

**ОПТИМАЛЬНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА
ПРИ РЕШЕНИИ ПРЯМЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЗОНДИРОВАНИЙ**

А.Ф. Мастрюков, Б.Г. Михайленко

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
630090, Новосибирск, просп. Академика Лаврентьева, 6, Россия*

В настоящей работе рассматривается решение двумерных уравнений Максвелла с использованием преобразования Лагерра. Получены и приведены оптимальные параметры разностных схем для этих уравнений. Указаны численные значения этих оптимальных параметров.

Разностные схемы 2-го порядка с оптимальными параметрами дают точность решения уравнений, близкую точности решения схемой 4-го порядка.

Показано, что при использовании разложения Лагерра число оптимальных параметров в сравнении с разложением Фурье можно сократить. Это сокращение приводит к упрощению разностной схемы и сокращению объема вычислений, т.е. эффективности алгоритма.

Уравнения Максвелла, электромагнитные волны, конечно-разностный метод, метод Лагерра.

**OPTIMAL DIFFERENCE SCHEMES FOR MAXWELL'S EQUATIONS IN SOLVING
FORWARD PROBLEMS OF ELECTROMAGNETIC SOUNDINGS**

A.F. Mastryukov and B.G. Mikhailenko

In this paper, the solution of two-dimensional Maxwell's equations is considered using the Laguerre transform. Optimal parameters of the difference schemes for the equations are obtained and presented. Numerical values of these optimal parameters are given. Second-order difference schemes with the optimal parameters provide an accuracy of the solution of the equations that is comparable to the accuracy of the solution using fourth-order schemes. It is shown that, when using the Laguerre transform, the number of optimal parameters can be reduced compared to the Fourier transform. This reduction leads to a simplification of the difference scheme and a reduction in the amount of computation, i.e., to efficiency of the algorithm.

Maxwell's equations, electromagnetic waves, finite difference method, Laguerre method

ВВЕДЕНИЕ

При численном решении уравнений Максвелла используются как конечно-разностные методы, так и спектральные методы. Каждый из них имеет свои преимущества. Конечно разностный метод прост в программной реализации и экономичен [Bergmann et al., 1998; Bergmann et al., 1999; Глинских и др., 2014]. Спектральный метод позволяет более эффективно решать задачи со сложной зависимостью электромагнитных параметров от времени [Антонов и др., 2014; Ельцов и др., 2014; Кожевников и др., 2014], например, в случае с релаксацией проводимости и диэлектрической проницаемости, которая выражается в интегральной форме [Luebbers, Hansberger, 1992; Turner, Siggins, 1994]. Кроме этого, есть задачи, где необходимо рассмотрение электромагнитного поля на одной частоте, такие как частотные зондирования в электроразведке [Электроразведка, 1980].

Зачастую спектральный метод более удобен при решении обратных задач [Глинских и др., 2014] оптимизационным методом. Здесь более просто вычисляется градиент решения уравнений по искомым параметрам обратной задачи. Но градиент решения необходимо вычислить как можно точнее. Точности разностных схем 2-го порядка по шагу сетки может оказаться недостаточно, тогда надо использовать разностные схемы более высокого порядка, чем второй. Есть и другие задачи, требующие высокой точности решения, например задачи, учитывающие тонкую структуру электромагнитного поля [Могилатов

Злобинский, 2014] или тонкую структуру среды. Разностные схемы 4-го порядка могут подойти для таких задач. Но матрица системы линейных алгебраических уравнений, к которой сводятся разностные уравнения, имеет большую плотность заполнения, и лента этой матрицы оказывается широкой, что может вести к плохой обусловленности [Голуб, 1999] этой матрицы и, соответственно, потери численной эффективности всего алгоритма и к большому времени счета. Необходимы разностные схемы, имеющие высокую точность, малую плотность заполнения матрицы и более компактную, т.е. имеющую узкую ленту матрицы, или хотя бы одно-два из трех свойств. Кроме того, для разностных схем 4-го порядка существенно сложнее, чем для разностных схем 2-го порядка, удовлетворять условия на границе области решения [Штабель и др., 2014]. Поэтому были разработаны разностные схемы 2-го порядка аппроксимации, имеющие повышенную точность. Это достигалось введением дополнительных параметров в разностную схему.

В работе [Jo et al., 1996] была предложена оптимальная разностная схема для решения волнового уравнения в спектральной области. В разностное уравнение 2-го порядка аппроксимации для заданной гармонике Фурье вводятся три дополнительных параметра. Значения этих параметров определяются минимизацией погрешности численного решения на точном аналитическом решении. Алгоритм рассматривается при равных пространственных шагах разностной сетки. Обобщение для неравных шагов было предложено [Chen, 2012] введением средних значений в пространственные производные. В этом случае оптимизация проводилась по четырем параметрам.

В работах [Конюх, Михайленко, 1998; Mikhailenko, 1999] был предложен метод для решения волнового уравнения, основанный на разложении Лагерра по временной переменной. Он использовался и для решения уравнений Максвелла [Мастрюков, Михайленко, 2003; Мастрюков, Михайленко, 2006].

