

И. Е. Агапов, А. М. Белогорцев, А. А. Буренин,
А. В. Резунов

АВТОМОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ОБ ОДНОМЕРНОМ СОУДАРЕНИИ ДВУХ ПОЛУПРОСТРАНСТВ ИЗ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО МАТЕРИАЛА

Задачи исследования процессов высокоскоростного соударения деформируемых тел имеют большое теоретическое и прикладное значение. Однако их решение связано со значительными трудностями, обусловленными волновым характером распространения деформаций, необходимостью использования нелинейных механических моделей. Определенную информацию о поведении тел в условиях интенсивного динамического нагружения позволяют получить автомоделные задачи нелинейной теории упругости, решение которых можно найти аналитически или сравнительно просто численными методами. Изучались качественные особенности процесса распространения возмущений [1], получены решения ряда конкретных задач [2-4].

В данной работе рассмотрена одномерная задача о соударении двух нелинейно-упругих полупространств, одно из которых покоилось, второе двигалось поступательно с постоянной скоростью. На границе взаимодействия тел предполагается выполнение закона сухого трения Кулона. Обсуждается характер деформирования, приводятся результаты численного исследования задачи, выполнено сравнение с решением в линейном случае.

Ось Ox_1 декартовой системы координат направим перпендикулярно границе полупространств (рис. 1). В начальный момент времени полупространство $x_1 > 0$ неподвижно, а $x_1 < 0$ имеет скорость $V_0 = (V_{10}, V_{20}, 0)$. Материал обоих полупространств до соударения не подвергался деформированию. Систему уравнений, описывающих динамическое поведение нелинейно-упругой среды, запишем в виде [5, 6]

$$(1) \quad \sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - 2e_{kj}), \quad \sigma_{ij,j} = \rho \frac{dV_i}{dt},$$

$$V_i = \partial u_i / \partial t + V_j u_{i,j}, \quad 2e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{k,j},$$

$$\rho / \rho_0 = (1 - 2I_1 + 2I_1^2 - 2I_2 + 4I_1 I_2 - (4/3)I_1^3 - (8/3)I_3)^{1/2},$$

$$I_1 = e_{ii}, \quad I_2 = e_{ij} e_{ji}, \quad I_3 = e_{ik} e_{kj} e_{ji},$$

где σ_{ij} , e_{ij} , V_i , u_i — компоненты тензоров напряжений, конечных деформаций Альманси, векторов скорости и перемещения соответственно; ρ и ρ_0 — плотности в текущем и свободном состоянии. Воспользуемся зависимостью упругого потенциала W от инвариантов тензора деформаций:

$$(2) \quad W = (1/2)\lambda_k I_1^k + \mu_k I_2 + l_k I_1 I_2 + m_k I_1^3 + n_k I_3, \quad k = 1, 2.$$

Здесь λ и μ — параметры Ламэ; l , m , n — упругие модули третьего порядка; $k = 1$ для тела, по которому производится удар, $k = 2$ для ударяющего тела. На границе раздела полупространств L величины V_1 , σ_{11} , σ_{12} непрерывны

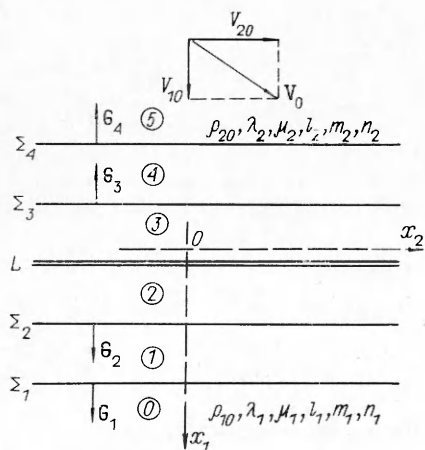
$$(3) \quad [V_1] = [\sigma_{11}] = [\sigma_{12}] = 0, \quad [F] = F^+ - F^-.$$

