

5. Кунин И.А., Соснина Э.Г. Эллипсоидальная неоднородность в упругой среде // ДАН СССР. — 1971. — Т. 199, № 3. — С. 571—574.
6. Миренкова Г.Н., Соснина Э.Г. Жесткий эллипсоидальный диск и игла в анизотропной упругой среде // ПММ. — 1981. — Т. 45, вып. 1. — С. 165—170.
7. Kinoshita N., Mura T. Elastic fields of inclusions in anisotropic media // Phys. Stat. Sol. (a). — 1971. — V. 5, N 3. — P. 759—768.
8. Asaro R.I., Barnett D.M. The non-uniform transformation strain problem for an anisotropic ellipsoidal inclusion // J. Mech. and Phys. Solids. — 1975. — V. 23, N 1. — P. 77—83.
9. Кунин И.А., Соснина Э.Г. Локальные неоднородности в упругой среде // ПММ. — 1970. — Т. 34, вып. 3. — С. 422—428.
10. Kunin I. On elastic crack-inclusion interaction // Intern. J. Solids and Struct. — 1985. — V. 21, N 7. — P. 757—766.

г. Новосибирск

Поступила 9/IV 1993 г.

УДК 539.4

А.Г. Котоусов

ЭНЕРГОВОЛНОВОЙ ПОДХОД В МЕХАНИКЕ ХРУПКОГО ДИНАМИЧЕСКОГО РАЗРУШЕНИЯ

Практически во всех публикациях по проблемам хрупкого динамического разрушения отмечаются большие трудности при проведении как теоретических, так и экспериментальных исследований. Аналитические решения модельных задач известны лишь для бесконечных областей, практическая же значимость этих решений в полной мере еще не раскрыта. Кроме того, поиск аналитических или численно-аналитических решений при произвольном законе распространения трещины даже для бесконечных областей представляет собой «весьма сложную задачу» [1]. Поэтому в данной области механики твердого деформируемого тела чрезвычайно актуальна разработка новых подходов, быть может, менее общих, но «дающих более обозримые результаты» [1].

В настоящей работе предлагается один из таких подходов, основанный на энергетическом принципе и принципе «временного разделения». На базе этих принципов сформулирован так называемый волновой критерий разрушения, который можно использовать для решения конкретных практических задач механики хрупкого динамического разрушения.

1. Постановка задачи. Рассматривается линейно-упругое тело (изотропное или анизотропное, однородное или неоднородное) в ортогональной (декартовой) системе координат $\{0, x, y, z\}$, содержащее дефекты типа трещин, полостей и т.п. (рис. 1). На тело действуют внешние силы, приводящие к тому, что в момент времени $t = 0$, определяемый условиями (критериями) старта (разрушения), из наиболее нагруженной точки тела (источника разрушения) начинает распространяться магистральная трещина. Ставится задача об оценке динамического роста этой трещины.

2. Энерговолновой подход. Основная идея разрабатываемого подхода состоит в отказе от поиска точного решения этой задачи, а вместо этого предлагается построение верхних интегральных оценок динамического роста трещины. Эти интегральные оценки строятся на основе невозмущенного распространением трещины решения соответствующей динамической (или статической) задачи, процесс получения которого, несомненно, проще.

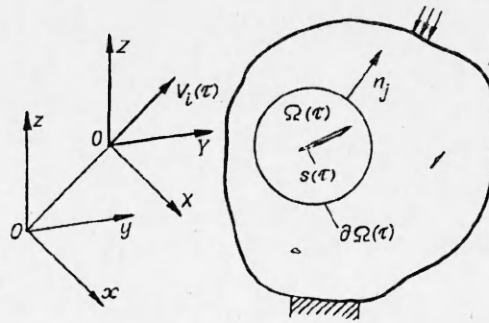
Запишем закон сохранения энергии для тела конечных размеров. В общем случае он имеет вид [2]

$$(2.1) \quad d(U + K) + dW = dA + dQ,$$

© А.Г. Котоусов, 1994

где U — внутренняя энергия тела; K — кинетическая энергия; dW — приращение работы разрушения, которая необходима для образования новой поверхности разрыва. Справа стоит общий приток энергии к телу извне за счет работы объемных и поверхностных макроскопических сил dA и внешнего притока тепла dQ .

