

ОСТАТОЧНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ВЯЗКОСТЬ ПРИ ВЫСОКОСКОРОСТНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ МЕТАЛЛОВ

Н. Н. Сергеев-Альбов

(Новосибирск)

В данной работе путем постановки численного эксперимента изучаются остаточные напряжения, возникающие в поверхностном слое металла после прохождения по нему импульса давления. Изучается их величина в зависимости от величины и от скорости прохождения воздействующего импульса давления. Напряженное поведение металла описывается максвелловскими уравнениями линейной вязкоупругой среды [1]. В этой модели учет пластических явлений происходит за счет введения нелинейной зависимости времени релаксации от интенсивности касательных напряжений.

Для описания поведения металлов при высокоскоростном деформировании часто используется модель вязкой несжимаемой жидкости. В рамках этой модели в [2] исследована вязкость металлов при соударениях в режиме сварки взрывом. Здесь на примере численных результатов проводится сравнение модельного уравнения, используемого в [2], и максвелловской модели.

1. Пусть напряженное поведение слоя металла, движущегося с постоянной дозвуковой скоростью w вдоль оси x плоскости переменных (x, y) , описывается максвелловской моделью линейной вязкоупругой среды с временем релаксации, нелинейно зависящим от напряженного состояния металла. Система уравнений будет иметь вид [1]

$$(1.1) \quad \rho_0 \frac{du}{dt} - \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} = 0, \quad \rho_0 \frac{dv}{dt} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{d(\sigma_{11} - \sigma)}{dt} - \frac{4}{3} \rho_0 b_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3} \rho_0 b_0^2 \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\sigma_{11} - \sigma}{\tau},$$

$$\frac{d(\sigma_{22} - \sigma)}{dt} + \frac{2}{3} \rho_0 b_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{4}{3} \rho_0 b_0^2 \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\sigma_{22} - \sigma}{\tau},$$

$$\frac{d\sigma}{dt} - \rho_0 \left(c_0^2 - \frac{4}{3} l_0^2 \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \quad \frac{d\sigma_{12}}{dt} - \rho_0 b_0^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\sigma_{12}}{\tau},$$

где $\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + w \frac{\partial}{\partial x}$; $\sigma = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}$; $w < b_0 < c_0$;

(u, v) — компоненты вектора скорости перемещения точек среды; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; ρ_0 — плотность среды; c_0, b_0 — продольная и поперечная скорости звука.

Для времени релаксации берется интерполяционная формула [3]:

$$(1.2) \quad \tau = \tau_0 \left(\frac{\rho_0 b_0^2}{In_0} \right)^{n-1} \exp\left(\mu \frac{\Phi}{RT_0}\right), \quad n^{-1} = n_1 \left[\left(\frac{T_0}{\theta n_2} - 1 \right)^2 + n_3 \right],$$

$$\Phi(T_0) = c_0^2 \frac{T_0}{\theta n_4} \left(1 - \frac{T_0}{\theta n_5} \right) n, \quad \theta = 315 \text{ К}, \quad T_0 = 300 \text{ К}, \quad \mu = 6354 \frac{\text{г}}{\text{моль}},$$

$$R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{град} \cdot \text{моль}}.$$

Здесь $I = \sqrt{((\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6\sigma_{12}^2)/2}$ — интенсивность касательных напряжений. Интерполяционные константы этой формулы приведены в табл. 1. Слой металла на плоскости (x, y) задается в виде $S = \{x, y | -\infty < x < +\infty, 0 \leq y \leq l_2\}$.

Таблица 1

τ ₀	n ₀	n ₁	n ₂	n ₃	n ₄	n ₅
2,4 мкс	0,000196	0,0184	0,955	1,902	0,00014	7,22

Импульс давления моделируется следующим образом. На границе слоя $y = l_2$ при $x_1 \leq x \leq x_2$ задаются компоненты напряжений σ_{12} и σ_{22} . Остальная часть верхней и нижняя граница слоя свободны от напряжений. В начальный момент времени ($t = 0$) поля скоростей и напряжений в слое металла нулевые.

В численном эксперименте расчетная область — конечный прямоугольник $\Pi = \{x, y | 0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2\}$ ($l_1 = 65$ мм, $l_2 = 8$ мм).