Этот метод для таких задач устойчив и достаточно эффективен. Эффективность метода обусловлена видом уравнений для гармоник Лагерра. Левая часть этих уравнений не зависит от номера гармоники, а меняется только правая часть этой системы. Это можно использовать при построении численного алгоритма, и это является существенным достоинством метода. Кроме того, система уравнений для гармоник всегда содержит только действительные переменные. В ряде задач этот метод по эффективности в несколько раз превосходит метод Фурье.

В настоящей работе рассматривается решение двумерных уравнений Максвелла с использованием преобразования Лагерра. Получены и приведены оптимальные параметры разностных схем для этих уравнений. Указаны численные значения этих оптимальных параметров.

Показано, что при использовании разложения Лагерра число оптимальных параметров в сравнении с разложением Фурье можно сократить. Это сокращение приводит к упрощению разностной схемы и сокращению объема вычислений, т.е. эффективности.

Проведены расчеты, показывающие, что разностная схема 2-го порядка с оптимальными параметрами дает точность решения уравнений Максвелла, близкую к точности решения разностной схемой 4-го порядка.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнения Максвелла для электромагнитного поля имеют вид [Электроразведка, 1980]

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} + \mathbf{J}_s, \\ \nabla \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathbf{H} — напряженность магнитного поля, \mathbf{D} — электрическая индукция, \mathbf{J} — ток проводимости, \mathbf{J}_s — ток внешнего источника, \mathbf{E} — напряженность электрического поля, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ — магнитная индукция.

Будем полагать, что магнитная проницаемость постоянна во времени, а релаксационные свойства среды задаются зависимостью от времени диэлектрической проницаемости и проводимости, связь электрической индукции и тока проводимости с напряженностью электрического поля выражается соотношениями [Bergmann et al., 1998; Bergmann et al., 1999]

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} * \mathbf{E}, \\ \mathbf{J} &= \frac{\partial \sigma}{\partial t} * \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (2)$$

где знак * означает свертку.

Зависимость от времени диэлектрической проницаемости задается в виде [Carcione, 1996; Xu, McMechan, 1997] суммы релаксационных функций

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_s \left(1 - \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left(1 - \frac{\tau_{El}}{\tau_{Dl}} \right) \exp(-t/\tau_{Dl}) \right) H(t), \quad (3)$$

где ε_s — статическое значение диэлектрической проницаемости, τ_{El} — время релаксации напряженности электрического поля, τ_{Dl} — время релаксации электрической индукции, L — число механизмов релаксации. Здесь каждый механизм характеризуется двумя временами релаксации τ_{Dl} , τ_{El} . Зависимость от времени проводимости среды бралась в виде

$$\sigma(t) = \sigma_s (H(t) + \tau_\sigma \delta(t)), \quad (4)$$

где σ_s — статическое значение проводимости, τ_σ — время релаксации проводимости, характеризующее сдвиг по фазе проводимости, $H(t)$ — ступенчатая функция Хевисайда, $\delta(t)$ — дельта-функция.

При таком определении $\varepsilon(t)$, $\sigma(t)$ уравнения Максвелла в двумерном случае принимают вид

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad (5)$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon^e \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma^e E_x + \varepsilon_s \sum_{l=1}^L m_l + J_x, \quad (6)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon^e \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma^e E_z + \varepsilon_s \sum_{l=1}^L m_l + J_z, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = - \left(\frac{\mathbf{m}}{\tau_{Dl}} + \frac{1}{\tau_{Dl}^2} \left(1 - \frac{\tau_{El}}{\tau_{Dl}} \right) \right) \mathbf{E}, \quad (8)$$

$$\mathbf{m}_l = - \frac{1}{L} \left(\frac{1}{\tau_{Dl}^2} \left(1 - \frac{\tau_{El}}{\tau_{Dl}} \right) \exp(-t/\tau_{Dl}) H(t) \right) * \mathbf{E}.$$

Здесь введены эффективные значения диэлектрической проницаемости ε^e и проводимости σ^e

$$\varepsilon^e = \varepsilon_s \left(\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \frac{\tau_{El}}{\tau_{Dl}} \right) + \sigma_s \tau_\sigma, \quad (9)$$

$$\sigma^e = \sigma_s + \varepsilon_s \left(\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \frac{1}{\tau_{Dl}} \left(1 - \frac{\tau_{El}}{\tau_{Dl}} \right) \right), \quad (10)$$

и J_y , где y — компонента внешнего источника. В дальнейшем, для простоты, будем полагать, что $L=1$, и потому будем опускать индекс l в уравнениях.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАГЕРРА

Будем использовать преобразование Лагерра в форме [Конюх, Михайленко, 1998]

$$\phi_n = \int_0^\infty \phi(t) (ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_n^\alpha(ht) d(ht), \quad (11)$$

$$\phi(t) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^\infty \frac{n!}{(n+\alpha)!} \phi_n l_n^\alpha(ht), \quad (12)$$

где $l_n^\alpha(ht)$ — ортогональная функция Лагерра [Справочник..., 1979] степени n :

$$\int_0^\infty l_n^\alpha(ht) l_m^\alpha(ht) d(ht) = \delta_{nm} \frac{(n+\alpha)!}{n!}, \quad (13)$$

α — целая константа, h — параметр преобразования Лагерра.

