

УДК 532.135, 517.956.6, 517.984.5

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ СПЕКТРА ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ ПОЛИМЕРОВ В БЕСКОНЕЧНОМ КАНАЛЕ

А. М. Блохин, Д. Л. Ткачев, А. В. Егитов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия
E-mails: blokhin@math.nsc.ru, tkachev@math.nsc.ru, eav15@mail.ru

Исследуется новая реологическая модель (модификация известной модели Покровского — Виноградова), в которой, как показывают вычислительные эксперименты, учитываются нелинейные эффекты, возникающие при течениях расплавов и растворов полимеров в областях со сложной геометрией границы. Для случая, когда основное решение представляет собой аналог течения Пуазейля в бесконечном плоском канале (рассматривается вязкоупругая полимерная жидкость), получена асимптотическая формула распределения точек спектра линейной задачи. Показано, что малые возмущения обладают дополнительным свойством периодичности по переменной, идущей вдоль оси канала.

Ключевые слова: реологическая модель, полимерная среда, течение типа течения Пуазейля, устойчивость по Ляпунову.

DOI: 10.15372/PMTF20180604

Введение. Рассматривается новая реологическая модель, достаточно точно описывающая нелинейные эффекты, возникающие при течении растворов и расплавов полимеров в областях сложной геометрии. При этом вязкоупругая полимерная жидкость полагается суспензией не взаимодействующих друг с другом “гантелей”, каждая из которых представляет собой пару броуновских частиц, связанных упругой силой и движущихся в анизотропной жидкости, состоящей из растворителя и других “гантелей” [1].

Модель, основанная на новом реологическом соотношении, связывающем кинематические характеристики потока и внутренние термодинамические параметры, является модификацией известной модели Покровского — Виноградова [2, 3]. Результаты проведенных вычислительных экспериментов хорошо согласуются с экспериментальными данными [4, 5].

Модель тестировалась на экспериментально наблюдаемом течении, аналогичном течению Пуазейля в бесконечном плоском канале, описываемому системой уравнений Навье — Стокса. Изучается асимптотика собственных чисел линеаризованной относительно данного стационарного решения задачи, причем класс возможных малых возмущений представляет собой гармонические функции по переменной, меняющейся вдоль бесконечного канала с фиксированной частотой.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-01-00791а).

© Блохин А. М., Ткачев Д. Л., Егитов А. В., 2018

Рассматриваемое решение продолжает ряд полученных ранее решений: в работе [6], в частности, найдено формальное асимптотическое представление точек спектра линейной задачи в бесконечном плоском канале, когда в качестве класса возмущений выбирался класс убывающих на бесконечности функций; из этого представления следует, что в рамках выбранной модели течение типа течения Пуазейля линейно неустойчиво по Ляпунову; в работе [7] доказано отсутствие асимптотической линейной устойчивости по Ляпунову аналога течения Пуазейля в классе периодических возмущений при условии, что в ряде Фурье присутствуют только гармоники с выбранным конечным числом частот.

1. Постановка задачи. Формулировка основного результата. В работе [1] предложена новая математическая модель для описания течений несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости. В плоском случае нестационарные течения полимерных сред описываются с помощью следующей реологической модели (предварительно проведена процедура обезразмеривания):

$$u_x + v_y = 0; \quad (1.1)$$

$$\frac{du}{dt} + p_x = \frac{1}{\text{Re}} \{(a_{11})_x + (a_{12})_y\}; \quad (1.2)$$

$$\frac{dv}{dt} + p_y = \frac{1}{\text{Re}} \{(a_{12})_x + (a_{22})_y\}; \quad (1.3)$$

$$\frac{da_{11}}{dt} - 2A_1 u_x - 2a_{12} u_y + K_I a_{11} = -\beta(a_{11}^2 + a_{22}^2); \quad (1.4)$$

$$\frac{da_{12}}{dt} - A_1 v_x - A_2 u_y + \tilde{K}_I a_{12} = 0; \quad (1.5)$$

$$\frac{da_{22}}{dt} - 2A_2 v_y - 2a_{12} v_x + K_I a_{22} = -\beta(a_{12}^2 + a_{22}^2), \quad (1.6)$$

где

$$A_1 = a_{11} + \frac{1}{W}, \quad A_2 = a_{22} + \frac{1}{W}, \quad K_I = \frac{1}{W} + \frac{\bar{k}}{3} I, \quad \tilde{K}_I = \frac{1}{W} + \frac{\hat{k}}{3} I = K_I + \beta I, \\ \hat{k} = k + 2\beta = \bar{k} + 3\beta,$$