Этот прямоугольник Π разбивается на прямоугольные разностные ячейки со сторонами h_1 и h_2 . Каждой ячейке соответствует номер (n, m) , причем $n = 0, 1, \dots, N1, N1 + 1, \dots, N2, \dots, N3; m = 0, 1, \dots, M1; N1 = 11; N2 = 20; N3 = 49; M1 = 13$. Тогда $h_1 = l_1 / (1 + N3)$, $h_2 = l_2 / (1 + M1)$.

В прямоугольнике Π в начальный момент $t = 0$ имеет место

$$(1.3) \quad u = v = 0, \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0,$$

а на его границах выполнены условия

$$(1.4) \quad \text{при } y = 0 \quad \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0,$$

$$\text{при } y = l_2 \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} = -p \text{ при } x_1 \leq x \leq x_2 \quad (x_1 = N1 \times h_1, x_2 = N2 \times h_2), \quad \sigma_{22} = 0 \text{ при всех других } x,$$

$$\text{при } x = 0 \quad [\sigma_{11} - \rho_0 c_0 u] = 0, \quad v = 0,$$

$$\text{при } x = l_1 \quad [\sigma_{11} + \rho_0 c_0 u] = 0, \quad \sigma_{12} = 0.$$

Для нахождения координат точек слоя металла в процессе его деформации используются уравнения

$$(1.5) \quad \partial \xi / \partial t + w \partial \xi / \partial x = u + w, \quad \partial \eta / \partial t + w \partial \eta / \partial x = v.$$

Численный алгоритм расчета задачи (1.4) — (1.5) строится на основе разностного метода С. К. Годунова [4], который применительно к данной задаче подробно описан в [5].

2. В стационарном случае для системы уравнений (1.4) выполнены следующие соотношения на двукратной действительной характеристике линии тока $y = \text{const}$ [6]:

$$(2.1) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma_{11} - \frac{4\rho_0 b_0^2}{w} \left(\frac{c_0^2 - b_0^2}{c_0^2} \right) u - \left(\frac{c_0^2 - 2b_0^2}{c_0^2} \right) \sigma_{22} \right] =$$

$$= - \frac{\left(\sigma_{11} - \sigma - \left(\frac{c_0^2 - 2b_0^2}{c_0^2} \right) (\sigma_{22} - \sigma) \right)}{\tau w},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma_{33} - \frac{c_0^2 - 2b_0^2}{c_0^2} \left(\sigma_{22} + \frac{2\rho_0 b_0^2}{w} u \right) \right] = - \left[\sigma_{33} - \sigma - \left(\frac{c_0^2 - 2b_0^2}{c_0^2} \right) (\sigma_{33} - \sigma) \right] / (\tau w).$$

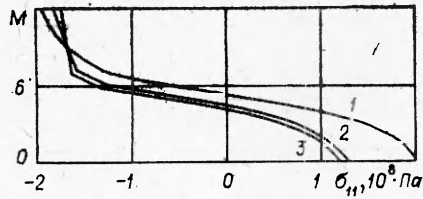
Функция τ является резко меняющейся функцией состояния вещества; так, в упругой зоне $\tau = \infty$, а в зоне развитых пластических деформаций $\tau \simeq 1$ мкс. Следовательно, после прохождения металла через эту зону в компонентах σ_{11} и σ_{33} остаются добавки, определяемые правыми частями соотношений (2.1).

Наличие таких свойств изучаемой системы уравнений позволяет рассчитывать остаточные напряжения, возникающие в слое металла в результате движения по этому слою импульса давления.

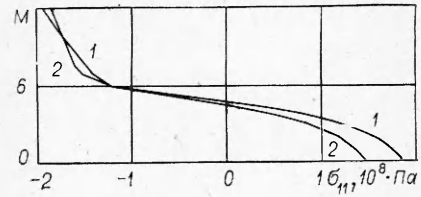
Изучаются поля напряжений и скоростей в меди (табл. 2) в зависимости от скорости w движения импульса давления и его величины p . Будем раскладывать искомые решения вязкоупругих уравнений на две сос-

Т а б л и ц а 2

ρ_0	c_0	b_0
8,9 $\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$	4,65 $\frac{\text{км}}{\text{с}}$	2,14 $\frac{\text{км}}{\text{с}}$



Ф и г. 1



Ф и г. 2

ставляющих — упругую и вязкую:

$$u = u^{\text{упр}} + u^{\text{в}}, v = v^{\text{упр}} + v^{\text{в}},$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{\text{упр}} + \sigma_{ij}^{\text{в}}, \xi = \xi^{\text{упр}} + \xi^{\text{в}}, \eta = \eta^{\text{упр}} + \eta^{\text{в}}.$$

Упругая часть решения удовлетворяет задаче (1.1) — (1.4) при условии, что в системе уравнений (1.1) время релаксации τ равно бесконечности.

