}{t_{\text{к}}} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{(3k-1)/(2k)},$$

где $t_{\text{к}} = V/(F_{\text{кр}}\Gamma(k)\sqrt{RT_0})$ — характерное время истечения. Из этого уравнения следует выражение для определения $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = -\frac{t_{\text{к}}}{k} \left(\frac{p(t)}{p_0} \right)^{(1-3k)/(2k)} \frac{d}{dt} \left(\frac{p(t)}{p_0} \right), \quad (4)$$

где $p(t)$ — экспериментально измеренная зависимость давления в ресивере от времени.

Представим (4) в виде

$$\varphi(t) = \frac{d}{dt} f(t),$$

где

$$f(t) = \frac{2}{k-1} t_{\text{к}} \left[\left(\frac{p_0}{p(t)} \right)^{(k-1)/(2k)} - 1 \right]. \quad (5)$$

Задача определения $\varphi(t)$ сводится к нахождению производной от экспериментальной функции (5). Как известно, численное дифференцирование экспериментальных функций является некорректной задачей, и для ее решения необходимо предварительное сглаживание. Обычно для этого применяется либо сглаживающий сплайн, либо функция, вид которой выбирается из априорной информации о свойствах решения задачи, а неизвестные параметры подбираются методом наименьших квадратов. Для определения вида функциональной зависимости $\varphi(t)$ дополним систему (2) уравнением

$$\frac{dG(t)}{dt} = -\frac{G(t) - G_{\text{кст}}(t)}{t_{\text{с}}}, \quad (6)$$

где $t_{\text{с}}$ — характерное время установления квазистационарного режима истечения.

Введем безразмерные переменные

$$\tau = t/t_{\text{к}}, \quad x = p/p_0, \quad y = G/G_0,$$

где G_0 определяется в соответствии с формулой (1): $G_0 = \varphi_0 p_0 F_{\text{кр}} \Gamma(k) / \sqrt{RT_0}$. В безразмерном виде система (2) с учетом (6) сводится к следующему виду:

$$\frac{dx}{d\tau} = -kx^{(k-1)/k}y, \quad \varepsilon \frac{dy}{d\tau} = x - x^{(k-1)/(2k)}y, \quad (7)$$

где $\varepsilon = t_{\text{с}}/t_{\text{к}}$ — малый параметр.

Начальные условия: $x(0) = 1$; $y(0) = y^0$.

Система (7) является сингулярно возмущенной. Для ее решения используем метод составных разложений пограничных функций [9], при этом решение имеет вид

$$x(\tau, \varepsilon) = X(\tau, \varepsilon) + u(\xi, \varepsilon), \quad y(\tau, \varepsilon) = Y(\tau, \varepsilon) + v(\xi, \varepsilon),$$

где $\xi = \tau/\varepsilon = t/t_c$; X, Y — внешнее решение; u, v — внутреннее решение. Асимптотические разложения для X, Y, u, v ищутся в виде рядов

$$\begin{aligned} X(\tau, \varepsilon) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n X_n(\tau), & Y(\tau, \varepsilon) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n Y_n(\tau), \\ u(\xi, \varepsilon) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(\xi), & v(\xi, \varepsilon) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n v_n(\xi). \end{aligned}$$

При отыскании решения ограничимся главным членом асимптотического разложения для X, Y и двумя первыми слагаемыми асимптотических рядов для u и v . При этом регулярная часть решения (соответствующая квазистационарному режиму) запишется в виде

$$X_0 = (1 + (k-1)\tau/2)^{-2k/(k-1)}, \quad Y_0 = (1 + (k-1)\tau/2)^{-(k+1)/(k-1)},$$

а внутреннее решение — в виде

$$u(\xi, \varepsilon) = u_0 + u_1\varepsilon = \varepsilon k(1 - y^0)(1 - e^{-\xi}), \quad v(\xi, \varepsilon) = v_0 + v_1\varepsilon = -(1 - y^0)e^{-\xi}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} x(\tau, \varepsilon) &= (1 + (k-1)\tau/2)^{-2k/(k-1)} + \varepsilon k(1 - y^0)(1 - e^{-\tau/\varepsilon}), \\ y(\tau, \varepsilon) &= (1 + (k-1)\tau/2)^{-(k+1)/(k-1)} - (1 - y^0)e^{-\tau/\varepsilon}. \end{aligned} \quad (8)$$