Индексами плюс и минус обозначим значения величины, вычисленные перед ударной волной (УВ) и сразу за ней. Составляющая V_2 скорости частиц среды будет непрерывна:

$$(4) \quad [V_2] = 0$$

лишь при выполнении на L условия

$$(5) \quad |\sigma_{12}| \leq f |\sigma_{11}|$$



Р и с. 1

(f — коэффициент трения). Если решение задачи с граничными условиями (3), (4) не удовлетворяет неравенству (5), то (4) заменяем соотношением (6)

$$|\sigma_{12}| = f|\sigma_{11}|,$$

представляющим собой закон сухого трения Кулона. В [2] изучены особенности деформирования нелинейно-упругого полупространства, граница которого начиная с некоторого момента времени движется с постоянной скоростью. Применяя полученные там результаты к рассматриваемой задаче (граничные условия приводят к сжатию среды), приходим к волновой картине, изображенной на рис. 1. Таким образом, деформации, вызванные соударением упругих полупространств, будут распространяться в среду в виде продольных Σ_1, Σ_4 и квазипоперечных [2] Σ_2, Σ_3 УВ, их скорости движения обозначим G_1, G_2, G_3, G_4 .

Плоскости разрывов вместе с плоскостью раздела соударяющихся тел L делят упругое пространство на шесть зон. При этом в зонах 0 и 5 среда не деформирована. Частицы среды из зоны 5 имеют постоянную скорость V_0 , а из зоны 0 неподвижны. В зонах 1 и 4 отсутствуют сдвиговые деформации $u_{2,1}^{(1)} = u_{2,1}^{(4)} = 0$ и напряжения $\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(4)} = 0$ (верхний индекс указывает на принадлежность величины к точкам соответствующей зоны). В точках каждой зоны $u_{1,1}$ и $u_{2,1}$ (а следовательно, и V_i, e_{ij}, σ_{ij}) постоянны. В этом случае уравнения движения удовлетворяются тождественно. На фронтах УВ выполняются динамические и кинематические условия совместности [7]

$$(7) \quad [\sigma_{i1}] = \rho^+(V_1^+ v_k - G)[V_i], \quad i = 1, 2;$$

$$(8) \quad \left[\frac{\partial F}{\partial t} \right] + v_k G \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} \right] = 0, \quad v_1 = 1, \quad v_2 = -1,$$

которые позволяют найти параметры напряженно-деформированного состояния в точках зон 1—4. Используя соотношения (1), (2), (8) и ограничиваясь лишь квадратичными членами по компонентам тензора $u_{i,j}$, получаем

$$(9) \quad [\sigma_{11}] = (\lambda_k + 2\mu_k)\tau_1 + 2\alpha_k u_{1,1}\tau_1 - \alpha_k \tau_1^2 + 2\beta_k u_{2,1}\tau_2 - \beta_k \tau_2^2,$$

$$[\sigma_{12}] = \mu_k \tau_2 + \gamma_k (u_{1,1}\tau_2 + u_{2,1}\tau_1 - \tau_1\tau_2);$$

$$(10) \quad [V_1] = \tau_1(V_1 - v_k G)/(1 + \tau_1 - u_{1,1}),$$

$$[V_2] = (V_1 - v_k G)\tau_2 + (u_{2,1} - \tau_2)[V_1], \quad \tau_i = [u_{i,1}],$$

$$\alpha_k = 3(l_k + m_k + n_k) - 3,5\lambda_k - 7\mu_k, \quad \gamma_k = l_k + 1,5n_k - \lambda_k - 3\mu_k,$$

$$\beta_k = (\gamma_k - \mu_k)/2.$$

Подставляя выражения (9), (10) в уравнение (7) и учитывая, что на волнах Σ_1, Σ_4 $[\sigma_{21}] = [V_2] = 0$, имеем шесть алгебраических уравнений

$$(11) \quad c_{11}^2 [1 + (1 - a_1)\tau_{11}] = G_1^2, \quad c_{11}^2 = (\lambda_1 + 2\mu_1)/\rho_{10}, \quad a_1 = \alpha_1/(\lambda_1 + 2\mu_1),$$

