

## ТРЕХГАРМОНИЧЕСКИЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ В ТЕЧЕНИИ КУЭТТА — ПУАЗЕЙЛЯ

А. Т. Зиновьев, А. М. Лифшиц

(Новосибирск)

Одна из главных задач теории гидродинамической устойчивости — определение чисел Рейнольдса перехода от ламинарного режима к турбулентному. Наиболее трудным является случай жесткой потери устойчивости, когда линейная теория дает лишь верхний предел, до которого при идеальных условиях может быть затянута ламинарный режим. Типичный пример этого — течение в плоском канале. Так, для течения Пуазейля критическое число Рейнольдса, построенное по средней скорости и полуширине канала, согласно линейной теории  $R_{\text{л}} = 3848$  [1], в то время как турбулентный режим наблюдается уже при числах Рейнольдса  $R_{\text{т}} \sim 700$  [2]. Для течения Куэтта — Пуазейля с профилем скорости  $U_{\text{л}} = (3/2)(1 - |q|)(1 - y^2) + qy$  по линейной теории критическое число Рейнольдса стремится к бесконечности при  $|q| \rightarrow 0,26$  [3, 4], но в течения Куэтта ( $q = 1$ ) переход к турбулентности имеет место при  $600 < R < 10^4$  [5, 6].

1. Эксперименты по изучению перехода в пристенных течениях свидетельствуют, что одним из основных механизмов перехода является вторичная неустойчивость двумерных волн Толлмина — Шлихтинга к трехмерным возмущениям половинной частоты [7—9]. Простейший режим, который при этом возникает, — симметричный триплет, резонансная тройка волн, состоящая из одной плоской с частотой  $\omega$  и продольным волновым числом  $\alpha$  и пары трехмерных волн с параметрами  $(\omega/2, \alpha/2, \pm\beta)$ , где  $\beta$  — трансверсальное волновое число.

На важную роль трехмерных возмущений для перехода в плоских течениях Куэтта и Пуазейля указано в [10]. Отмечается, что двумерные автоколебания в течениях Куэтта неустойчивы. Достаточно простую, но учитывающую сильные нелинейные взаимодействия модель трехмерных возмущений представляет симметричный триплет. Критический стационарный режим в рамках такого подхода для течения Пуазейля рассчитан в [11]. Результаты не только существенно отличаются от случая двумерных автоколебаний, но и находятся в хорошем согласии с опытными данными. Ниже приводятся результаты аналогичных расчетов для течения Куэтта — Пуазейля.

В [1] предложена эскалаторная схема анализа гидродинамической устойчивости в целом, основанная на последовательном учете основных взаимодействий возмущений. Триплетная модель является вторым этапом вслед за моногармонической. В этом случае пульсационная компонента скорости представляется в виде

$$v_k = 2 \operatorname{Re} \left\{ J_k \sum_{j=1}^3 v_{kj}(y) \exp [i(\alpha_j x + \beta_j z - \alpha_j C_j t)] \right\},$$

где  $\alpha_j$  и  $\beta_j$  — продольные и трансверсальные волновые числа;  $C_j$  — фазовые скорости;  $J_k$  — амплитудные множители, зависящие от условий нормировки;  $y$  — поперечная координата. Причем параметры несущих гармоник подчинены резонансным соотношениям:  $\sum_{j=1}^3 \alpha_j = 0$ ,  $\sum_{j=1}^3 \beta_j = 0$ ,

$$\sum_{j=1}^3 \omega_j = 0, \text{ где частоты } \omega_j = \alpha_j C_j.$$

Уравнения для амплитуд  $u$ ,  $v$ ,  $w$  и профиля средней скорости получают после проектирования на базисные и нулевую гармоники. Для симметричного триплета резонансные соотношения приводятся к наиболее простому виду  $\alpha_1 = \alpha$ ,  $\beta_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = \alpha_3 = -\alpha/2$ ,  $\beta_2 = -\beta_3 = \beta$ ,  $C_1 = C_2 = C_3 = C$  и  $w_1 = 0$ ,  $u_2 = u_3$ ,  $v_2 = v_3$ ,  $w_2 = -w_3$ .