$\text{Re} = \rho u_H l / \eta_0$ — число Рейнольдса; t — время; u, v — компоненты вектора скорости \mathbf{u} в декартовой системе координат (x, y) ; p — гидростатическое давление; a_{ij} — симметричный тензор анизотропии второго ранга; $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{u}, \nabla)$ — субстанциональная производная; $I = a_{11} + a_{22}$ — первый инвариант тензора анизотропии; $\bar{k} = k - \beta$; k, β — скалярные феноменологические параметры реологической модели ($0 < \beta < 1$); $\rho = \text{const}$ — плотность среды; u_H — характерная скорость; l — характерная длина; $W = \tau_0 u_H / l$ — число Вайсенберга; η_0, τ_0 — начальные значения сдвиговой вязкости и времени релаксации.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В реологической модели (1.1)–(1.6) присутствуют числа Рейнольдса и Вайсенберга, а также феноменологические параметры k и β , определяющие течение физического эксперимента. Как следует из [8], данные, полученные в результате численных расчетов, в наибольшей степени соответствуют данным физических экспериментов при $k = 1, 2\beta$ (особенно в случае течений расплавов полимерных жидкостей).

Линейная система уравнений, возникающая в результате линеаризации системы (1.1)–(1.6) относительно выбранного стационарного решения (далее его компонентам соответствует знак “ \wedge ”), в случае когда жидкость движется в бесконечном плоском канале, получена в работе [9]. Представим эту систему в векторном виде. В показанной на рис. 1 области

$$G = \{(t, x, y): t > 0, \quad (x, y) \in \Pi = \{(x, y): |x| < \infty, \quad 0 < y < 1\}\}$$

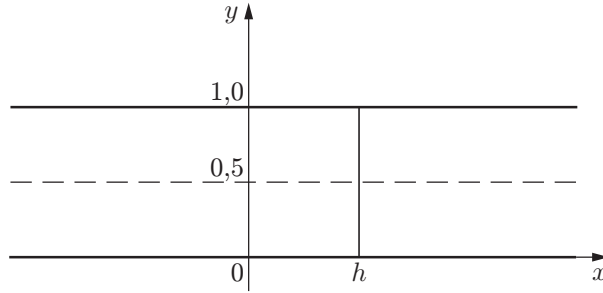


Рис. 1. Область течения

необходимо найти решение системы уравнений:

$$\mathbf{U}_t + \hat{B}\mathbf{U}_x + \hat{C}\mathbf{U}_y + \hat{R}\mathbf{U} + \mathbf{F} = 0; \quad (1.7)$$

$$\Delta\Omega = \text{Re}^{-1}(\sigma_{xx} + 2(a_{12})_{xy}) - 2\hat{\omega}v_x. \quad (1.8)$$

Здесь $\mathbf{U} = (u, v, a_{11}, a_{12}, a_{22})^T$ — неизвестная вектор-функция; $\sigma = a_{11} - a_{22}$; $\Omega = p - a_{22}/\text{Re}$; матрицы $\hat{B} = B(\hat{\mathbf{U}})$, $\hat{C} = C(\hat{\mathbf{U}})$, $\hat{R} = R(\hat{\mathbf{U}})$ записываются с помощью компонент стационарного решения $\hat{\mathbf{U}}(y)$:

$$\hat{\mathbf{U}}(y) = \begin{pmatrix} \hat{u}(y) \\ 0 \\ \hat{a}_{11}(y) \\ \hat{a}_{12}(y) \\ \hat{a}_{22}(y) \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} \hat{u} & 0 & -\text{Re}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{u} & 0 & -\text{Re}^{-1} & 0 \\ -2\hat{A}_1 & 0 & \hat{u} & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{A}_1 & 0 & \hat{u} & 0 \\ 0 & -2\hat{a}_{12} & 0 & 0 & \hat{u} \end{pmatrix},$$