$$c_{11}^2 [\tau_{12} + 2(1 - a_1)\tau_{11}\tau_{12} - (a_1 - 1)\tau_{12}^2 - b_1\tau_{22}^2] =$$

$$= \tau_{2,1}^2 - 2G_2(G_1 - G_2)\tau_{11}\tau_{12},$$

$$c_{21}^2 [1 - (d_1 - 1)(\tau_{11} + \tau_{12})] = G_2^2 - 2G_2(G_1 - G_2)\tau_{11},$$

$$c_{21}^2 = \mu_1/\rho_{10}, \quad b_1 = \beta_1/(\lambda_1 + 2\mu_1), \quad d_1 = \gamma_1/\mu_1,$$

$$c_{12}^2 [1 - (a_2 - 1)\tau_{14}] = (V_{10} + G_4)^2, \quad c_{12}^2 = (\lambda_2 + 2\mu_2)/\rho_{20}, \quad a_2 = \alpha_2/(\lambda_2 + 2\mu_2),$$

$$c_{12}^2 [\tau_{13} + 2(1 - a_2)\tau_{13}\tau_{14} - (a_2 - 1)\tau_{13}^2 - b_2\tau_{23}^2] = (V_{10} + G_3)^2 \tau_{13} -$$

$$- 2(G_4 - G_3)(G_3 + V_{10})\tau_{13}\tau_{14},$$

$$c_{22}^2 [1 - (d_2 - 1)(\tau_{13} + \tau_{14})] = (V_{10} + G_3)^2 - 2(G_3 + V_{10})(G_4 - G_3)\tau_{14},$$

$$c_{22}^2 = \mu_2/\rho_{20}, \quad b_2 = \beta_2/(\lambda_2 + 2\mu_2), \quad d_2 = \gamma_2/\mu_2$$

относительно десяти неизвестных $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{14}, \tau_{22}, \tau_{23}, G_1, G_2, G_3, G_4$.

Здесь второй из нижних индексов у τ показывает, на какой волне вычислен соответствующий скачок. Для получения замкнутой системы уравнений воспользуемся граничными условиями (3)–(6). В принятых выше обозначениях условия (3) запишутся в виде

$$(12) \quad \begin{aligned} -\mu_2\tau_{23} + \gamma_2(\tau_{13} + \tau_{14})\tau_{23} &= -\mu_1\tau_{22} + \gamma_1(\tau_{11} + \tau_{12})\tau_{22}, \\ &-(\lambda_2 + 2\mu_2)(\tau_{13} + \tau_{14}) + \alpha_2(\tau_{13} + \tau_{14})^2 + \beta_2\tau_{23}^2 = \\ &= -(\lambda_1 + 2\mu_1)(\tau_{11} + \tau_{12}) + \alpha_1(\tau_{11} + \tau_{12})^2 + \beta_1\tau_{22}^2, \\ (V_{10} - G_4\tau_{14} - G_3\tau_{13})(1 + \tau_{11} + \tau_{12}) &= (G_1\tau_{11} + G_2\tau_{12})(1 + \tau_{14} + \tau_{13}). \end{aligned}$$

Последним соотношением, замыкающим систему уравнений, является либо условие жесткого сцепления (4)

$$(13) \quad \begin{aligned} -V_{20} + \left(\frac{V_{10} - G_4\tau_{14}}{1 + \tau_{14}} + G_3 \right) \frac{1 + \tau_{14}}{1 + \tau_{13} + \tau_{14}} \tau_{23} &= \\ = \left(\frac{G_1\tau_{11}}{1 + \tau_{11}} - G_2 \right) \frac{1 + \tau_{11}}{1 + \tau_{11} + \tau_{12}} \tau_{22} \end{aligned}$$