В размерном виде второе уравнение системы (8) при $y^0 = 0$ (внезапное вскрытие сопла) имеет вид

$$G(t) = G_0 \left[\left(1 + \frac{k-1}{2} \frac{t}{t_k} \right)^{-(k+1)/(k-1)} - e^{-t/t_c} \right],$$

а функцию $\varphi(t)$ можно представить в виде

$$\varphi(t) = \varphi_0 \left[1 - \left(1 + \frac{k-1}{2} \frac{t}{t_k} \right)^{(k+1)/(k-1)} e^{-t/t_c} \right].$$

Процесс установления квазистационарного режима истечения происходит в течение характерного времени t_c , поэтому (с учетом $t_c \ll t_k$)

$$\varphi(t) = \varphi_0 [1 - e^{-t/t_c}]. \quad (9)$$

Предполагается, что в момент открытия сопла расход газа равен нулю $\varphi(0) = 0$. В дальнейшем коэффициент расхода монотонно возрастает до своего стационарного значения φ_0 с характерным временем t_c . Отметим, что при $\varphi_0 = \text{const}$ и адиабатичности истечения функция $f(t)$ линейна. Аппроксимация (9) для $\varphi(t)$ означает, что экспериментальная зависимость $f(t)$ аппроксимируется функцией

$$f(t) = \int_0^t \varphi(t) dt = \varphi_0 \{t - t_c [1 - e^{-t/t_c}]\}. \quad (10)$$

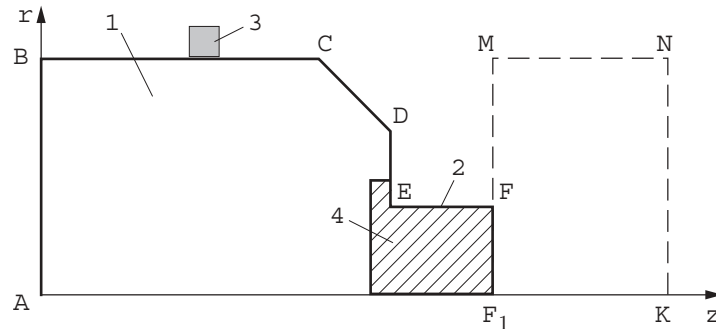


Рис. 1. Схема экспериментальной установки и расчетной области:
1 — ресивер; 2 — сопло; 3 — датчик давления; 4 — сгорающая пробка

Для нахождения φ_0 и t_c используется метод наименьших квадратов, при этом минимизируется функционал

$$S = \sum_{i=1}^n [f_i - \varphi_0 \{t_i - t_c [1 - e^{-t/t_c}]\}]^2,$$

где $f(t_i)$ рассчитаны по формуле (10) для измеренных значений p_i . Зависимость (10) нелинейна относительно параметра t_c , поэтому итерации по этому параметру проводились до сходимости.

При $t_c \ll t_k$ функция $f(t)$ аппроксимируется прямой линией, что позволяет упростить процедуру нахождения коэффициента расхода. Для этого достаточно воспользоваться двумя точками на кривой сброса давления — в начале (t_1, p_1) и в конце (t_2, p_2) процесса. При линейной зависимости $f(t)$ тангенс угла наклона ее графика находится как первая разность:

$$\varphi_0 = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{t_k}{t_2 - t_1} \frac{2}{k-1} \left[\left(\frac{p_0}{p_2} \right)^{(k-1)/(2k)} - \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{(k-1)/(2k)} \right].$$