Предполагается, что объемные макроскопические силы и внешний приток тепла dQ отсутствуют, либо настолько малы, что ими можно пренебречь. Интегрирование равенства (2.1) по времени в промежутке от $t = 0$ до $t = \tau$ для некоторого произвольного материального объема Ω , ограниченного поверхностью $\partial\Omega$ (рис. 1), с учетом сделанных предположений приводит к соотношению



Р и с. 1

$$(2.2) \quad (U + K) - (U^0 + K^0) + W = A.$$

Здесь U^0 и K^0 соответствуют начальным значениям (значениям при старте трещины, т.е. при $t = 0$) внутренней и кинетической энергии тела, а U и K — конечным значениям ($t = \tau$).

Из (2.2) легко получить верхнюю оценку работы разрушения W . Учítывая, что для упругой среды $(U + K) \geq 0$, для W имеем неравенство

$$(2.3) \quad W \leq L = A + (U^0 + K^0).$$

Несмотря на существенные упрощения, последнее неравенство, записанное для произвольного материального объема Ω , не позволяет получать численных оценок работы разрушения W , поскольку для этого необходимо знать работу внешних сил A на поверхности $\partial\Omega$ рассматриваемого материального объема как функцию времени, т.е. $A = A(\tau)$, которая в общем случае может быть найдена лишь из точного решения задачи. Но при этом все упрощения, сделанные для получения интегральных оценок, теряют смысл.

Но если в качестве Ω выбрать волновой объем (область влияния) процесса разрушения — материальный объем тела, охваченный возмущением от разрушения, т.е. от образующейся новой поверхности разрыва в момент времени $t = \tau$, то значение внешней подводимой энергии за счет работы поверхностных макроскопических сил в этот объем за промежуток времени $[0.. \tau]$ будет целиком определяться решением соответствующей задачи со стационарными дефектами, другими словами, решением, «не возмущенным» ростом трещины. Действительно, точки на поверхности $\partial\Omega$ «не знают» о начале процесса разрушения в промежутке времени от 0 до τ , поскольку возмущение от распространения трещины приходит к ним согласно определению волнового объема только в момент времени $t = \tau$ (предполагается, что берега трещины свободны от внешней нагрузки).

С введением в рассмотрение волнового объема $\Omega(\tau)$ удастся достичь так называемого «временного разделения» (временной декомпозиции) процессов разрушения и подвода внешней энергии к этому объему. Таким образом, если $\Omega(\tau)$ — волновой объем, то для выполнения оценок, согласно (2.3), достаточно знать решение соответствующей задачи при условии, что разрушение отсутствует, т.е. трещина не распространяется. Решение при условии стационарности трещины (трещина может двигаться, но не распространяться) можно получить, используя хорошо известные и надежные аналитические и численные методы [3].

Все рассуждения остаются справедливыми и для любого другого объема, охватывающего волновой, но при этом можно показать, что точность оценок (2.3) снижается.

Возвращаясь к выражению (2.3) для полной энергии L волнового объема $\Omega(\tau)$, заметим, что оно инвариантно относительно выбора системы отсчета. Рассматривая (2.3) относительно разных инерциальных систем отсчета, движущихся относительно друг друга с ненулевой скоростью, получим целый спектр верхних оценок работы разрушения, из которых желательно выбрать наименьшую, так как она наиболее близка к реальным значениям работы разрушения.

3. Волновой критерий разрушения. Неравенство (2.3) в компонентном виде можно записать следующим образом:

$$(3.1) \quad W(\tau) \leq L(\tau) = \frac{1}{2} \int_{\Omega(\tau)} (\sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0 + \rho v_i^0 v_i^0) d\Omega + \int_0^\tau \int_{\partial\Omega(\tau)} \sigma_{ij}^0 v_i n_j d\omega dt.$$

Здесь σ_{ij} и ε_{ij} — тензоры напряжений и деформаций; v_i — материальная скорость частиц относительно выбранной системы отсчета; n_j — единичный вектор нормали к внешней поверхности $\partial\Omega$; верхний индекс 0 у величины показывает, что ее значение берется в начальный момент времени, т.е. в момент старта трещины ($t = 0$); $\Omega(\tau)$ — волновой объем процесса разрушения; τ — момент времени, для которого проводится оценка работы разрушения $W(\tau)$; t — текущее время, отсчитываемое от начала разрушения; $t \in [0 \dots \tau]$; $\partial\Omega(\tau)$ — поверхность волнового объема; $d\Omega$ и $d\omega$ — элементы объема и поверхности $\Omega(\tau)$ соответственно, по которым проводится интегрирование в (3.1). Очевидно, что выражение, стоящее в правой части, зависит от выбора системы отсчета, т.е. оно не инвариантно относительно преобразований Галилея.