в случае, если решение будет удовлетворять неравенству (5)

$$\begin{aligned} |-\mu_2\tau_{23} + \gamma_2(\tau_{13} + \tau_{14})\tau_{23}| \leq f | &-(\lambda_2 + 2\mu_2)(\tau_{13} + \tau_{14}) + \\ &+ \alpha_2(\tau_{13} + \tau_{14})^2 + \beta_2\tau_{23}^2 |, \end{aligned}$$

либо, если это не так, закон сухого трения Кулона (6)

$$(14) \quad \begin{aligned} -\mu_2\tau_{23} + \gamma_2(\tau_{13} + \tau_{14})\tau_{23} &= \\ = f \operatorname{sign} V_2^{(3)} [&-(\lambda_2 + 2\mu_2)(\tau_{13} + \tau_{14}) + \alpha_2(\tau_{13} + \tau_{14})^2 + \beta_2\tau_{23}^2]. \end{aligned}$$

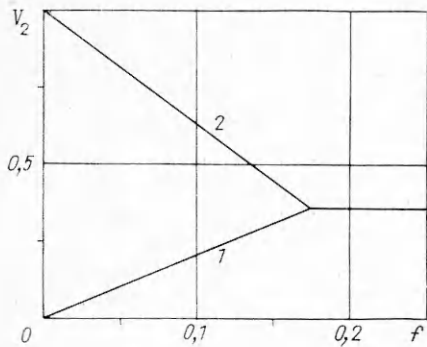
Полученная система десяти нелинейных алгебраических уравнений (11), (12) и (13) либо (14) исследовалась численно итерационным методом Ньютона. При небольших значениях V_{10} , V_{20} в качестве нулевого приближения использовалось решение задачи в рамках линейной теории упругости, которое легко находится аналитически. Для сходимости итераций при больших скоростях соударения необходимо постепенно увеличивать V_{10} , V_{20} , беря в качестве нулевого приближения решение, найденное на предыдущем шаге.

Некоторые из численных результатов представлены на рис. 2–4 для случая удара тела из алюминия по телу из стали. При этом скорости были отнесены к $c_{1\sigma}$, напряжения — к $(\lambda_2 + 2\mu_2)$. Упругие модули имеют значения: $\lambda_1 = 1,155 \cdot 10^5$ МПа, $\mu_1 = 7,7 \cdot 10^4$ МПа, $\lambda_2 = 4,05 \cdot 10^4$ МПа, $\mu_2 = 2,7 \cdot 10^4$ МПа, на рис. 2, 4 $l_1 = m_1 = n_1 = -10^5$ МПа, $l_2 = m_2 = n_2 = -4 \cdot 10^4$ МПа, на рис. 3 $l_1 = m_1 = n_1 = -10^6$ МПа, $l_2 = m_2 = n_2 = -4 \cdot 10^5$ МПа.

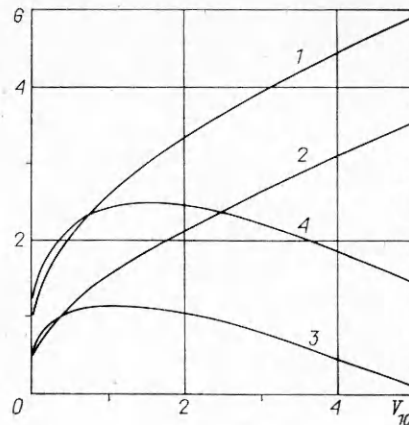
На рис. 2 показаны зависимости составляющих скоростей точек среды $V_2^{(2)}$ и $V_2^{(3)}$ (линии 1 и 2) в зонах 2 и 3 от коэффициента трения на границе тел при одной и той же скорости движения ударяющего тела $V_{10} = 3$, $V_{20} = 1$. Точка соединения графиков $f = f_*$ отвечает началу сцепления соударяющихся тел. Параметры напряженно-деформированного состояния, рассчитанные при $f > f_*$, будут такими же, как и при $f = f_*$.