Расчет ведется шагами по времени до установления полей напряжений и скоростей. Установлению физических величин соответствуют моменты времени $t \geq 2000 h_3$.

На фиг. 1 приведены графики напряжения σ_{11} при фиксированных значениях x ($N = 24, 30, 36$, кривые 1—3 соответственно) в зависимости от y ($M = 0, 1, \dots, 13$) для задачи с параметрами $p = 5 \cdot 10^8$ Па, $w = 1,8$ км/с.

При отличных от нуля σ_{11} и σ_{33} компоненты тензора напряжений σ_{12} и σ_{22} близки к нулевым значениям. Причем σ_{11} имеют отрицательные значения со стороны границы слоя, на которую воздействовал импульс давления.

Таким образом, в приграничной полосе материала образуется слой остаточных сжимающих напряжений (напряженный слой). Его величина зависит от предела текучести материала, что в данном случае учитывается заданием зависимости времени релаксации от интенсивности касательных напряжений, а также от величины параметров p и w .

На фиг. 2 приведены эпюры напряжений σ_{11} при фиксированном x ($N = 28$) в зависимости от y при $p = 5 \cdot 10^8; 10^9$ Па (кривые 1, 2 соответственно) и $w = 1,8$ км/с.

3. Для описания поведения металлов при высокоскоростном деформировании часто используется модель вязкой несжимаемой жидкости. В рамках этой модели в [2] исследована вязкость металлов при соударениях их в режиме сварки взрывом.

Проведем сравнение модельного уравнения, используемого в [2], и максвелловских вязкоупругих уравнений на примере численно рассчитанной задачи.

В [7] приводятся интерполяционные формулы для времени релаксации τ . Эти интерполяционные формулы строились путем определения коэффициента вязкости в металлах при сварке взрывом [2]. При этом учитывалась зависимость между коэффициентом вязкости μ и временем релаксации τ [7]:

$$(3.1) \quad \mu = \rho_0 b_0^2 \tau.$$

В каждой расчетной точке имеем значение времени релаксации τ , а тем самым, согласно (3.1), и значение коэффициента вязкости μ . Численный расчет позволяет определить вязкие горизонтальные смещения частиц слоя металла. Они определяются равенством $\xi^{\text{в}} = \xi - \xi^{\text{упр}}$.

При условии стационарности процесса деформирования первое и последнее уравнения системы (1.1) для вязких составляющих имеют вид

$$(3.2) \quad \rho_0 w \frac{\partial u^{\text{в}}}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_{11}^{\text{в}}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}^{\text{в}}}{\partial y},$$

$$(3.3) \quad w \frac{\partial \sigma_{12}^{\text{в}}}{\partial x} - \rho_0 b_0^2 \left(\frac{\partial u^{\text{в}}}{\partial y} + \frac{\partial v^{\text{в}}}{\partial x} \right) = - \frac{\sigma_{12}^{\text{в}}}{\tau} - \frac{\sigma_{12}^{\text{упр}}}{\tau}.$$

Уравнение (3.3) можно переписать в виде

$$\sigma_{12}^B = \mu \left(\frac{\partial u^B}{\partial y} + \frac{\partial v^B}{\partial x} \right) - \tau w \frac{\partial \sigma_{12}^B}{\partial x} - \sigma_{12}^{\text{упр}}.$$

Подставляя полученное выражение в (3.2) (в предположении, что $\tau = \text{const}$), получим

$$(3.4) \quad \rho_0 w \frac{\partial u^B}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{11}^B}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u^B}{\partial y^2} + Q, \quad \text{где } Q = \mu \frac{\partial^2 v^B}{\partial x \partial y} - \tau w \frac{\partial^2 \sigma_{12}^B}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \sigma_{12}^{\text{упр}}}{\partial y}.$$

Это уравнение проинтегрируем по x от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\rho_0 w [u_{-\infty}^B - u_{+\infty}^B] - [\sigma_{11-\infty}^B - \sigma_{11+\infty}^B] = \mu w \frac{d^2 z}{dy^2} + \int_{-\infty}^{+\infty} Q dx,$$

