

УДК 533.697.4

Влияние угла раскрытия конического сверхзвукового сопла на структуру начального участка неизобарической струи

В.Н. Ветлущий, В.Л. Ганимедов, М.И. Мучная

*Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск*

Рассматривается истечение идеального газа из бесконечного объема в покоящийся газ через сверхзвуковое коническое сопло Лавала. Задача решалась численно установлением по времени в единой постановке для областей внутри сопла и в затопленном пространстве. В такой постановке выходное сечение сопла не является внутренней границей рассматриваемой области, и ставить здесь граничные условия не нужно. Возникающие в течении локальные дозвуковые зоны находятся внутри рассматриваемой области, что исключает возможность использования маршевого метода по одной из координат. Численное решение строится по единому алгоритму для всей области течения, что дает возможность получить более высокую точность. Расчеты проводятся на начальном участке струи, где, согласно монографии [1], волновые явления преобладают по сравнению с вязкими эффектами.

Процесс истечения описывается системой уравнений газовой динамики. Их решение строится с помощью конечно-разностной TVD (Total Variation Diminishing)–схемы Хартена [2], которая имеет второй порядок аппроксимации по пространству. Второй порядок аппроксимации по времени достигнут с помощью пятишагового метода Рунге–Кутты. Алгоритм решения распараллелен по пространству и реализован на многопроцессорных вычислительных системах ИТПМ СО РАН и МВС-128 ССКЦ (Сибирский суперкомпьютерный центр) СО РАН.

В работе исследуется влияние угла полураствора сверхзвуковой части сопла и перепада давления между выходным сечением сопла и затопленным пространством на течение в начальном участке неизобарической струи. Приведено сравнение с экспериментальными данными. Расчеты выполнены для углов полураствора сверхзвуковой части сопла от 0 (параллельный поток) до 20 градусов. Для всех рассматриваемых сопел число Маха в выходном сечении сопла, рассчитанное по одномерной теории, равнялось трем. Расчеты показали, что в случае разгона потока в коническом сверхзвуковом сопле его геометрия является одним из основных факторов, определяющих формирование начального участка струи в затопленном пространстве.

ВВЕДЕНИЕ

Течение газа в сопле Лавала, а также в сверхзвуковых затопленных струях исследовано всесторонне и достаточно подробно. Основные результаты и исчерпывающая библиография приведены в монографиях [1, 3]. Современное представление о достижениях в изучении газодинамической структуры сверхзвуковых струй можно найти в монографии [4]. Основные результаты на основе аналитических методов и анализа численных решений получены без учета взаимного влияния течения в сопле и струе. При таком подходе вначале рассчитывается течение в сверхзвуковом сопле независимо от развития течения в струе. В дифференциальной постановке задачи выходное сечение сопла соответствует правой границе области определения задачи и из-за гиперболичности уравнений газовой динамики

граничных условий там ставить не нужно. При использовании конечно-разностного метода построения решения здесь необходимо ставить фиктивные граничные условия. Выбрать эти условия так, чтобы они не влияли на численное решение в окрестности правой границы, не удастся. Затем полученные здесь данные используются в качестве граничных условий для задачи расчета струи и вносят некоторую погрешность в картину всего течения, оценить которую априори невозможно. В настоящей работе этот недостаток устранен путем одновременного решения задачи в обеих указанных областях.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается течение газа в сверхзвуковом осесимметричном коническом сопле и на начальном участке струи, вытекающей в неограниченное затопленное пространство. Однако при численном решении задачи необходимо ограничиться конечной областью, схема которой приведена на рис. 1. Начало цилиндрической системы координат x, r (точка А) расположено на оси сопла в его входном сечении (линия АВ). Дозвуковая часть сопла имеет цилиндрическую форму, переходящую в сужающуюся коническую. Сверхзвуковая часть представляет собой расширяющийся конус. Контур сопла $r_g = r_g(x)$ задается в табличной форме и восстанавливается с помощью кубического сплайна. В затопленном пространстве верхняя граница в радиальном направлении расположена на достаточно большом расстоянии от оси $r_G = r_g(x_c)k$, чтобы не оказывать влияние на течение в струе. Здесь x_c — продольная координата выходного сечения сопла (точка G), k — целое число ($k \geq 6$). Представленная на рис. 1 область преобразованием $\xi = \frac{x}{R^*}, \eta = \frac{r}{\tilde{R}(x)}$ переводится в прямоугольную. Здесь R^* — радиус минимального сечения сопла, а функция $\tilde{R}(x)$ берется в следующем виде:

$$\tilde{R}(x) = \begin{cases} r_g(x), & 0 \leq x < x_c \\ r_G & x \geq x_c \end{cases}.$$