Применим преобразование (11) к системе уравнений (5)—(8). В результате получим следующую систему уравнений для n -й гармоники электромагнитного поля

$$\frac{\partial E_{nx}}{\partial z} - \frac{\partial E_{nz}}{\partial x} = \mu \left(\frac{h}{2} H_{ny} + h \sum_{k=0}^{n-1} H_{ky} \right), \quad (14)$$

$$-\frac{\partial H_{ny}}{\partial z} = \varepsilon^e \left(\frac{h}{2} E_{nx} + h \sum_{k=0}^{n-1} E_{kx} \right) + \sigma^e E_{nx} + \varepsilon_s m_{nx} + J_{nx}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial H_{ny}}{\partial x} = \varepsilon^e \left(\frac{h}{2} E_{nz} + h \sum_{k=0}^{n-1} E_{kz} \right) + \sigma^e E_{nz} + \varepsilon_s m_{nz} + J_{nz}, \quad (16)$$

$$m_{ni} = -\frac{1}{(h/2 + 1/\tau_D)} \left(h \sum_{k=0}^{n-1} m_{ki} + \frac{1}{\tau_D^2} \left(1 - \frac{\tau_E}{\tau_D} \right) E_{ni} \right). \quad (17)$$

Рассмотрим несколько разностных аппроксимаций этих уравнений.

АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЙ

Определим магнитное поле $H_{i,j}$ в целых i, j узлах разностной сетки. Электрическое поле E_x определено в промежуточных точках разностной сетки $i+1/2, j$, а электрическое поле E_z определено в промежуточных точках разностной сетки $i, j+1/2$. Величину m_{ki} определим в тех же точках, что и электрическое поле. Схема расположения узлов изображена на рис. 1, а. Это сетка типа «staggered» [Yee, 1966], она хорошо центрирована.

Будем использовать в разностных производных средние значения поля [Chen, 2012] в перпендикулярном направлении. Здесь возможны несколько вариантов аппроксимации системы уравнений (14)—(16). Запишем вариант, где средние значения поля применяются только в разностных уравнениях, содержащих производные от электрического поля. В производных магнитного поля не будем использовать средние значения:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{E}_{x,i+1/2,j} - \bar{E}_{x,i-1/2,j}}{\Delta z} - \frac{\bar{E}_{z,i,j+1/2} - \bar{E}_{z,i,j-1/2}}{\Delta x} &= \mu \left(\frac{h}{2} \langle H_{yn} \rangle + h \sum_{k=0}^{n-1} \langle H_{yk} \rangle \right) - \\ - \frac{H_{ni+1,j} - H_{ni,j}}{\Delta z} &= \left(\varepsilon^e \left(\frac{h}{2} E_{nx} + h \sum_{k=0}^{n-1} E_{kx} \right) + \sigma^e E_{nx} + \varepsilon_s m_{nx} + J_{nx} \right)_{i+1/2,j}, \\ \frac{H_{ni,j+1} - H_{ni,j}}{\Delta x} &= \left(\varepsilon^e \left(\frac{h}{2} E_{nz} + h \sum_{k=0}^{n-1} E_{kz} \right) + \sigma^e E_{nz} + \varepsilon_s m_{nz} + J_{nz} \right)_{i,j+1/2}, \\ m_{ni} &= -\frac{1}{(h/2 + 1/\tau_D)} \left(h \sum_{k=0}^{n-1} m_{ki} + \frac{1}{\tau_D^2} \left(1 - \frac{\tau_E}{\tau_D} \right) E_{ni} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь у гармоники магнитного поля $H_{ni,j}$ опущен нижний индекс y , а у гармоники магнитного поля в правой части первого уравнения системы заменены средним по девяти точкам [Chen, 2012]:

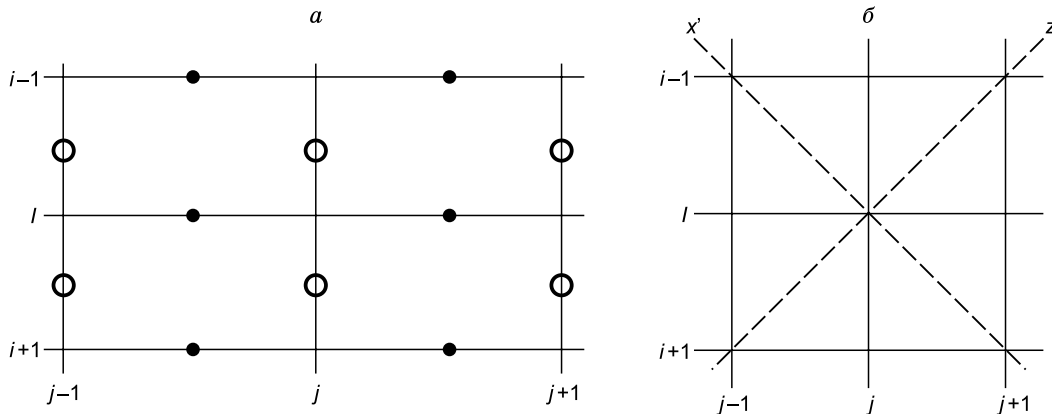


Рис. 1. Разностные сетки: типа «staggered» (а), с повернутой на 45° системой координат (б).

$$\begin{aligned} \langle H_{i,j} \rangle = & cH_{i,j} + d(H_{i,j+1} + H_{i,j-1} + H_{i+1,j} + H_{i-1,j}) + \\ & + e(H_{i+1,j+1} + H_{i+1,j-1} + H_{i-1,j+1} + 1 + H_{i-1,j-1}), \end{aligned} \quad (19)$$

где c, d, e весовые множители, удовлетворяющие соотношению

$$c + 4d + 4e = 1 \quad \text{или} \quad e = (1 - c - 4d)/4.$$

В правой части у магнитного поля опущен номер гармоники k , где $k = [0, n]$.