Точность определения φ_0 , t_c рассматриваемым методом зависит от погрешности измерения исходных параметров (давления в ресивере) и погрешности аппроксимации производной конечной разностью. Можно показать, что относительная погрешность определения коэффициента расхода $\delta\varphi_0$ связана с абсолютной погрешностью измерения давления Δp следующей формулой:

$$\delta\varphi_0 \approx \max \left(\frac{k-1}{2k} \frac{\Delta p}{p_2}, \left| 2 \frac{f_1 - 2\langle f \rangle + f_2}{f_2 - f_1} \right| \right),$$

где f_1 , $\langle f \rangle$, f_2 определены для моментов времени t_1 , $\langle t \rangle = (t_1 + t_2)/2$ и t_2 . При выборе значения $p_2 = (k-1)p_0/(2k)$ относительная погрешность измерения коэффициента расхода $\delta\varphi_0$ совпадает с относительной погрешностью измерения давления δp_0 , что, по-видимому, следует считать оптимальным. Поскольку величина t_c определяется по точке перегиба кривой $f(t)$, погрешность определения характерного времени t_c также соответствует погрешности измерения давления. При использовании штатных датчиков, например серии ЛХ, погрешность определения t_c не превышает 5–10 %.

Проверка вида полученной зависимости (9) проводилась численно. Рассматривалось нестационарное осесимметричное течение вязкого нетеплопроводного газа с постоянными теплоемкостями в расчетной области экспериментальной установки (рис. 1) после внезапного вскрытия сечения FF_1 .

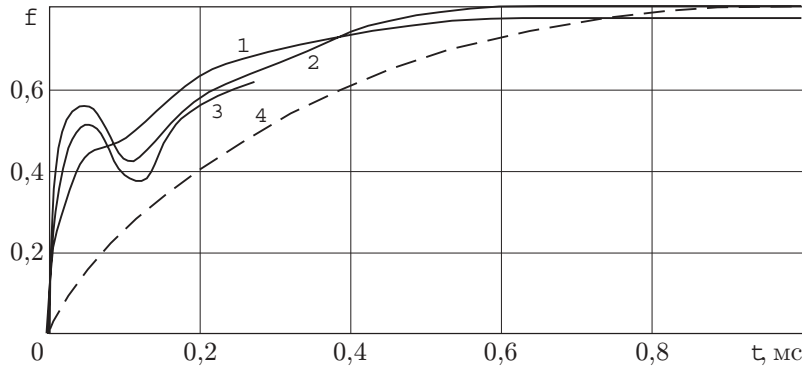


Рис. 2. Процесс установления квазистационарного режима истечения:
 1–3 — численный расчет (1 — сетка 16×4 ; 2 — сетка 64×16 ; 3 — сетка 256×64); 4 —
 полуэмпирический метод ($d_{кр} = 15,2$ мм; $p_0 = 4,84$ МПа; $\langle dp/dt \rangle = 2 \cdot 10^2$ МПа/с)

Законы сохранения массы, импульса и энергии в интегральной форме имеют вид

$$\frac{d}{dt} \iint_S \rho r dz dr + \oint_C \rho r (u_z dr - u_r dz) = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \iint_S \rho u_z r dz dr + \oint_C r [(p + \rho u_z^2) dr - \rho u_r u_z dz] = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \iint_S \rho u_r r dz dr + \oint_C r [\rho u_z u_r dr - (p + \rho u_r^2) dz] = \iint_S p dz dr,$$

$$\frac{d}{dt} \iint_S \rho (2e + q^2) r dz dr + \oint_C r \{ [2pu_z + \rho u_z (2e + q^2)] dr - [2pu_r + \rho u_r (2e + q^2)] dz \} = 0,$$

где z, r — аксиальная и радиальная координаты; u_z, u_r — составляющие вектора скорости газа по z и r соответственно; $q = \sqrt{u_r^2 + u_z^2}$; $e = p/((k-1)\rho)$ — удельная внутренняя энергия; C — произвольный замкнутый контур, ограничивающий площадку S .