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\text{Re}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{Re}^{-1} \\ -2\hat{a}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\hat{A}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\hat{A}_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{R} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{a}'_{11} & R_{33} & R_{34} & R_{35} \\ 0 & \hat{a}'_{12} & R_{43} & R_{44} & R_{45} \\ 0 & \hat{a}'_{22} & R_{53} & R_{54} & R_{55} \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}_1 = \hat{a}_{11} + \frac{1}{W}, \quad \hat{A}_2 = \hat{a}_{22} + \frac{1}{W}, \quad (1.9)$$

$$R_{33} = \frac{1}{W} + \frac{\bar{k}}{3}\hat{I} + \frac{k+5\beta}{3}\hat{a}_{11}, \quad R_{34} = -2(\hat{\omega} - \beta\hat{a}_{12}), \quad \hat{\omega} = \hat{u}_y, \quad R_{35} = \frac{\bar{k}}{3}\hat{a}_{11},$$

$$R_{43} = \frac{\hat{k}}{3}\hat{a}_{12}, \quad R_{44} = \frac{1}{W} + \frac{\hat{k}}{3}\hat{I}, \quad R_{45} = -\hat{\omega} + \frac{\hat{k}}{3}\hat{a}_{12},$$

$$R_{53} = \frac{\bar{k}}{3}\hat{a}_{22}, \quad R_{54} = 2\beta\hat{a}_{12}, \quad R_{55} = \frac{1}{W} + \frac{\bar{k}}{3}\hat{I} + \frac{k+5\beta}{3}\hat{a}_{22},$$

$\mathbf{F} = (p_x, p_y, 0, 0, 0)^T$; Δ — символ оператора Лапласа.

Будем полагать, что на границах области G выполняются краевые условия

$$u|_{y=0} = v|_{y=0} = u|_{y=1} = v|_{y=1} = 0; \quad (1.10)$$

$$\Omega_y = \text{Re}^{-1}(a_{12})_x, \quad y = 0, 1 \quad (1.11)$$

и заданы начальные данные

$$\mathbf{U}|_{t=0} = \mathbf{U}_0(x, y), \quad (1.12)$$

удовлетворяющие краевым условиям (1.10).

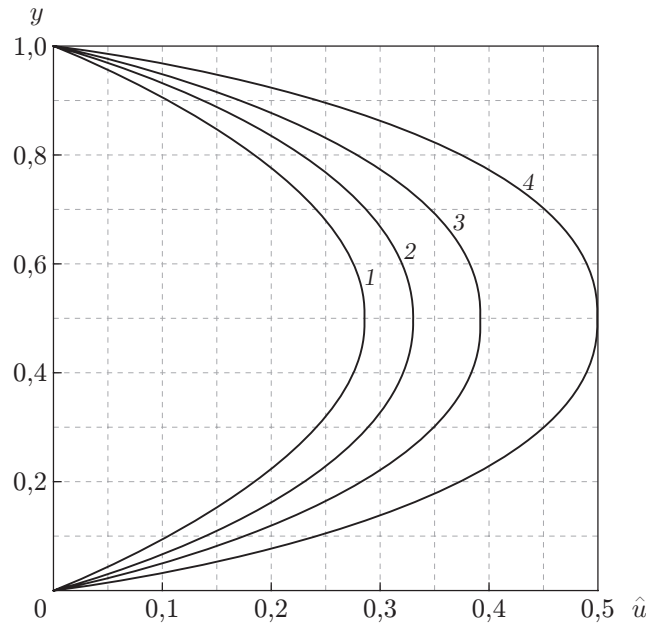


Рис. 2. Профили функций $\hat{u}(y)$ при различных значениях β :
 1 — $\beta = 0,1$, 2 — $\beta = 0,2$, 3 — $\beta = 0,3$, 4 — $\beta = 0,4$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В качестве основного решения можно рассматривать, например, решение, аналогичное решению Пуазейля для системы уравнений Навье — Стокса [4, 10, 11], которое симметрично относительно оси канала $y = 0,5$ ($\hat{p}(x, y) = \text{Re}^{-1} \hat{a}_{22}(y) + \hat{p}_0 - \hat{A}x$; \hat{p}_0 — давление на оси канала; \hat{A} — параметр, зависящий от безразмерного перепада давления на отрезке h). В работе [9] при $k = \beta$ компоненты $\hat{u}(y)$, $\hat{a}_{11}(y)$, $\hat{a}_{12}(y)$, $\hat{a}_{22}(y)$ этого решения найдены в явном виде, а при $k \neq \beta$ получены численно с помощью предложенного итерационного процесса. На рис. 2 приведены профили функций $\hat{u}(y)$ при $\bar{k} = 0$, $\hat{D} = \text{Re} \hat{A} = 2$, $W = 1$ и различных значениях β .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Согласно работам [4, 9, 10] профиль функций $\hat{u}(y)$ отличается от параболического профиля Пуазейля для вязкой жидкости. Максимальное значение скорости \hat{u}_{\max} находится по формуле