Газ полагается совершенным и идеальным. В работе рассматриваются только те случаи, в которых эффекты вязкости и теплопроводности газа не играют определяющей роли при формировании структуры потока. Основной вклад в формирование течения, начиная со сверхзвуковой части сопла, вносят ударные волны, возникающие в потоке. Поэтому представляется достаточным ограничиться моделью невязкого нетеплопроводного газа, которая описывается системой уравнений газовой динамики. Уравнения газовой динамики берутся в дивергентной форме для лучшего выполнения законов сохранения на разрывах решения. В нестационарном случае в криволинейных координатах ξ, η они имеют вид [5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial(J^{-1}W)}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial\xi}(J^{-1}F) + \frac{\partial}{\partial\eta}(J^{-1}G) = \\ = -J^{-1} \left(\omega \frac{G^*}{r} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

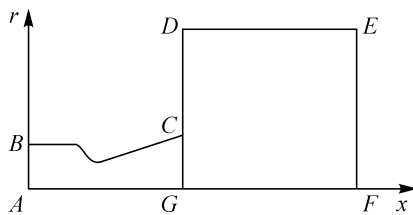


Рис. 1. Схема рассчитываемой области.

Значение $\omega = 1$ соответствует осесимметричному соплу, $\omega = 0$ — плоскому. Здесь введены следующие обозначения:

$$W = \begin{vmatrix} \rho \\ m \\ n \\ e \end{vmatrix}, \quad F = \begin{vmatrix} \tilde{m} \\ \frac{m}{\rho} \tilde{m} + \xi_x p \\ \frac{n}{\rho} \tilde{m} + \xi_r p \\ \frac{(e+p)}{\rho} \tilde{m} \end{vmatrix}, \quad G = \begin{vmatrix} \tilde{n} \\ \frac{m}{\rho} \tilde{n} + \eta_x p \\ \frac{n}{\rho} \tilde{n} + \eta_r p \\ \frac{(e+p)}{\rho} \tilde{n} \end{vmatrix}, \quad G^* = \begin{vmatrix} n \\ nu \\ nv \\ \frac{(e+p)}{\rho} n \end{vmatrix},$$

$$m = \rho u, \quad n = \rho v, \quad \tilde{m} = \xi_x m + \xi_r n, \quad \tilde{n} = \eta_x m + \eta_r n, \quad e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{m^2 + n^2}{2\rho}, \quad J^{-1} = \begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta \\ r_\xi & r_\eta \end{vmatrix},$$

где τ — время, ρ , p , u , v — плотность, давление и компоненты скорости в ортогональной системе координат, γ — отношение удельных теплоемкостей газа, J^{-1} — Якобиан преобразования координат. Подстрочные индексы x , r , ξ , η означают частную производную по соответствующей переменной. Система уравнений (1) обезразмерена по параметрам потока с критической скоростью звука (a^*) и величине R^* .

Во входном сечении (линия АВ, см. рис. 1) полагалось, что поток имеет постоянные значения энтропийной функции, константы Бернулли и параллелен оси ($v = 0$). Из перечисленных выше условий и уравнения для потенциала скоростей следует $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. На стенке сопла (линия ВС) ставились условия непротекания, на оси течения АF и на линии DC — условия симметрии.

Линия DE расположена достаточно далеко от оси симметрии, чтобы там можно было ставить условия окружающей неподвижной среды [2, 4]. На правой границе (линия EF) вторые производные искомых функций полагались равными нулю. Положение границы выбиралось так, чтобы рассматриваемая область перекрывала на 15–20 % зону взаимодействия скачков уплотнения, зарождающихся в окрестности выходного сечения сопла.