После проектирования получаем

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad & L_1 u_1 + U' v_1 + i \alpha_1 p_1 = -2(J_2^2/J_1) [i \alpha_1 \bar{u}_2^2 + (\bar{u}_2 \bar{v}_2)'], \\
 & L_1 v_1 + p_1' = -2(J_2^2/J_1) [i \alpha_1 \bar{v}_2 \bar{u}_2 + (\bar{v}_2^2)'], \quad i \alpha_1 u_1 + v_1' = 0, \\
 & L_2 u_2 + U' v_2 + i \alpha_2 p_2 = -J_1 [2i \alpha_2 \bar{u}_2 \bar{u}_1 + (\bar{u}_2 \bar{v}_1 + \bar{u}_1 \bar{v}_2)' + i \beta_2 \bar{w}_2 \bar{u}_1], \\
 & L_2 v_2 + p_2' = -J_1 [i \alpha_2 (\bar{v}_2 \bar{u}_1 + \bar{v}_1 \bar{u}_2) + 2(\bar{v}_1 \bar{v}_2)' + i \beta_2 \bar{w}_2 \bar{v}_1], \\
 & L_2 w_2 + i \beta_2 p_2 = -J_1 [i \alpha_2 \bar{w}_2 \bar{u}_1 + (\bar{w}_2 \bar{v}_1)'], \quad i \alpha_2 u_2 + v_2' + i \beta_2 w_2 = 0, \\
 & U_{\pi}'' = R_p [\tau_1' + 2\tau_2'], \quad L_j = -\frac{1}{R_p} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_j^2 \right) + i \alpha_j (U - C), \quad k_j^2 = \alpha_j^2 + \beta_j^2,
 \end{aligned}$$

где  $\tau_j = J_j^2 (u_j \bar{v}_j + \bar{u}_j v_j)$  — вклад  $j$ -й гармоники в рейнольдсовы напряжения. Средняя скорость  $U$  является суммой ламинарной скорости и добавочной:  $U = U_{\pi} + U_{\pi}$ . При известном  $R_p$  можно определить число Рейнольдса, построенное по среднерасходной скорости  $R = R_p \langle U \rangle$  и по скорости стенки  $R_c = R_p |q|$ .

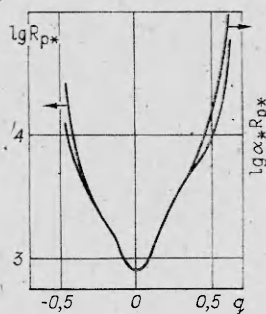
Вместе с условиями прилипания система (1.1) образует задачу на собственные значения. Из набора параметров ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $R_p$ ,  $C$ ) три в определенном диапазоне задаются по произволу, а один ищется как собственный. Система (1.1) имеет несколько уровней вырождения: во-первых, ламинарный режим, когда все пульсационные амплитуды нулевые; во-вторых, моногармонический, когда отличны от нуля только амплитуды двумерной гармоники; в-третьих, когда амплитуды всех гармоник отличны от нуля, но величина  $C$  далека от спектральных значений оператора, образованного левыми частями первых трех уравнений (1.1). В этом случае  $J_1$  порядка  $J_2^2$  и учет двумерной волны оказывает слабое влияние на характер решения. Если же величина  $C$  близка к спектральному значению в указанном выше смысле, то правые части в первых двух уравнениях (1.1) играют роль вынуждающей силы, действующей на резонансной частоте, величина  $J_1$  непропорционально возрастает, что, в свою очередь, оказывает существенное «обратное» влияние на характеристики решения. Именно такая ситуация имеется в виду, когда речь идет о резонансном триплете.

2. Система (1.1) решалась численно методом Ньютона со вторым порядком аппроксимации на неравномерной сетке со сгущением к стенкам по синусоидальному закону, число узлов  $N = 100$ . Многообразие решений в одной точке касается нейтральной кривой линейной теории при тех  $q$ , при которых она существует. При  $q = 0$  точка бифуркации имеет параметры [1]

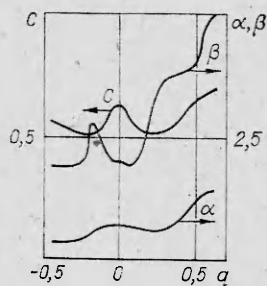
$$(2.1) \quad R_p = 7776, \quad \alpha = 1,088, \quad \beta = 0,709, \quad C = 0,358$$

и амплитуды в этом случае — собственные функции линейной задачи, имеющие нулевую интенсивность. Так как метод Ньютона требует хорошего начального приближения, параметры менялись непрерывным образом, начиная от (2.1).