где $z(y) = \frac{1}{w} \int_{-\infty}^{+\infty} u^B(x, y) dx$ — горизонтальное вязкое смещение;

$$u_{-\infty}^B = 0; \quad \sigma_{11-\infty}^B = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{12}^B}{\partial y} \Big|_{-\infty} = 0; \quad \frac{\partial v^B}{\partial x} \Big|_{-\infty} = 0.$$

Из результатов численного расчета имеем

$$\frac{\partial \sigma_{12}^B}{\partial y} \Big|_{+\infty} \simeq 0, \quad \frac{\partial v^B}{\partial y} \Big|_{+\infty} \simeq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \sigma_{12}^{\text{упр}}}{\partial y} dx = \rho_0 w u_{\infty}^{\text{упр}} - \sigma_{11\infty}^{\text{упр}} \simeq 0.$$

Это означает, что величину интеграла от Q можно считать приблизительно равной нулю.

Тогда горизонтальное вязкое смещение частиц слоя металла $z(y)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$(3.5) \quad \rho_0 w u_{\infty}^B - \sigma_{11\infty}^B = \mu w \frac{d^2 z}{dy^2}.$$

Уравнение (3.5) может быть получено из модельного уравнения

$$(3.6) \quad \rho_0 w \frac{\partial u^B}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{11}^B}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u^B}{\partial y^2}$$

путем интегрирования по x от $-\infty$ до $+\infty$. Уравнение (3.6) в свою очередь может быть получено из уравнения (3.4), если в нем пренебречь величиной Q .

Уравнение (3.6) отличается от уравнения для установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости

$$(3.7) \quad \rho_0 w \partial u / \partial x = \mu \partial^2 u / \partial y^2,$$

используемого в [7], членом $\partial \sigma_{11}^B / \partial x$.

Ниже будет показано, что учет этого члена существенно влияет на горизонтальные вязкие смещения частиц слоя металла.

Из (1.4), (2.3) следует, что $\sigma_{11\infty}^B + \rho_0 c_0 u_{\infty}^B = 0$, тогда (3.5) преобразуется к виду

$$\frac{1}{b_0^2 \tau} \left(1 + \frac{c_0}{w} \right) u_{\infty}^B = \frac{d^2 z}{dy^2},$$

а (3.7) — к виду

$$\frac{1}{b_0^2 \tau} u_{\infty}^B = \frac{d^2 z}{dy^2}.$$

Обозначим

$$A = \begin{cases} \frac{1}{b_0^2 \tau} \left(1 + \frac{c_0}{w}\right) u_\infty^B & \text{для уравнения (3.6),} \\ \frac{1}{b_0^2 \tau} u_\infty^B & \text{для уравнения (3.7).} \end{cases}$$

Тогда (3.6), (3.7) можно записать в виде

$$(3.8) \quad d^2 z / dy^2 = A.$$

Следуя [2], рассмотрим движение слоя металла как струи идеальной жидкости с постоянным давлением; при этом вдоль свободной поверхности скорость равняется w . Струя после воздействия на нее импульса давления поворачивается на угол γ . Тогда не выполняется закон сохранения количества движения вдоль оси x : количество движения до поворота струи больше, чем после поворота ее на угол γ . Будем предполагать, как и в [2], наличие источника импульса, который формирует струю вязкой жидкости, двигающуюся с меньшей скоростью, чем скорость w . Из закона сохранения количества движения вдоль оси x найдем импульс $J = \rho_0 w l_2 (1 - \cos \gamma)$.

Тогда потерянная скорость u_∞^B при $x \rightarrow \infty$ будет определяться в виде $u_\infty^B = J / \rho_0 l_2 = w (1 - \cos \gamma) \simeq w \gamma^2 / 2$.

Из закона сохранения вертикального импульса следует, что $\sigma_{22}^T l = \rho_0 l_2 w^2 \sin \gamma$, где $\sigma_{22}^T = -p$; l — длина части слоя, на которую воздействует импульс давления. Отсюда получаем соотношение $\sin \gamma = -pl / (\rho_0 l_2 w^2)$.

Положим

$$(3.9) \quad z|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{dz}{dy} \right|_{y=l_2} = 0.$$

Решаем уравнение (3.8) при условии (3.9). Получим, что $z(y) = Ay^2/2 - Al_2 y$ есть искомого горизонтальное смещение.