Пространственная аппроксимация уравнений (1) выполнена на шаблоне конечно-разностной TVD-схемы, предложенной в работе [5], которая на гладких решениях обеспечивает второй порядок аппроксимации. Эта разностная схема реализуется на пятиточечном шаблоне по каждой пространственной переменной, поэтому для единообразного расчета параметров в граничных узлах необходимо иметь значения параметров в двух точках за границей области. Значения искомых функций в этих “фиктивных” точках определялись путем их экстраполяции из регулярных узлов сетки с учетом граничных условий.

Для проведения расчетов на многопроцессорных вычислительных системах алгоритм решения был распараллелен по пространству в продольном направлении. Область решения, отводимая для каждого процессора, выбиралась так, чтобы объем вычислений для всех процессоров был приблизительно одинаков. Значения параметров в “фиктивных” точках на границах $\xi = \text{const}$ для внутренней области, обрабатываемой одним процессором, передавались из смежных областей в процессе обмена.

Из рис. 1 видно, что линия DG с необходимостью должна быть границей межпроцессорного взаимодействия. В этом случае для отрезка линии CG, изображающей срез сопла, значения параметров в “фиктивных” точках получаются в межпроцессорном обмене, а на отрезке DC — из граничных условий. В такой постановке линия CG не является границей расчетной области, на которой необходимо ставить граничные условия. Это обстоятельство должно способствовать повышению точности численного решения.

Полученные разностные уравнения с производными по времени решались с помощью пятишагового метода Рунге–Кутты [6], который обеспечивал второй порядок аппроксимации по времени. Стационарное решение уравнений (1) получено установлением по времени.

ТЕСТИРОВАНИЕ АЛГОРИТМА

В работе [7] на примере задачи обтекания затупленного тела потоком несжимаемой жидкости в прямолинейном бесконечном канале показано, что задание на левой границе параллельной стенке потока плохо моделирует течение. Очевидно, чтобы уменьшить влияние левой границы, через которую поток втекает в рассчитываемую область, ее нужно отодвигать от обтекаемого тела на значительное расстояние.

Была проведена серия расчетов для выявления влияния длины цилиндрической части канала ζ_{cl} на течение в сопле. Величина ζ_{cl} нормировалась по радиусу минимального сечения сопла R^* . Из расчетов следует, что для рассматриваемой задачи расстояние левой границы от начала сужающейся части сопла сказывается только на равномерности распределения на ней параметров. На рис. 2 приведено радиальное распределение коэффициента скорости $\Lambda = \frac{u}{a^*}$ на левой границе (линия АВ, см. рис. 1) для цилиндрических частей длины $\zeta_{cl} = 0, 0, 0, 0, 2, 0, 5, 1, 0, 2, 0$. Как видно из графика, при $\zeta_{cl} = 0$ (цилиндрическая часть отсутствует) скорость на оси более чем в три раза больше, чем на стенке. Но уже при $\zeta_{cl} > 2$ распределение скорости становится практически равномерным. Однако на развитие потока в сверхзвуковой области длина цилиндрической части сопла существенного влияния не оказывает. Так, увеличение значения ζ_{cl} от 0 до 4 практически не привело к перемещению центра сопла (точки пересечения звуковой линии с осью). Это обстоятельство позволяет утверждать, что для рассматриваемой задачи положение левой границы относительно сужающейся части сопла не оказывает существенного влияния на течение в сверхзвуковом потоке.

Работоспособность созданного алгоритма проверялась путем сравнения с расчетными и экспериментальными данными других авторов отдельно для конического сверхзвукового сопла и звуковой струи в затупленном пространстве.

Сравнение распределения числа Маха на оси и стенке конического сопла с экспериментальными результатами работы [8] показало практическое совпадение с ними настоящих расчетов. Второе сравнение выполнено с данными работы [4],

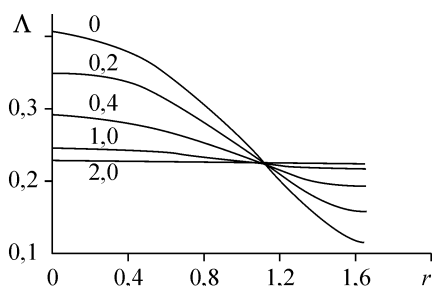


Рис. 2. Радиальное распределение коэффициента скорости на левой границе.