В точке (2.1) амплитуды всех гармоник симметричны по поперечной компоненте скорости. Однако легко убедиться, что при конечных интенсивностях для симметричного профиля такой тип решения невозможен, т. е. решение для течения Пуазейля оказывается асимметричным. Асимметрия вторичных режимов при симметричных краевых условиях не является в гидродинамике чем-то необычным. Такая картина существует, например, при течении в диффузоре и при обтекании симметричного тела (дорожка Кармана). Асимметрия возмущений в течении Пуазейля наблюдалась экспериментально [7—9], и, хотя средний профиль нестационарного течения симметричен, какие-то интервалы времени траектория может находиться вблизи решений с различной асимметрией. Однако следует иметь в виду, что при  $q = 0$  асимметричные решения переходят друг в друга путем замены знака  $y$ . Для  $q$ , отличного от нуля, такой связи между решениями уже нет. Следовательно, при  $q \neq 0$  существуют две различные



Фиг. 1



Фиг. 2

ветви решений. Пара решений переходит в себя, если одновременно поменять знаки  $y$  и  $q$ . Таким образом, достаточно рассчитать обе ветви при  $q > 0$  или одну ветвь при всех  $q$ . Удобен (и поэтому фактически был реализован) последний вариант.

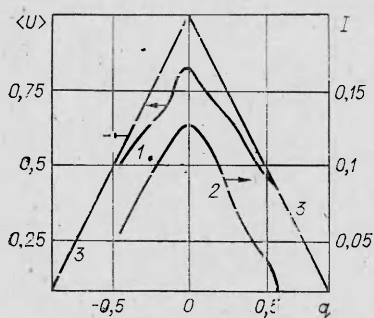
Результаты численных расчетов подтверждают асимметрию характеристик критических автоколебательных режимов по  $q$ . На фиг. 1 даны зависимости  $R_{p*}(q)$  и  $\alpha_* R_{p*}(q)$  на носиках нейтральных гиперповерхностей. Видно, что решения существуют в области  $|q| \leq 0,62$ . Решения, которые скошены к стенке, движущейся в ту же сторону, что и возмущение, существуют в более широком диапазоне ( $|q| \leq 0,62$ ). Для решений с противоположной асимметрией критические числа Рейнольдса возрастают быстрее и обращаются в бесконечность уже при  $|q| \approx 0,45$ . Для значений  $|q| > 0,26$  нелинейные нейтральные поверхности как бы висят над поверхностью нулевой интенсивности, нигде ее не касаясь. На фиг. 2 приведены критические значения параметров гармоник при разных  $q$ . Можно заметить, что  $\alpha_*$  и  $\beta_*$  сильно зависят от знака  $q$ . Интересно, что при  $R_{p*} \rightarrow \infty$   $\alpha_*$  стремится к конечному пределу, в то время как при линейном анализе критические  $R_p$  и  $\alpha$  связаны таким образом, что при  $R_{p*} \rightarrow \infty$   $\alpha_* \rightarrow 0$  и  $\alpha_* R_{p*}$  остается конечным.

На фиг. 3 кривыми 1—3 представлены соответственно зависимости от  $q$  интегральных характеристик — средней расходной скорости течения

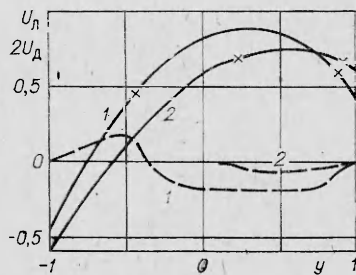
$\langle U \rangle$ , интенсивности возмущений  $I = \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \langle v_k v_k \rangle dy \right)^{1/2} / \langle U \rangle$  и средней

скорости ламинарного потока. Видно, что с ростом  $|q|$  деформация среднего профиля скорости быстро уменьшается. Интенсивность возмущений также спадает, но много медленнее. Можно предположить, что асимптотически (при  $R_{p*} \rightarrow \infty$ ) рейнольдсовы напряжения равны нулю, хотя возмущения имеют конечную амплитуду.