$$\hat{u}_{\max} = \hat{u}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\hat{D}}{8} + \int_0^{1/2} \frac{\bar{k}\hat{I}/3 - \hat{a}_{22}(\xi)}{\hat{A}_2}(\xi) \hat{a}_{12}(\xi) d\xi.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В работе [9] доказано, что при известном давлении $p(t, x, y)$ система (1.7) является t -гиперболической [12] при $\hat{A}_1 > 0$, $\hat{A}_2 > 0$, $\hat{A}_1 \hat{A}_2 - \hat{a}_{12}^2 > 0$ (см. представления матриц \hat{B} и \hat{C}). Эти неравенства, в частности, справедливы, когда в качестве основного решения выбирается “решение Пуазейля” (при $k = \beta$ этот факт проверяется аналитически, а при $k \neq \beta$ — численно). Информация о корнях характеристического уравнения имеет большое значение при постановке смешанных задач для t -гиперболических систем.

В работе [6] метод расщепления системы (1.7), (1.8) реализован следующим образом: при дополнительных условиях, налагаемых на поведение решения на бесконечности, найдена и подставлена в вектор \mathbf{F} функция давления $\hat{p}(t, \zeta, y)$ (ζ — переменная, двойственная переменной x относительно преобразования Фурье). В частности, условие $\hat{A}_2 > 0$ гаран-

тирует нестрогую гиперболичность оператора дифференциальной части полученной системы интегродифференциальных уравнений.

В данной работе решение линейной задачи (1.7)–(1.12) будем искать в классе периодических вектор-функций

$$M(t, x, y) = \begin{pmatrix} U(t, x, y) \\ \Omega(t, x, y) \\ \partial\Omega/\partial y (= L) \end{pmatrix} = e^{-i\xi x} \begin{pmatrix} \bar{U}(t, y) \\ \bar{\Omega}(t, y) \\ \bar{L}(t, y) \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

где $\xi \in R$ — фиксированный параметр. С использованием представления (1.12) и преобразования Лапласа по времени получаем модельную задачу с параметрами ξ и λ :

$$\hat{C}U_y^L + (\lambda I - i\xi \hat{B} + \hat{R})U^L + \tilde{F} = U_0^*(y); \quad (1.14)$$

$$\Omega_y^L = L^L; \quad (1.15)$$

$$L_y^L - \xi^2 \Omega^L = -\frac{2i\xi}{\text{Re}} (a_{12}^L)_y - \frac{1}{\text{Re}} (a_{11}^L - a_{22}^L) \xi^2 + 2i\xi \hat{\omega} v^L, \quad (1.16)$$

где индекс L означает, что рассматривается лаплас-образ либо функций, либо компонент вектор-функций; λ — переменная, двойственная t относительно преобразования Лапласа:

$$\tilde{F} = (-i\xi(\Omega^L + a_{22}^L/\text{Re}), L + (a_{22}^L)_y/\text{Re}, 0, 0, 0)^T, \quad U_0(x, y) = e^{i\xi x} U_0^*(y). \quad (1.17)$$

Краевые условия (1.10), (1.11) также преобразуются:

$$u^L|_{y=0} = v^L|_{y=0} = u^L|_{y=1} = v^L|_{y=1} = 0; \quad (1.18)$$

$$L^L = -i\xi a_{12}^L, \quad y = 0, 1. \quad (1.19)$$

Предположим, что справедливо неравенство

$$\hat{A}_2(y) \neq \text{Re}, \quad y \in [0, 1]. \quad (1.20)$$

Тогда справедлива следующая теорема, являющаяся основным результатом работы.

Теорема. При выполнении условия (1.20) собственные числа краевой задачи (1.13)–(1.18) имеют асимптотическое представление

$$\lambda_k = -\left(\int_0^1 (d_{11} - d_{22}) d\xi + (2k + 1)i\pi \right) / \left(2 \int_0^1 \sqrt{\frac{\text{Re}}{\hat{A}_2}} d\eta \right) + O\left(\frac{1}{|k|}\right), \quad (1.21)$$

где k — целое число; $|k| \rightarrow \infty$; функции d_{ii} ($i = 1, 2$) определены в п. 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Таким образом, смешанная задача (1.7)–(1.12) допускает применение преобразования Лапласа по времени.