Сумма с множителем e аппроксимирует величину $4H_{i,j}$ с вторым порядком точности по угловым точкам 9-точечного разностного шаблона, сумма с множителем d аппроксимирует величину $4H_{i,j}$ с вторым порядком точности по промежуточным точкам 9-точечного разностного шаблона. При $c + 4d + 4e = 1$ выражение в правой части (19) аппроксимирует магнитное поле $H_{i,j}$ с вторым порядком точности.

В разностных производных по z

$$\begin{aligned} \bar{E}_{x,i+1/2,j} &= \frac{1-\beta}{2} E_{x,i+1/2,j+1} + \beta E_{x,i+1/2,j} + \frac{1-\beta}{2} E_{x,i+1/2,j-1}, \\ \bar{E}_{x,i-1/2,j} &= \frac{1-\beta}{2} E_{x,i-1/2,j+1} + \beta E_{x,i-1/2,j} + \frac{1-\beta}{2} E_{x,i-1/2,j-1}, \end{aligned} \quad (20)$$

и в разностных производных по x

$$\begin{aligned} \bar{E}_{z,i,j+1/2} &= \frac{1-\alpha}{2} E_{z,i,j+1/2} + \alpha E_{z,i,j+1/2} + \frac{1-\alpha}{2} E_{z,i-1,j+1/2}, \\ \bar{E}_{z,i,j-1/2} &= \frac{1-\alpha}{2} E_{z,i,j-1/2} + \alpha E_{z,i,j-1/2} + \frac{1-\alpha}{2} E_{z,i-1,j-1/2}. \end{aligned} \quad (21)$$

В правых частях выражений (20), (21), для простоты, опущен номер гармоники n .

Такая аппроксимация допускает неравные шаги разностной схемы по пространственным координатам. Однако наиболее интересен случай равных шагов, когда $\alpha = \beta$, и остается три параметра, для которых надо определить значения, оптимальные для точности решения уравнений.

Важно отметить, что возможны другие варианты аппроксимации уравнений. Можно использовать средние значения во всех разностных производных или только в производных электрического поля и не использовать в производных магнитного поля и т.д. Разные варианты приводят к разным системам линейных алгебраических уравнений, матрицы которых имеют существенно разную структуру и разную плотность заполнения. Соответственно, численная эффективность решения при таких аппроксимациях, также существенно различается.

Это разностная схема второго порядка точности по шагу сетки. Подберем введенные параметры α, β, c, d таким образом, что такая аппроксимация была оптимальной для точности решения уравнений.

ВЫБОР ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Для однородной среды систему уравнений (14)–(16) можно представить в виде уравнения Гельмгольца. Для нулевой гармоники магнитного поля $H = H_{0y}$, без учета источников, уравнение принимает простой вид

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = k_0^2 H, \quad (22)$$

где

$$k_0^2 = \mu \frac{h}{2} \left(\varepsilon^e \frac{h}{2} + \sigma^e - \frac{\varepsilon_s}{(h/2 + 1/\tau_D)} \left(\frac{1}{\tau_D^2} \left(1 - \frac{\tau_E}{\tau_D} \right) \right) \right).$$

Это уравнение на разностной сетке можно записать, применяя средние значения магнитного поля, приведенные в предыдущем разделе

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{H}_{i+1,j} - 2\bar{H}_{i,j} + \bar{H}_{i-1,j}}{\Delta z^2} - \frac{\bar{H}_{i,j+1} - 2\bar{H}_{i,j} + \bar{H}_{i,j-1}}{\Delta x^2} = \\ & = cH_{i,j} + d(H_{i,j+1} + H_{i,j-1} + H_{i+1,j} + H_{i-1,j}) + \\ & + e(H_{i+1,j+1} + H_{i+1,j-1} + H_{i-1,j+1} + 1 + H_{i-1,j-1}). \end{aligned} \quad (23)$$

В случае равных шагов [Jo et al., 1996] эта схема переходит в схему, где разностные производные представляются в виде суммы разностных производных, записанных в обычных координатах x, z и координатах x', z' , повернутых на 45° , как это показано на рис. 1, б. Шаги разностной сетки в повернутой системе координат будут в $\sqrt{2}$ раза больше, чем у обычной сетки.

Уравнение (22) имеет точное решение

$$H = H_0 ch(k_x x) ch(k_z z), \quad k_x^2 + k_z^2 = k_0^2, \quad k_x = k_0 \sin \theta, \quad k_z = k_0 \cos \theta.$$

Подставим это решение в разностное уравнение (23). После простых преобразований получим соотношение вида $V^2(\theta, k) = 1$, где

$$\begin{aligned} V^2(\theta, k) = & \left((1 - \alpha) ch\left(\frac{k \cos \theta}{r}\right) + \alpha \right) (ch(k \sin \theta) - 1) + \\ & + r^2 \left((1 - \beta) ch(k \sin \theta) + \beta \left(ch\left(\frac{k \cos \theta}{r}\right) - 1 \right) \right) / \\ & / \left(k^2 \left(c/2 + d(ch(k \sin \theta) + ch\left(\frac{k \cos \theta}{r}\right)) \right) + 2ech(k \sin \theta) ch\left(\frac{k \cos \theta}{r}\right) \right) \end{aligned} \quad (24)$$

и $r = \Delta x / \Delta z$, $k = k_0 \Delta x$.