Рассматривая (3.1) в другой инерциальной системе отсчета, движущейся относительно первоначальной с ненулевой скоростью V_i , получим новую, отличную от первоначальной, оценку $W(\tau)$. Имеет смысл для каждого момента времени τ выбрать такую систему отсчета, в которой верхняя оценка (3.1) будет минимальна. Компоненты скорости перемещения такой (новой) системы отсчета $\{O, X, Y, Z\}$ относительно старой $\{O, x, y, z\}$ (см. рис. 1) будут определяться соотношениями

$$(3.2) \quad V_i(\tau) = \frac{1}{\int_{\Omega(\tau)} \rho d\Omega} \left\{ \int_{\Omega(\tau)} \rho v_i^0 d\Omega + \int_0^\tau \int_{\partial\Omega(\tau)} \sigma_{ij}^0 n_j d\omega dt \right\},$$

получающимися при отыскании минимума (3.1) в зависимости от выбора системы отсчета.

Тогда неравенство (3.1) в системе координат, определяемой формулой (3.2) и осями, коллинеарными старой (см. рис. 1), запишется в виде

$$(3.3) \quad W(\tau) \leq L(\tau) = \frac{1}{2} \int_{\Omega(\tau)} (\sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0 + \rho (v_i^0 - V_i(\tau))^2) d\Omega + \int_0^\tau \int_{\partial\Omega(\tau)} \sigma_{ij}^0 (v_i - V_i(\tau)) n_j d\omega dt.$$

Таким образом, (3.2) и (3.3) будут давать наиболее точную в рамках предлагаемого подхода верхнюю оценку работы разрушения в упругом теле; в дальнейшем будем называть их волновым критерием разрушения.

Для практических приложений важно знать не столько оценку работы разрушения $W(\tau)$, сколько непосредственно подрастание трещины (площадь поверхности разрушения) s . Для тел, разрушающихся хрупким образом, можно принять [2], что

$$(3.4) \quad dW = 2\gamma ds,$$

где γ — удельная работа разрушения, необходимая для образования новой единичной поверхности разрыва. Она может зависеть от многих параметров.

Рассмотрим случай, когда $\gamma = \gamma(V)$, т.е. удельная работа разрушения является функцией только скорости трещины V .

В плоском случае для s имеют место два соотношения:

$$(3.5) \quad s = \int_0^{\tau} V dt;$$

$$(3.6) \quad 2 \int_0^{s(\tau)} \gamma(V) ds = W(\tau) \leq L(\tau).$$

Методами вариационного исчисления можно показать, что функционал (3.5) относительно $V = V(t)$ при ограничении (3.6) при выполнении условия

$$(3.7) \quad \frac{\partial^2}{\partial V^2} (\gamma(V)V) > 0$$

имеет максимум

$$(3.8) \quad s^* = V^* \tau,$$

где V^* — наибольший корень алгебраического уравнения

$$(3.9) \quad 2\gamma(V)V = \frac{L(\tau)}{\tau}.$$

Таким образом, (3.8) и (3.9) представляют собой верхнюю оценку подрастания трещины в рамках линейной механики разрушения.

Обзор динамических свойств различных материалов [4] показывает, что условие (3.7) практически всегда соблюдается. Особым является случай $\gamma = \text{const}$. Для него

$$(3.10) \quad s^* = \frac{L(\tau)}{2\gamma}.$$

Логично V^* назвать средней скоростью распространения трещины, а $\gamma^* = \gamma(V^*)$ — удельной динамической работой разрушения.

Волновой критерий легко обобщается на случаи распространения конечного числа трещин, ветвления трещины (или на их комбинацию).

4. Следствия волнового критерия разрушения. Рассмотрим очевидные следствия волнового критерия разрушения. Если тело находится в равновесии и, следовательно, $v_i = \text{const}$, то (3.3) преобразуется в неравенство

$$(4.1) \quad W(\tau) \leq L(\tau) = \frac{1}{2} \int_{\Omega(\tau)} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}) d\Omega.$$

Индекс 0 можно опустить, так как решение вне волнового объема в начальный момент времени совпадает с решением и при $t > 0$.