В качестве граничных условий на стенках ресивера $ABCDEF$ и на оси симметрии задавалось условие непротекания $\mathbf{v}_n = 0$, а на границе $FMNK$ — “мягкое” условие $\partial \mathbf{v}_n / \partial n = 0$, не влияющее на течение в ресивере, так как $p_0 \gg p_a$, где p_a — наружное давление. В начальный момент времени ($t = 0$) газ внутри и вне ресивера покоится ($u_r(0) = u_z(0) = 0$), заданы значения p_0 и p_a .

Для решения задачи применяется метод численного интегрирования первого порядка точности, в основе которого лежит идея использования для построения разностной схемы точных решений уравнений с кусочно-постоянными данными [10].

На рис. 2 представлены результаты численного расчета процесса установления квазистационарного режима истечения с различными сетками по z и r (16×4 , 64×16 , 256×64) для реальных условий проведения модельных экспериментов: диаметр критического сечения сопла $d_{кр} = 15,2$ мм, начальное давление в ресивере $p_0 = 4,84$ МПа, средний градиент сброса давления $\langle dp/dt \rangle = 2 \cdot 10^2$ МПа/с. Здесь же приведена зависимость $\varphi(t)$, полученная обработкой экспериментальной кривой $p(t)$ рассмотренным полуэмпирическим методом.

Для экспериментального подтверждения предлагаемого метода использовались две установки. Схема первой установки представлена на рис. 1. Вскрытие сопла осуществлялось при вылете сгорающей пробки через сечение FF_1 (см. рис. 1) под воздействием

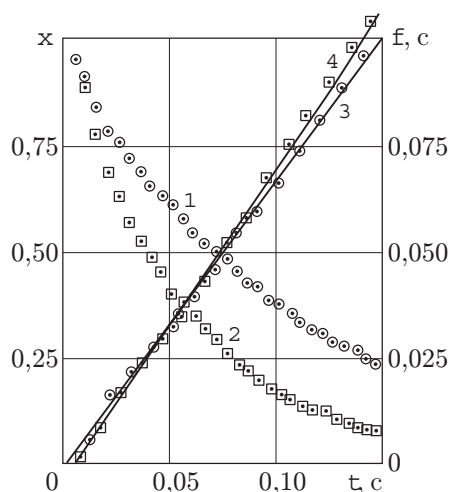


Рис. 3. Экспериментальные кривые сброса давления в ресивере:

1, 2 — $x(t)$ при $d_{кр} = 5$ и 7 мм соответственно; 3, 4 — $f(t)$ при $d_{кр} = 5$ и 7 мм соответственно

давления в ресивере. В качестве материала пробки использовался баллиститный порох Н, продукты сгорания которого создавали заданное давление в ресивере p_0 и истекали через сопло после вылета пробки. Оценка времени вскрытия сопла Δt проводилась по формуле, полученной интегрированием уравнения движения пробки (без учета силы трения):

$$\Delta t = \sqrt{2\rho_m l/p_0} (\sqrt{l + d_{кр}/4} - \sqrt{l}),$$

где ρ_m — плотность пороха; l — длина пробки.

Для условий проведенных экспериментов $\Delta t \approx 0,45 \cdot 10^{-4}$ с, что на порядок меньше времени установления квазистационарного режима истечения.

Сравнение результатов, полученных численным расчетом и полуэмпирическим методом (рис. 2) показало, что рассматриваемый метод дает достаточно адекватную аппроксимацию зависимости реального расхода $G(t)$ в процессе установления квазистационарного режима истечения, а значение времени установления режима несколько отличается ($0,5 \div 0,6$ мс при численном расчете, $0,8 \div 0,9$ мс при использовании полуэмпирического метода). При этом характерное время в уравнении (9) $t_c = 0,29$ мс.

Вторая установка предназначена для определения коэффициента расхода сопел разной конфигурации. Она состоит из батареи баллонов со сжатым воздухом, ресивера, исследуемого сопла, электропневмоклапана и системы измерения давления в ресивере. Сжатый воздух подается в ресивер до заданного давления p_0 , затем после срабатывания клапана воздух из ресивера через сопло истекает в атмосферу. Кривая сброса давления регистрируется датчиком с записью на запоминающем осциллографе.