Будем искать параметры α, β, c, d требуя максимально точного выполнения этого соотношения, т.е. соотношения $V^2(\theta, k) = 1$ в пределах допустимых значений θ, k . Для этого будем минимизировать по параметрам α, β, c, d величину

$$I(r) = \iint (1 - V(\theta, k))^2 d\theta dk. \quad (25)$$

Пределы интегрирования по углу $\theta = [0, \pi/2]$. Пределы интегрирования по второй переменной от $k = 0$ до $k = 1.5$. Величина k определяет отношение шага разностной сетки Δx к характерному размеру $1/k_0$ изменения решения. Поэтому брать значения k значительно больше единицы не имеет смысла по причине очевидной потери точности.

Отметим, что значения оптимальных параметров, так определяемых, зависят только от одного параметра $r = \Delta x / \Delta z$, т.е. они являются универсальными для заданного соотношения шагов разностной схемы, поэтому мы укажем значения оптимальных параметров.

В табл. 1 приведены оптимальные значения параметров α, β, c, d, e для разных значений величины $r = \Delta x / \Delta z$. Указаны значения оптимальных параметров для двух разных верхних пределов интегрирования K по k в формуле (25).

Эти значения получены минимизацией величины $I(r)$ по искомым параметрам α, β, c, d методом сопряженных градиентов. Использование метода Ньютона приводит к изменению в пятом знаке. Это, как показали конкретные расчеты, несущественно. Достаточно учитывать четыре знака после запятой. Результаты практически совпадают.

При заданном верхнем пределе K , с ростом соотношения шагов разностной сети $r = \Delta x / \Delta z$ падают значения c , растут абсолютные значения d и e , значения e при этом всегда отрицательны. С ростом

Таблица 1. Значения четырех оптимальных параметров при $e \neq 0$

α	β	c	d	e	r	K
0.84861	0.84861	0.66672	0.08618	-0.00287	1.0	1.0
0.86614	0.86614	0.67991	0.08296	-0.00294	1.0	1.5
0.50071	1.00161	0.65290	0.09288	-0.00611	1.5	1.0
0.50946	1.02130	0.66570	0.08961	-0.00604	1.5	1.5
0.32002	0.98008	0.62434	0.10727	-0.01336	2.0	1.0
0.32501	1.00006	0.63888	0.10325	-0.01298	2.0	1.5
0.23540	0.94627	0.58432	0.12731	-0.02339	2.5	1.0
0.23851	0.96570	0.60073	0.12240	-0.02258	2.5	1.5
0.19125	0.92122	0.53428	0.15234	-0.03591	3.0	1.0
0.19334	0.94010	0.55276	0.14639	-0.03458	3.0	1.5

Таблица 2.

Значения трех оптимальных параметров при $e = 0$

α	β	c	d	r	K
0.84861	0.84655	0.67821	0.08044	1.0	1.0
0.49927	0.99836	0.67735	0.08066	1.5	1.0
0.31889	0.97558	0.67779	0.08055	2.0	1.0
0.23456	0.94105	0.67791	0.08052	2.5	1.0
0.19062	0.91559	0.67793	0.08051	3.0	1.0
0.16514	0.89803	0.67792	0.08051	3.5	1.0
0.14911	0.88578	0.67790	0.08052	4.0	1.0

$r = \Delta x / \Delta z$ минимальное значение $I(r)$, достигаемое в процедуре поиска оптимальных значений параметров α, β, c, d , монотонно падает. Поскольку малые значения $I(r)$ должны показывать лучшее приближение к точному решению, однако уже при $r = 3$ $\Delta x = 0.04$, решение уравнений Максвелла (18) с использованием оптимальных параметров оказывается неустойчивым. Число обусловленности матрицы здесь растет линейно с ростом r . Так, при росте r в 3 раза число обусловленности растет примерно в 4 раза.

Как показали конкретные расчеты уравнений (18), большие абсолютные значения параметра e соответствуют менее точному решению. Так, при $r = 2.5$, $K = 1.5$, где $e = -0.02258$, разностная схема уравнений Максвелла оказывалась устойчивой, но при $r = 2.5$, $\Delta x = 0.05$, $K = 1.0$, где $e = -0.02339$, разностная схема была неустойчива. Поэтому была рассмотрена разностная схема, где полагалось $e = 0$. Оптимальные значения искали при