в которой приведены результаты расчета осесимметричной струи, вытекающей в затопленное пространство со скоростью звука. Степень нерасчетности течения, определяемая как отношение статического давления в начальном сечении струи к давлению в окружающей среде, равнялась $N = \frac{P_a}{P_\infty} = 16,4$. Различие в расстоянии диска Маха от начального сечения струи в настоящем расчете и в работе [4] составляло 6 %.

Согласно формуле Прандтля, произведение величин коэффициента скорости перед и за прямым скачком должно равняться единице. В настоящих расчетах это равенство выполняется с точностью в 2 %. Выполненное тестирование свидетельствует о приемлемой точности расчетов на основе предложенного алгоритма.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Представленные ниже результаты получены для семейства конических сопел с одинаковой дозвуковой частью. Геометрически она представляет собой усеченный конус с углом полураствора -45° , плавно переходящий в цилиндрический начальный участок с одной стороны. С другой стороны он сопрягается с конической сверхзвуковой частью с углами полураствора Θ от 5 до 20° . В продольном сечении радиус сопряжения со сверхзвуковой частью составляет $2R^*$ и с начальным цилиндрическим участком — $0,4R^*$. Отношение радиуса цилиндрической части к радиусу минимального сечения равнялось $1,65$. Для расчета всего поля течения использовалось 20 процессоров, из них 5 — для сопла.

Как показано в работе [9], в сверхзвуковом коническом сопле разрыв кривизны в точке сопряжения радиусного и конического участков инициирует висячий скачок, который может многократно отражаться от оси и стенки сопла. Следствием внутренней волновой структуры является немонотонность в распределении параметров потока как в осевом, так и в радиальном направлениях. Подобная картина течения наблюдается и в рассмотренном семействе сопел.

Влияние угла полураствора сверхзвуковой части сопла на течение в нем и в слабо перерасширенной струе ($N = 0,742$) иллюстрирует рис. 3. Здесь по осям отложены значения коэффициента скорости Λ на оси и расстояние вдоль потока. Значение $\xi = 0$ соответствует срезу сопла, $\xi < 0$ — течению в сопле, $\xi > 0$ — течению в струе. Цифры у кривых означают углы полураствора конической сверхзвуковой части Θ . Значение $\Theta = 0$ соответствует параллельному равномерному по радиусу потоку.

Для всех вариантов длина сверхзвуковой части сопла выбиралась так, чтобы число Маха в выходном сечении, рассчитанное по одномерной теории, равнялось трем. Визуализация для сопла течения $\Theta = 15^\circ$, выполненная в работе [10], показала, что отрыва потока от стенок сопла при данных условиях не происходит.

На рис. 3 локальные функции $\Lambda(\xi)$ соответствуют отражению от оси симметрии внутренних ($\xi < 0$) и падающих

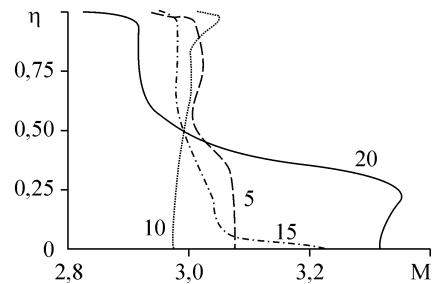


Рис. 3. Распределение коэффициента скорости на оси потока для различных углов полураствора сверхзвуковой части сопла Θ .

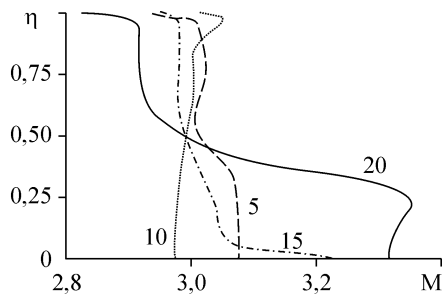


Рис. 4. Влияние угла полураствора сверхзвуковой части сопла Θ на радиальное распределение числа Маха в выходном сечении сопла.

($\xi > 0$) скачков. Как видно из графика, в сопле с углом полураствора $\Theta = 5^\circ$ внутренний скачок отражается два раза, а с углом $\Theta = 10^\circ$ — один раз. При $\Theta = 15^\circ$ внутренний скачок приходит на ось практически в выходном сечении.