Вычислим величину интегралов от вязкого смещения (по высоте слоя металла), полученного из максвелловского модельного уравнения (3.6):

$$S_M = \int_0^{l_2} z(y) dy = -\frac{l_2^3}{3} \frac{u_\infty^B}{b_0^2 \tau} \left(1 + \frac{c_0}{w}\right);$$

из уравнения для установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости (3.7):

$$S_B = \int_0^{l_2} z(y) dy = -\frac{l_2^3}{3} \frac{u_\infty^B}{b_0^2 \tau},$$

а также суммарное смещение, полученное из численного расчета:

$$S_{\text{расч}} = \sum_{m=0}^{M1} \tilde{z}_{m+1/2} h_2,$$

где $\tilde{z}_{m+1/2} = \tilde{z}(h_2(m+1/2)) = \xi_{n,m} - \xi_{n,m}^{\text{УПР}}$.

Значения величин S_M , S_B , $S_{\text{расч}}$ приведены в табл. 3. По значению S_M и S_B можно вычислить величину времени релаксации τ , а значит, согласно (3.1), и величину коэффициента вязкости μ . В табл. 3 приведены значения трех коэффициентов вязкости μ_M , μ_B и $\mu_{\text{расч}}$. В численном расчете время релаксации τ — резко переменная функция, поэтому в табл. 3 приводится $\mu_{\text{расч}}$, вычисленное по среднему значению τ в пластической зоне.

Анализ табл. 3 показывает, что коэффициент вязкости μ_B , рассчитанный по модели вязкой несжимаемой жидкости, отличается от коэффициен-

та вязкости $\mu_{расч}$, полученного путем постановки численного эксперимента в рамках вязкоупругой модели Максвелла. С другой стороны, коэффициент вязкости μ_m , рассчитанный по максвелловскому модельному уравнению (3.6), по порядкам величин совпадает с расчетным коэффициентом вязкости $\mu_{расч}$. Модельное уравнение (3.6) отличается от уравнения (3.7) для установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости членом $\partial \sigma_{11}^B / \partial x$.

В результате прохождения металла через зону пластических деформаций в нем образуются сжимающие остаточные напряжения σ_{11}^B . Наличие остаточных напряжений приводит к большему горизонтальному смещению частиц слоя металла, чем аналогичное смещение, даваемое моделью вязкой несжимаемой жидкости, а значит, и к разным по порядку величин значениям коэффициентов вязкости.

Автор признателен С. К. Годунову за постановку и обсуждение задачи.

Поступила 9 II 1982

Т а б л и ц а 3

W , км/с	1,8	1,8	1,2
p , 10^{-8} ·Па	7,5	5	5
$S_{расч}$, мм ²	-0,54	-0,35	-1,04
S_m , мм ²	-0,41	-0,15	-0,48
S_B , мм ²	-0,11	-0,04	-0,1
$\mu_{расч}$, П	$1,6 \cdot 10^5$	$2,4 \cdot 10^5$	$3,7 \cdot 10^5$
μ_m , П	$1,5 \cdot 10^5$	10^5	$1,6 \cdot 10^5$
μ_B , П	$4,1 \cdot 10^4$	$2,9 \cdot 10^4$	$3,3 \cdot 10^4$

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.
2. Годунов С. К., Дерибас А. А. и др. Исследование вязкости металлов при высокоскоростных соударениях. — ФГВ, 1971, № 1.
3. Козин Н. С., Кузьмина Н. К. Ударные аднабаты и профили слабых ударных волн в металлах. — ПМТФ, 1977, № 4.
4. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. И., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
5. Сергеев-Альбов Н. Н. Численный расчет остаточных напряжений. Препринт № 212 ВЦ СО АН СССР. Новосибирск, 1980.
6. Годунов С. К., Сергеев-Альбов Н. И. Уравнения линейной теории упругости с точечными максвелловскими источниками релаксации напряжений. — ПМТФ, 1977, № 4.
7. Годунов С. К., Демчук А. Ф. и др. Интерполяционные формулы для зависимости максвелловской вязкости. — ПМТФ, 1974, № 4.

УДК 539.376

НЕКОТОРЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ УСТАНОВИВШЕЙСЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ТОНКИХ ПОКРЫТИЙ

В. М. Александров, Е. В. Коваленко

(Москва)

1. Приведем вначале некоторые основные соотношения нелинейной теории ползучести для случая плоской деформации, необходимые в дальнейшем [1]:

$$(1.1) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0,$$