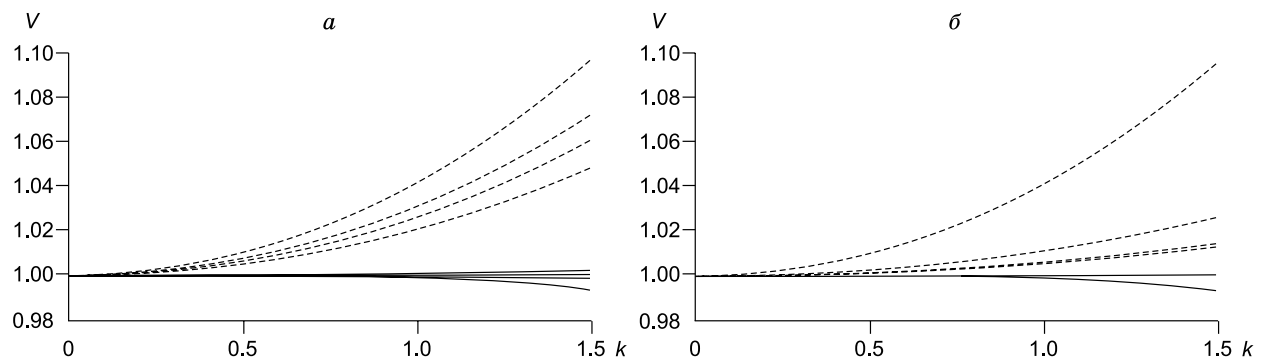
$$e = 0, d = (1 - c) / 4. \quad (26)$$

В табл. 2 приведены значения, соответствующие этому случаю. Здесь при всех значениях r разностная схема была устойчива. С ростом r значительно меняются только α, β , значения c, d меняются слабо, только в третьем знаке после запятой. Число обусловленности матрицы здесь также растет линейно с ростом r , рост слабее, чем в случае $e \neq 0$. При росте r в 3 раза число обусловленности растет примерно в 3 раза.

В таком переходе от четырех оптимальных параметров к трем состоит важное отличие метода, основанного на разложении Лагерра, от метода, использующего разложение Фурье. Это преимущество метода Лагерра, так как при выборе $e = 0$ уменьшается на 15—20 % плотность заполнения матрицы системы линейных алгебраических уравнений, получающихся из разностных уравнений. Соответственно на 15—20 % сокращается число операций при умножении матрицы на вектор — основной операции при итерационных методах решения алгебраических уравнений.

Эти данные приведены для случая $r \geq 1$. Для случая $r = \Delta x / \Delta z \leq 1$ все получается аналогично предыдущему с заменой $k = k_0 \Delta z$, $r = \Delta z / \Delta x$. Получающиеся здесь значения полностью совпадают со значениями, приведенными в таблицах 1 и 2 при обмене значениями α и β .

На рис. 2 приведены графики функции $V(\theta, k)$ для 5-точечной неоптимальной схемы ($\alpha = 1, \beta = 1, c = 1, d = 0, e = 0$) (штриховые линии) и для оптимальных параметров (сплошные линии) схемы при различных значениях угла θ в зависимости от величины k . Рис. 2, а получен при $r = 1.0$, рис. 2, б получен при $r = 2.5$. Оптимальные параметры соответствуют данным табл. 1.

Рис. 2. Графики функции $V(\theta, k)$ при разных углах θ .

Штриховая линия 5-точечная схема, сплошная линия — оптимальная схема; $r = 1$ (а), $r = 2.5$ (б).

Хорошо видно, что величина $V(\theta, k)$, показывающая погрешность решения, существенно меньше для оптимальных параметров, для которых величина $V(\theta, k)$ начинает сильно расти лишь при $k \geq 1$. До этого она мала, и в данном масштабе рисунков графики при разных углах θ сливаются.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Решение, полученное с использованием оптимальных параметров, будем сравнивать с решением, полученным конечно-разностным методом 4-го порядка точности как по времени, так и по пространству. В этом случае система уравнений (5)—(8) заменой переменных сводилась к системе уравнений волнового типа

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{w}}{dt} &= f(t, \mathbf{v}), \quad \mathbf{w} = (H_y, m_x \exp(t/\tau_D), m_z \exp(t/\tau_D)), \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= g(t, \mathbf{w}), \quad \mathbf{v} = (E_x \exp(\sigma^e t / \varepsilon^e), E_z \exp(\sigma^e t / \varepsilon^e)). \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь пространственные производные находятся в правых частях и уравнения записаны в виде обыкновенных дифференциальных уравнений. Запись уравнений в таком виде [Ghrist et al., 2000] позволяет строить разностные схемы высокого порядка точности по времени, как обычно это делается для обыкновенных дифференциальных уравнений. Такие конечно-разностные методы относятся к числу наиболее точных, наиболее эффективных и универсальных.

Источник тока брался в виде

$$\begin{aligned} J_x &= f(t)\delta(z - z_s), \quad J_z = 0, \\ f(t) &= J_0 \exp\left(-\frac{(2\pi f_0(t - t_0))^2}{\gamma^2}\right) \sin(2\pi f_0(t - t_0)), \end{aligned} \quad (28)$$

где f_0 — несущая частота источника, t_0 — момент центра импульса источника, z_s — точка расположения источника.

На границах области решения задавались поглощающие граничные условия, исключающие отражение отраженной от границ волны.

Точность решения оценивалась по величине относительной погрешности решения D , которая определялась выражением вида

$$D(t) = \frac{\int_0^\infty |E_x(z, t) - E_{0x}(z, t)| dz}{\int_0^\infty |E_{0x}(z, t)| dz}, \quad (29)$$

здесь E_x — решение, полученное с использованием оптимальных параметров, E_{0x} — решение уравнений (27) с использованием разностной схемы 4-го порядка точности. Величина $D(t)$ вычислялась для всех компонент электромагнитного поля.