В работе [11] строго показано, что для модели идеального газа регулярное отражение стационарной конической волны от оси симметрии невозможно, и волновая структура отражения скачка должна содержать диск Маха. Следовательно, течение за отраженным скачком должно быть дозвуковым. Вероятно, точность настоящих расчетов недостаточна, чтобы разрешить эту особенность.

Влияние угла полураствора конуса в сверхзвуковой части на радиальное распределение числа Маха в выходном сечении сопла представлено на рис. 4. Степень нерасчетности струи здесь также составляет $N = 0,742$. По оси ординат отложено нормированное расстояние от оси симметрии. Анализ графика позволяет констатировать, что распределение числа Маха по радиусу для конического сопла является существенно неравномерным и вследствие влияния внутренних скачков трудно прогнозируемым. В частности, для варианта с $\Theta = 20^\circ$ число Маха на оси на 14 % больше, чем на стенке. Эта разница в величине числа Маха объясняется тем обстоятельством, что внутренний скачок пересекает выходное сечение сопла, не достигнув оси симметрии. Соответственно и статическое давление изменяется по сечению на 50 %. Поэтому для определения степени нерасчетности используется давление, вычисленное на срезе сопла по одномерной теории. Как видно из графика, наиболее близким к равномерному профиль числа Маха в выходном сечении получен для сопла с $\Theta = 10^\circ$, здесь различие составляет 2 %.

Волновая картина течения на начальном участке перерасширенной струи при $N = 0,742$ изображена на рис. 5. На графике представлены линии постоянного числа Маха для двух струй. Верхняя часть соответствует струе, вытекающей из сопла с $\Theta = 20^\circ$, нижняя часть — струе из сопла с $\Theta = 10^\circ$. На графике отчетливо видно, что в варианте с $\Theta = 20^\circ$ внутренний скачок приходит на ось течения в струе, а падающий скачок, образовавшийся на кромке сопла, отражается от оси нерегулярно. Диск Маха виден отчетливо, его радиус составляет примерно 20 % от начального радиуса струи. Здесь торможение потока осуществляется при прохождении его через диск Маха. В струе, вытекающей из сопла с $\Theta = 10^\circ$, радиальное распределение параметров

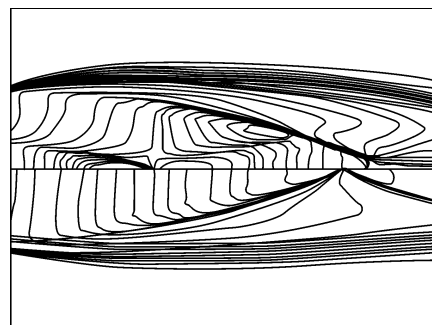


Рис. 5. Линии постоянного числа Маха на начальном участке струи, вытекающей из сверхзвукового сопла при $\Theta = 20^\circ$ (верхняя половина) и 10° (нижняя половина).

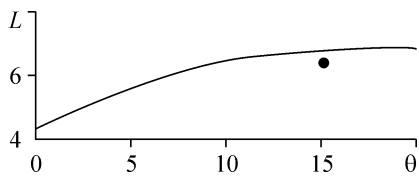


Рис. 6. Протяженность начального участка перерасширенной струи в зависимости от угла полураствора сверхзвуковой части сопла Θ .

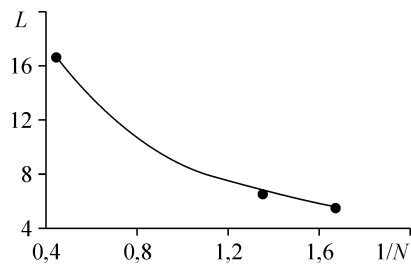


Рис. 7. Влияние степени нерасчетности струи на протяженность ее начального участка.

потока до падающего скачка равномерное, а диск Маха в окрестности отражения скачка от оси практически не заметен. Графики на рис. 4 и 5 позволяют заключить, что из рассмотренных конических сопел, предназначенных обеспечить в выходном сечении поток с числом $M \approx 3$, лучший результат по критерию равномерности потока дает сопло с $\Theta = 10^\circ$. Из рис. 5 видно, что непостоянство всех параметров по радиусу на срезе сопла существенно сказывается на картине течения во всей струе.