Отметим, что сформулированный в [5] на основе анализа большого числа экспериментальных данных по динамическому разрушению так называемый «интегральный энергетический критерий разрушения» сводится к (4.1). Этот критерий в [5] применялся для оценки параметров разрушения цилиндрических оболочек, нагруженных интенсивным внутренним давлением, но, как видно из предыдущих рассуждений, применение (4.1) к таким задачам не совсем корректно.

Еще одно следствие касается случая, когда силовые члены волнового критерия малы по сравнению с инерциальными, тогда (3.3) сводится к соотношению

$$(4.2) \quad W(\tau) \leq L(\tau) = \frac{1}{2} \int_{\Omega(\tau)} (\rho v_i^0 v_i^0) d\Omega,$$

где v_i^0 вычислено относительно системы отсчета, связанной с центром инерции волнового объема $\Omega(\tau)$ при $t = 0$. Подобный критерий применялся для оценки параметров высокоскоростного импульсного разрушения композитных материалов.

Для практического использования волнового критерия разрушения и его следствий (4.1), (4.2) необходимо заранее определить направление движения трещины. Оно может быть задано из соображений симметрии задачи либо выбрано как наиболее опасное или нежелательное.

5. Методика оценки параметров динамического разрушения конструкций на основе волнового критерия разрушения. Такая методика состоит из нескольких шагов (этапов).

1. Определение внешних и внутренних нагрузок и различных факторов, действующих на конструкцию.

2. Решение динамической (статической) задачи и нахождение параметров напряженно-деформируемого состояния конструкции без учета распространения дефектов.

3. Определение наиболее нагруженной точки тела (источника разрушения) и момента страгивания трещины в соответствии с условиями (критериями) старта ($K \geq K_c, J \geq J_c, \dots$).

4. Для дискретных моментов времени находятся волновые объемы исходя из общих принципов построения волновых поверхностей или лучей [6].

5. Для выбранных моментов времени по формуле (3.2) определяется система координат для получения наиболее точной в рамках подхода верхней оценки динамического роста трещины $s = s(\tau)$.

6. Задается направление распространения трещины исходя из соображений симметрии или как наиболее опасное и нежелательное для данной конструкции.

7. Собственно оценка динамического роста трещины в соответствии с критериальным соотношением (3.3) и соотношениями (3.8)—(3.10).

6. Пример. Приведем пример оценки динамического роста трещины в однородном изотропном линейно-упругом теле в соответствии с вышеизложенным подходом.

Рассматривается рост малой трещины под действием прямоугольного импульса нагрузки длительностью Δ ($C\Delta \gg a$ — длины трещины) с напряжениями σ_0 ($\sigma_0 > 0$). Предполагается, что растягивающие напряжения σ_0 настолько велики, что критерием старта трещины будет приход в ее вершину переднего фронта импульса 1, а критерием остановки — приход заднего фронта 2 (рис. 2).

На рис. 2 показана волновая картина, возникающая при падении импульса на малую трещину. Из нее видно, что параметры напряженно-деформированного состояния на поверхности волнового объема $\partial\Omega$ в промежутке от $t = 0$ до $t = \tau$ равны либо нулю, либо параметрам падающего импульса, т.е. $\sigma_{yy} = \sigma_0, v_y = v_0$, где $v_0 = \sigma_0/(\rho C)$ (считается, что $v_0 \ll C$); таким образом, полная энергия L волнового объема $\Omega(\tau)$ не зависит от процесса разрушения. Зная L , легко по формулам (3.8)—(3.10) оценить подрастание трещины s .

На рис. 3 показана верхняя оценка подрастания трещины $\bar{s}, \bar{s}(\alpha) = s\gamma\rho/(\Delta\sigma_0)^2$ в зависимости от безразмерного времени $\alpha = \tau/\Delta$, полученная при подстановке значений напряжений, деформаций и скоростей в волновой критерий разрушения (3.3) (предполагалось, что $\gamma = \gamma(0) = \text{const}$).

7. Ограничения энерговолнового подхода. Подход имеет очевидные ограничения в своем применении к задачам динамического разрушения, связанные с выходом волнового объема на границы тела. Однако для жесткозакрепленных или свободных границ подход можно легко обобщить (волновой объем строится без учета этих границ, поскольку поток энергии через них равен нулю, и, следовательно, полная энергия волнового объема L остается без изменений). Оценки будут справедливыми и в том случае, если скорость подвода внешней энергии к телу значительно меньше скорости ее расходования, т.е. много меньше скорости энергии, поглощаемой при