На рис. 3, *a* показано распространение волны от точечного источника в направлении z (H_y — компоненты поля) в однородной среде. Сплошная линия соответствует решению оптимальной разностной схемой, штриховая линия соответствует решению обычной 5-точечной разностной схемой 2-го порядка. Видна существенная разница в решении двумя этими методами. Величина погрешности между ними, оцененная по формуле (29), составляет $D = 0.76$.

На этом же рисунке приведено решение разностной схемой 4-го порядка точности для уравнений (27). Оно неразличимо с решением оптимальной схемой. Относительная разница между решением оптимальной схемой и схемой 4-го порядка менее 1%.

Это случай однородной среды и оптимальные параметры также получены для однородной среды, поэтому близость результатов объяснима.

На рис. 3, *б* приведено распространение волны в неоднородной среде. Показано (E_x — компонента поля) прохождение электромагнитного импульса через слой в однородном пространстве. Расположение слоя показано штриховой линией. В слое диэлектрическая проницаемость в 2 раза больше, чем в окружающем однородном пространстве, проводимость в 3 раза больше, чем в окружающем однородном пространстве.

Здесь, в случае неоднородной среды, изображено решение разностной схемой 4-го порядка точности и оптимальной схемой. Два решения также графически неотличимы. Величина погрешности меж-

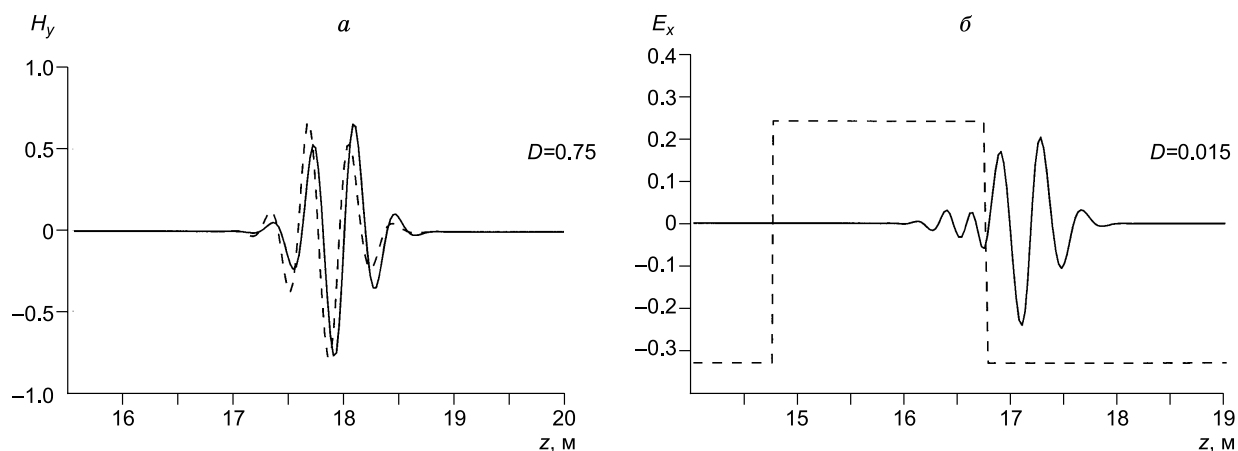


Рис. 3. Распространение импульса в однородной среде, расчет 5-точечной схемой (а), в неоднородной среде, расчет оптимальной схемой (б).

ду ними, оцененная по формуле (29), составляет $D = 0.015$, это в 50 раз меньше, чем разница с обычной 5-точечной схемой.

Проведенные расчеты показывают, что оптимальные схемы близки по точности к разностным схемам 4-го порядка точности.

Подобные тесты проведены при разных соотношениях шагов сетки $r = \Delta x / \Delta z$, разных параметрах сред и частоты источника. Показанные на рис. 3 графики получены при $r = 1.5$, после пробега импульсом 10—12 длин волн. На длину волны приходится 10 шагов разностной сетки Δx , частота источника f_0 равна 200 МГц, физические параметры однородной среды соответствуют электромагнитным параметрам сырого песка.

Указана величина погрешности D . В преобразовании Лагерра использовались 350 гармоник Лагерра, параметры $\alpha = 1, h = 100$.

Результаты на рис. 3 получены по схеме (18), когда средние значения использовались в производных электрического поля. Были протестированы еще два варианта аппроксимации уравнений (14)—(16). В первом варианте средние значения использовались только в производных магнитного поля, во втором варианте средние значения использовались во всех производных. В обоих случаях точность решения была существенно выше, чем по обычной 5-точечной разностной схеме 2-го порядка.

В первом варианте результаты аналогичны результатам, полученным по схеме (18). Плотность заполнения матрицы системы линейных алгебраических уравнений, получающихся из разностных уравнений, близка к плотности заполнения матрицы схемы (18). Числа обусловленности соответствующих матриц разностных уравнений также близки. Погрешность D , оцениваемая по формуле (29), совпадает с расчетом по схеме (18) с точностью до 1 %, но время счета на 4—5 % оказывалось меньше.

Во втором варианте, когда средние значения использовались во всех производных, ситуация существенно иная. Плотность заполнения матрицы здесь больше, чем в схеме (18), что ведет к увеличению числа арифметических операций. Но число обусловленности матрицы разностных уравнений меньше, чем в случае схемы (18), что вело к сокращению числа арифметических операций. В конечном итоге, время счета здесь оказывалось меньше, чем в случае схемы (18) на 10—15 %. Но погрешность D была в 2—3 раза больше, чем в схеме (18).