На рис. 3 приведены зависимости скоростей распространения УВ G_1, G_2, G_3, G_4 (линии 1–4) от V_{10} при $f = 0,3$, $V_{20} = 1$. Эти зависимости в отличие от линейного случая, когда скорости УВ постоянны, существенно нелинейны. Уменьшение G_3 и G_4 при больших V_{10} объясняется тем, что переносная скорость ударяющего тела направлена вниз, а скорости G_3 и G_4 предполагаются направленными вертикально вверх.

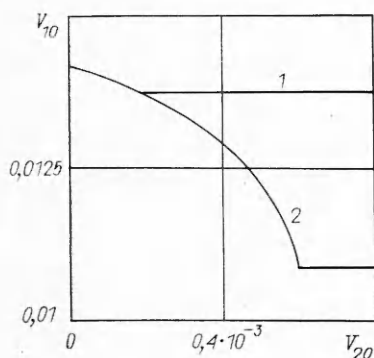
Кривые, изображенные на рис. 4, дают значения скоростей V_{10} , V_{20} , при которых появляются пластические деформации (1 — $f = 0,1$, 2 — $f = 0,3$). Они впервые возникают в алюминии в области, примыкающей к границе контакта соударяющихся тел. Горизонтальные участки



Р и с. 2



Р и с. 3



Р и с. 4

кривых соответствуют проскальзыванию. Использовалось условие пластичности Мизеса. Результаты, полученные с применением условия пластичности Треска, отличаются незначительно. Пластические деформации развиваются при небольших для задач рассматриваемого класса скоростях соударения ($V_{10} = 60-110$ м/с). Расчеты проводились с удвоенными в сравнении со статическими значениями пределов текучести (для стали $\sigma_T = 1500$ МПа, для алюминия $\sigma_T = 600$ МПа). Отметим, что в нашем случае процесс нагружения активный, поэтому появление пластических деформаций —

не причина для прекращения расчетов. В этом случае соотношения (1), (2) можно рассматривать как вариант деформационной теории пластичности.

Представляет интерес вопрос об определении значений скоростей соударения, допускающих использование линейной модели. Численные эксперименты показали, что при $V_{10} < 100-120$ м/с относительная погрешность между решениями, полученными для линейно-упругой среды, и решением, найденным с помощью нелинейной модели, не превосходит 5%. Таким образом, если при соударении упругих тел не возникают пластические деформации, то расчет напряженно-деформированного состояния можно выполнять, применяя аппарат линейной теории упругости.

Нелинейные эффекты в данной задаче проявляются также в том, что на УВ Σ_2 и Σ_3 , в линейном случае чисто поперечных, терпят разрыв и нормальные составляющие скорости и напряжения. К тому же эти УВ — волны расширения, т. е. наблюдается эффект Вейссенберга (чистый сдвиг приводит к расширению среды). Величина всех нелинейных эффектов растет с повышением V_{10} .

Везде выше при описании результатов приводятся интервалы значений для V_{10} . Это объясняется тем, что зависимость параметров процесса деформирования от V_{20} слабая и лишь незначительно усиливается с ростом f .

В [3] при использовании в задачах рассматриваемого класса решений с квазипоперечной УВ рекомендуется проверять выполнение так называемого термодинамического условия совместности

$$(15) \quad -\rho^+ (V_n^+ - G) [V_j] [V_j] + 2\sigma_{jn}^+ [V_j] - 2(V_n^+ - G) [W] \geq 0.$$

Вычисления с различными значениями параметров задачи показали, что левая часть выражения (15) всегда положительна и возрастает с увеличением скорости соударения тел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буренин А. А., Лапыгин В. В., Чернышов А. Д. К решению плоских автомодельных задач нелинейной динамической теории упругости // *Нелинейные волны деформаций*.— Таллинн, 1978.— Т. 2.
2. Буренин А. А., Лапыгин В. В. Автомодельная задача об ударном нагружении упругого полупространства // *ПММ*.— 1979.— Т. 43, вып. 4.
3. Буренин А. А., Лапыгин В. В. Об отражении плоской продольной ударной волны постоянной интенсивности от плоской жесткой границы нелинейной упругой среды // *ПМТФ*.— 1985.— № 5.
4. Сабодаш П. Ф., Тихомиров Н. А., Навал И. К. Автомодельные движения физически нелинейной упругой среды, вызванные локальным выделением энергии // *Нелинейные волны деформаций*.— Таллинн, 1978.— Т. 2.
5. Буренин А. А., Чернышов А. Д. Ударные волны в изотропном упругом пространстве // *ПММ*.— 1978.— Т. 42, вып. 4.
6. Гольденблат И. И. *Нелинейные проблемы теории упругости*.— М.: Наука, 1969.
7. Томас Т. *Пластическое течение и разрушение в твердых телах*.— М.: Мир, 1964.