Данная установка не позволяет определить время установления t_c из-за инерционности вскрытия сопла, однако она проста в эксплуатации и более удобна для проведения серийных испытаний.

На рис. 3 приведены кривые $x(t) = p(t)/p_0$ для двух сопел с внезапным сужением потока с диаметрами критического сечения $5,0$ и $7,0$ мм. Значения относительной площади сечения сопла (модуля сопла) $F_{кр}/F_k = 0,01$ и $0,02$ соответственно. Здесь же приведены зависимости $f(t)$ для этих сопел. Разброс точек характеризует погрешность измерения давления (примерно 2 %). Тангенс угла наклона асимптот кривых $f(t)$ соответствует значению коэффициента расхода φ_0 . Обработкой опытных данных по изложенной методике получены значения коэффициента расхода $\varphi_0 = 0,70 \pm 0,04$ ($d_{кр} = 5,0$ мм), $\varphi_0 = 0,73 \pm 0,03$ ($d_{кр} = 7,0$ мм). Расчет по приближенным формулам [10] дает значения коэффициента расхода $\varphi_0 = 0,738$ и $\varphi_0 = 0,739$ соответственно. Оценка времени установления квазистационарного режима истечения для условий проведенных экспериментов ($t_k \approx 10^{-2}$ с)

показывает, что $t_c \ll t_k$. Отметим, что для количественной оценки t_c с помощью рассматриваемого метода необходимо использование датчиков давления с собственной частотой не ниже 50–100 кГц.

Подведем краткие итоги проведенного исследования.

1. Методом асимптотических разложений решений сингулярно возмущенных уравнений получена экспоненциальная зависимость реального расхода газа из ресивера при внезапном вскрытии сопла в период установления квазистационарного режима истечения.

2. Численным решением двумерных уравнений газодинамики истечения подтверждена адекватность полученной зависимости для расхода.

3. Предложен полуэмпирический метод определения времени установления квазистационарного режима истечения из ресивера, а также определения с контролируемой точностью коэффициента расхода сопла.

4. Результаты экспериментов по истечению из ресивера сжатого воздуха и продуктов сгорания пороха Н при внезапном вскрытии сопла подтвердили возможность использования метода для практической оценки условий применимости гипотезы квазистационарности, а также для определения коэффициента расхода сопла произвольной конфигурации.

Авторы выражают благодарность А. И. Бородину за помощь в проведении численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Райзберг Б. А., Ерохин Б. Т., Самсонов К. П. Основы теории рабочих процессов в ракетных системах на твердом топливе. М.: Машиностроение, 1972.
2. Проджелхоф Р. К., Овчарек Дж. А. Быстрое опорожнение цилиндрического сосуда с газом через сопло // Ракет. техника и космонавтика. 1963. № 9. С. 209–210.
3. Гринь В. Т., Крайко А. Н., Славянов Н. Н. Решение задачи о запуске сопла, вмонтированного в торец ударной трубы // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1981. № 6. С. 117–123.
4. Британ А. Б., Васильев А. И. Ударный запуск плоских сопел с большим углом раствора // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1974. № 4. С. 100–106.
5. Дулов В. Г., Лукьянов Г. А. Газодинамика процессов истечения. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1984.
6. Ашратов Э. А., Волконская Т. Г., Росляков Г. С. Течения газа в соплах и струях // Газоаэромеханика и космические исследования. М.: Наука, 1985. С. 116–136.
7. Звегинцев В. И., Шашкин А. П. О квазистационарности потока в импульсных аэродинамических трубах // Изв. АН СССР. Сер. техн. наук. 1988. № 18, вып. 5. С. 54–59.
8. Новожилов Б. В. Нестационарное горение твердых ракетных топлив. М.: Наука, 1973.
9. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
10. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47, вып. 3. С. 271–306.
11. Шишков А. А. Газовая динамика пороховых ракетных двигателей. М.: Машиностроение, 1972.

*Поступила в редакцию 4/IV 2003 г.,
в окончательном варианте — 3/X 2003 г.*