Это предположение отчасти подтверждается анализом кривых на фиг. 4. Штриховые кривые 1, 2 дают представление о характере деформаций профиля средней скорости  $U_D = U - U_D$  при разных значениях  $q$ :



Фиг. 3



Фиг. 4

1 соответствует  $q = -0,45$ , 2 — 0,62. Заметны быстрое уменьшение деформаций профиля скорости, локализация реynольдсовых напряжений у одной из стенок канала. Сплошными кривыми 1, 2 нанесены ламинарные профили скорости при тех же  $q$ , крестиками на них отмечены положения критических слоев  $y_c$ , где  $U(y_c) = C$ . Заметна тенденция приближения одного из критических слоев к стенке на границе области существования решения.

Таким образом, область существования рассмотренных трехмерных автоколебаний конечной амплитуды не захватывает собственно течения Куэтта. По-видимому, это связано с тем, что наиболее опасные для течения Куэтта возмущения имеют другую структуру, чем в случае течения Пуазейля.

Авторы выражают глубокую признательность В. Н. Штерну и М. А. Гольдштику за ценные советы и постоянное внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977.
2. Davis S. J., White C. M. An experimental study of flow of water in pipes of rectangular section.— Proc. Roy. Soc., 1928, v. 119, N 781.
3. Potter M. C. Stability of plane Couette — Poiseuille flow.— J. Fluid Mech., 1966, v. 24, N 3.
4. Hains F. D. Stability of plane Couette — Poiseuille flow.— Phys. Fluids, 1967, v. 10, N 9.
5. Reihardt H. Über die Geschwindigkeitsverteilung in einer geradlinigen Turbulenten Couetteströmung.— Z. angew. Math. und Mech., 1956, Bd 36, Sonderheft.
6. Robertson J. M. On turbulent plane Couette flow.— In: Proceedings of the 6th Midwestern Conference of Fluid Mechanics, 1959.
7. Козлов В. В., Рамазанов М. П. Развитие возмущений конечной амплитуды в течении Пуазейля.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 1.
8. Качанов Ю. С., Левченко В. Я. Резонансное взаимодействие возмущений при переходе к турбулентности в пограничном слое. Препринт № 10. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1982.
9. Nishioka M., Iida S., Ichikawa Y. An experimental investigation of the stability of plane Poiseuille flow.— J. Fluid. Mech., 1975, v. 72, N 4.
10. Orszag S. A., Kells L. C. Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow.— J. Fluid Mech., 1980, v. 96, N 1.
11. Гольдштик М. А., Лифшиц А. М., Штерн В. Н. Число Рейнольдса перехода в плоском канале.— ДАН СССР, 1983, т. 273, № 1.

Поступила 14/VI 1984 г.

УДК 532.526

### КЛАСС АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СТРУИ

А. А. Бобнев  
(Новосибирск)

При исследовании неизотермических струйных течений сжимаемого газа наиболее простые и строгие результаты можно получить, воспользовавшись преобразованием Дородницына [1]. Однако этот прием пригоден лишь для плоских (или сводящихся к плоским) течений газа при линейной зависимости теплопроводности и динамической вязкости от температуры, при этом затруднителен переход от переменных Дородницына к физическим. В случае истечения осесимметричной струи из точечного источника для области, где температура на оси значительно больше температуры на бесконечности, можно построить, воспользовавшись идеей существования разделительного слоя [2], автомодельное решение при степенной зависимости теплопроводности и вязкости от температуры, причем от исходной двухпараметрической задачи (число Прандтля, показатель степени) можно перейти к однопараметрической.

1. Задачу, описывающую истечение неизотермической струи из цилиндрического отверстия в приближении пограничного слоя, запишем в безразмерном виде

$$(1.1) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \mu(T) \frac{\partial w}{\partial r} \right] = \rho \left( v \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right),$$