г. Воронеж, г. Куйбышев

Поступила 28/VII 1987 г.,

в окончательном варианте — 3/VIII 1988 г.

УДК 539.3:536.2

А. Л. Каламбаров

ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ КОНСТРУКТИВНО-НЕОДНОРОДНЫХ ОБОЛОЧЕК РЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ

В различных областях техники применяются конструктивно-неоднородные оболочки, обладающие регулярной структурой. К их числу относятся тонкие оболочки, подкрепленные регулярным набором часто поставленных продольных или поперечных ребер жесткости (ребристые оболочки), продольно-поперечной системой стрингеров (вафельные оболочки), трехслойные оболочки с наполнителем сотовой структуры (сотовые оболочки), а также различные сетчатые и каркасные оболочки и пластины. Эти и другие конструктивно-неоднородные оболочки эксплуатируются обычно в условиях переменных тепловых полей, резких перепадов температуры, поэтому решение задач теплопроводности и термоупругости для них представляет практический интерес.

Быстрая осцилляция коэффициентов уравнений и граничных условий для таких конструктивных элементов делает задачу в точной постановке практически неразрешимой даже с использованием быстродействующих ЭВМ. С этим связана необходимость разработки некоторых приближенных методов, например конструктивно-анизотропных подходов. Регулярная структура оболочек позволяет применить к их расчету асимптотический метод осреднения периодических структур, на основании которого в [1—3] рассмотрены задачи теории упругости, теплопроводности и термоупругости для композиционных и каркасных материалов регулярного строения. Метод осреднения [1—3] применим для регулярно неоднородных сред, обладающих периодической структурой во всех трех измерениях. Конструктивно-неоднородные оболочки, рассматриваемые в данной работе, не являются ни одномерными или двумерными композитами (типа слоистых или волокнистых материалов), ни трехмерными композитами (типа гранулированных материалов). Периодичность имеется только по двум тангенциальным координатам, введенным на срединной поверхности оболочки или обшивки, а по поперечной координате ее нет. При этом малые размеры периода и толщина оболочки соизмеримы, а на верхней и нижней поверхностях оболочки задаются силовые и тепловые граничные условия. Указанные особенности конструктивных элементов требуют специального (отличного от изложенного в [1—3]) асимптотического анализа соответствующих пространственных задач для тонкого слоя, который бы совмещал асимптотический переход от трехмерной задачи к двумерной оболочечной и переход (по методу осреднения) от неоднородного (композиционного) материала к эквивалентному однородному (квазиоднородному). Впервые в рамках теории упругости двухмасштабный асимптотический метод в такой постановке для пластины предложен в [4, 5]. В [6] построены и обоснованы полные асимптотические разложения в трехмерной задаче теории упругости для тонкой пластины с толщиной, равной характерному размеру неоднородностей. В [7, 8] проведен асимптотический анализ трехмерной задачи теории упругости для тонкой однородной пластины с быстро осциллирующей толщиной. Достаточно полный обзор работ, связанных с применением метода осреднения в задачах механики деформируемого твердого тела, представлен в [9]. В [10, 11] в рамках теории упругости без принятия каких-либо упрощающих гипотез произведен асимптотический переход от пространственной задачи для искривленного регулярно неоднородного слоя с быстро осциллирующей толщиной к модели осредненной оболочки. В [12] аналогичный анализ проведен для задачи теплопроводности в случае условий теплооб-