Протяженность начального участка перерасширенной струи L при $N = 0,742$ в зависимости от угла полураствора конуса в сверхзвуковой части сопла Θ представлена на рис. 6. Здесь кружку соответствует экспериментальный результат из [10]. Увеличение угла Θ приводит к росту длины начального участка L . Однако влияние геометрии сопла сильнее сказывается при малых значениях угла Θ . Именно у параллельного потока ($\Theta = 0$) начальный участок струи на 60 % короче, чем у струи из сопла с $\Theta = 20^\circ$.

Влияние степени нерасчетности струи, соответствующей соплу с $\Theta = 15^\circ$, на величину L приведено на рис. 7. По оси абсцисс отложена величина, обратная степени нерасчетности $1/N$. Здесь кружочками обозначены экспериментальные результаты из [10]. Видно, что совпадение расчетных и экспериментальных результатов вполне удовлетворительное.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе уравнений газовой динамики, конечно-разностной TVD-схемы и распараллеливания по пространству создан эффективный вычислительный алгоритм расчета струи, вытекающей через сверхзвуковое сопло Лавала в затопленное пространство. Вычисление параметров потока во всей зоне сопла и струи производится по единому алгоритму. Полученные результаты хорошо согласуются с расчетными и экспериментальными данными других авторов. Проведена серия параметрических расчетов на многопроцессорных вычислительных системах. Выявлено влияние геометрии сверхзвуковой части конического сопла на течение в сопле и на начальном участке затопленной струи. На примере слабо перерасширенной струи показано, что параметры потока на срезе сопла непостоянны и что геометрия конического сопла играет определяющую роль в формировании газодинамической структуры потока на начальном участке затопленной струи. Проиллюстрирована зависимость протяженности начального участка струи от угла полураствора сверхзвуковой части сопла и степени нерасчетности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Авдеевский В.С., Ашратов Э.А., Иванов А.В., Пирумов У.Г.** Газодинамика сверхзвуковых неизобарических струй. — М.: Машиностроение, 1989. — 320 с.
2. **Yee H.C., Warming R.F., Harten A.** Implicit total variation diminishing (TVD) schemes for steady — state calculation // J. of Computational Physics. — 1985. — Vol. 57. — P. 327–360.
3. **Пирумов У.Г., Росляков Г.С.** Газовая динамика сопел. — М.: Наука, 1990. — 369 с.
4. **Глазнев В.М., Запрыгаев В.И., Усков В.Н., Терехова Н.М., Ерофеев В.К., Григорьев В.В., Кожемякин А.О., Котенок В.А., Омельченко А.В.** Струйные и нестационарные течения в газовой динамике. — Новосибирск. Изд-во СО РАН, 2000. — 200 с.
5. **Zommerfeld M.** The structure of particle — laden, underexpanded free jets. // J. Shock Waves. — 1994. — P. 299–311.
6. **Seider G.** Numerische Untersuchung transsonischer Stromungen. — Aachen, FRG: Aerodyn. Insit., RWTH, 1991. — 117 s.
7. **Рылов А.И.** Структура линий уровня и критерий подобия асимптотик в двумерных течениях газа // Сибирский журнал индустриальной математики. — 1999. — Т. 2, № 1. — С. 139–150.
8. **Cuffel R.F., Back L.H., Massier P.F.** Transonic flowfield in a supersonic nozzle with small throat radius of curvature // AIAA J. — 1969. — Vol. 7. — P. 1364–1366.
9. **Дроздова Н.В., Пирумов У.Г., Росляков Г.С., Сухоруков В.П.** Сверхзвуковые течения газа в конических соплах // Некоторые применения метода сеток в газовой динамике. Вып. 6. Течения газа в соплах и струях. — М.: Изд-во МГУ, 1974. — С. 129–240.
10. **Zapryagaev V.I., Kudryavtsev A.V., Lokotko A.V., Solotchin A.V., Pavlov A.A., Hadjadj A.** An experimental and numerical study of a supersonic jet shock — wave structure // West East High Speed Flow Fields 2002. Aerospace applications from high subsonic to hypersonic regime. A series of Handbooks on Theory and Engineering of Computational Methods. — CINNE, Barcelona, June 2002. — P. 346–351.
11. **Рылов А.И.** К вопросу о невозможности регулярного отражения стационарной ударной волны от оси симметрии // ПММ. — 1990. — Т. 54, вып. 2. — С. 245–249.

Статья поступила в редакцию 30 мая 2007 г.