Если для аппроксимации пространственных производных использовать схему 4-го порядка без оптимизации, то время счета примерно на 10 % меньше, чем во втором варианте.

Отметим, что использование трех оптимальных параметров из табл. 2 всегда дают меньшие значения погрешности D , чем в случае использования четырех оптимальных параметров из табл. 1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование полученных оптимальных параметров разностных схем позволяет существенно повысить точность решения уравнений Максвелла в сравнении с обычными схемами 2-го порядка. Оптимальная схема дает точность решения, сравнимую с точностью решения схемой 4-го порядка.

В сравнении с методом Фурье, при использовании метода Лагерра число оптимальных параметров можно сократить. Это дает упрощение алгоритма, сокращение числа вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

Антонов Е.Ю., Кожевников Н.О., Корсаков М.А. Автоматизированная система для интерпретации данных индукционных импульсных электромагнитных зондирований с учетом индукционно-вызванной поляризации // Геология и геофизика, 2014, т. 55 (8), с. 1282—1293.

Глинских В.Н., Нестерова Г.В., Эпов М.И. Моделирование и инверсия данных электромагнитного каротажа с использованием петрофизических моделей электропроводности // Геология и геофизика, 2014, т. 55 (5—6), с. 1001—1016.

Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М., Мир, 1999, 548 с.

Ельцов Т.И., Доровский В.Н., Гапеев Д.Н. Низкочастотные диэлектрические спектры пород, насыщенных водонефтяной смесью // Геология и геофизика, 2014, т. 55 (8), с. 1270—1281.

Кожевников Н.О., Антонов Е.Ю., Камнев Я.К., Оленченко В.В., Плотников А.Е., Стефаненко С.М., Шейн А.Н. Влияние обсаженной скважины на индукционные переходные характеристики // Геология и геофизика, 2014, т. 55 (11), с. 1682—1691.

Конюх Г.В., Михайленко Б.Г. Применение интегрального преобразования Лагерра при решении динамических задач сейсмологии // Математическое моделирование в геофизике (Труды ИВМиМГ). Новосибирск, 1998, № 5, с. 107—112.

Мастрюков А.Ф., Михайленко Б.Г. Численное моделирование распространения электромагнитных волн в неоднородных средах с затуханием на основе спектрального преобразования Лагерра // Геология и геофизика, 2003, т. 44 (10), с. 1060—1069.

Мастрюков А.Ф., Михайленко Б.Г. Моделирование распространения электромагнитных волн в релаксационных средах на основе спектрального преобразования Лагерра // Геология и геофизика, 2006, т. 47 (3), с. 397—407.

Могилатов В.С., Злобинский А.В. Свойства кругового электрического диполя как источника поля для электроразведки // Геология и геофизика, 2014, т. 55 (11), с. 1692—1700.

Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. М., Наука, 1979, 832 с.

Штабель Н.В., Эпов М.И., Антонов Е.Ю., Корсаков М.А. Аппроксимация субвертикальной границы в задачах импульсных электромагнитных зондирований // Геология и геофизика, 2014, т. 55 (1), с. 108—118.

Электроразведка. Справочник геофизика / Под ред. А.Г. Тархова. М., Недра, 1980, 137 с.

Bergmann T., Robertsson J.O.A., Holliger K. Finite difference modeling of electromagnetic wave in dispersive and attenuating media // Geophysics, 1998, v. 63, p. 856—867.

Bergmann T., Blanch J. O., Robertsson J.O.A., Holliger K. A simplified Lax-Wendroff correction for staggered-grid FDTD modeling of electromagnetic wave in frequency-dependent media // Geophysics, 1999, v. 64, p. 1369—1377.

Carcione J.M. Ground-penetrating radar. Wave theory and numerical simulation in lossy anisotropic media // Geophysics, 1996, v. 61, p. 1664—1677.

Chen J.B. An average derivative optimal scheme for frequency-domain scalar wave equation // Geophysics, 2012, v. 77, p. T201—T210.

Ghrist M., Fornberg B., Driscoll T.A. Staggered time integrator for wave equations // SIAM J. Numer. Anal., 2000, v. 38, p. 718—741.

Jo C.H., Shin C., Suh H.S. An optimal 9-point, finite-difference, frequency-space, 2-d scalar wave extrapolator // Geophysics, 1996, v. 61, p. 529—537.

Luebbers R., Hansberger F.P. FDTD for Nth-order dispersive media // IEEE Trans. Ant Propog., 1992, v. 40, p. 1297—1301.

Mikhailenko B.G. Spectral Laguerre method for the approximate solution of time dependent problems // Appl. Mathem. Lett., 1999, v. 12, p. 105—110.

Turner G., Siggins A.F. Constant Q attenuation of subsurface radar pulses // Geophysics, 1994, v. 59, p. 1192—1200.

Xu T., McMechan G.A. GPR attenuation and its numerical simulation in 2.5-dimension // Geophysics, 1997, v. 62, p. 409—414.

Yee K. Numerical solution of initial boundary problems involving Maxwell's equations in isotropic media // IEEE Trans. Ant Propog., 1966, v. 14, № 3, p. 302—307.