2. Доказательство теоремы. Переобозначая неизвестные величины в линейной задаче (1.13)–(1.15) следующим образом:

$$\begin{aligned} Y(y) &= (y_1(y), \dots, y_7(y))^T = \\ &= (u^L(y, s), v^L(y, s), a_{11}^L(y, s), a_{12}^L(y, s), a_{22}^L(y, s), \Omega^L(y, s), L^L(y, s))^T, \end{aligned}$$

спектральную задачу для (1.13)–(1.18) представим в виде

$$PY' + QY = 0, \quad 0 < y < 1; \quad (2.1)$$

$$y_1|_{y=0} = y_2|_{y=0} = y_1|_{y=1} = y_2|_{y=1} = 0; \quad (2.2)$$

$$y_7 = -i\xi y_4 / \text{Re}, \quad y = 0, 1, \quad (2.3)$$

где P, Q — матрицы:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\text{Re}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\hat{a}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\hat{A}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\hat{A}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i\xi/\text{Re} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda - i\xi\hat{u} & \hat{\omega} & i\xi/\text{Re} & 0 & -i\xi/\text{Re} & -i\xi & 0 \\ 0 & \lambda - i\xi\hat{u} & 0 & i\xi/\text{Re} & 0 & 0 & 1 \\ -2\hat{A}_1 & \hat{a}'_{11} & \lambda - i\xi\hat{u} + R_{33} & R_{34} & R_{35} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{a}'_{12} + \hat{A}_1 i\xi & R_{43} & \lambda - i\xi\hat{u} + R_{44} & R_{45} & 0 & 0 \\ 0 & 2\hat{a}_{12}i\xi + \hat{a}'_{22} & R_{53} & R_{54} & \lambda - i\xi\hat{u} + R_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2i\xi\hat{\omega} & \xi^2/\text{Re} & 0 & -\xi^2/\text{Re} & -\xi^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть выполнено условие (1.20). Полагая

$$\mathbf{Y} = T\mathbf{Z},$$

где

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\sqrt{\text{Re} \hat{A}_2} & 1/\sqrt{\text{Re} \hat{A}_2} \\ 0 & 0 & -1/(2\hat{A}_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\hat{a}_{12}/\hat{A}_2 & 2\hat{a}_{12}/\hat{A}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -(2i\xi/\text{Re})/(1 - \sqrt{\hat{A}_2/\text{Re}}) & -(2i\xi/\text{Re})/(1 + \sqrt{\hat{A}_2/\text{Re}}) \end{pmatrix},$$

приведем систему (2.1) к каноническому виду

$$K\mathbf{Z}' + (T^{-1}QT + T^{-1}T')\mathbf{Z} = 0.$$

Здесь

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\hat{A}_2/\text{Re}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\hat{A}_2/\text{Re}} \end{pmatrix},$$

элементы матрицы $S = T^{-1}QT + T^{-1}T'$ в силу (2.4) имеют вид

$$s_{11} = \lambda - i\xi\hat{u} + R_{33} - \frac{2R_{43}\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2}, \quad s_{12} = R_{35} - \frac{2\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2}R_{45}, \quad s_{13} = -\frac{\hat{a}'_{11}}{2\hat{A}_2} + \frac{\hat{a}'_{12}}{\hat{A}_2^2}(\hat{a}'_{12} + i\xi\hat{A}_1),$$

$$\begin{aligned}
 s_{14} = s_{15} = 0, \quad s_{16} &= \frac{2}{\hat{A}_1} \sqrt{\operatorname{Re} \hat{A}_2} + 2 \frac{R_{33} \hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} + R_{34} - \frac{2 \hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} \left(2 \frac{\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} R_{43} + R_{44} \right) + 2 \left(\frac{\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} \right)', \\
 s_{17} &= -\frac{\hat{A}_1}{\sqrt{\operatorname{Re} \hat{A}_2}} + 2 \frac{\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} R_{33} + R_{34} - \frac{2 \hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} \left(2 \frac{\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} R_{43} + R_{44} \right) + 2 \left(\frac{\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} \right)', \\
 s_{21} = R_{53}, \quad s_{22} &= \lambda - i \xi \hat{u} + R_{55}, \quad s_{23} = \frac{2 \hat{a}_{12} i \xi + \hat{a}'_{22}}{2 \hat{A}_2}, \quad s_{24} = s_{25} = 0, \\
 s_{26} &= 2 \frac{\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} R_{53} + R_{54}, \quad s_{27} = 2 \frac{\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} R_{53} + R_{54}, \\
 s_{31} = s_{32} = 0, \quad s_{33} &= \lambda - i \xi \hat{u} + \hat{A}_2 \left(\frac{1}{\hat{A}_2} \right)', \quad s_{34} = -2 \hat{A}_2, \quad s_{35} = 0, \\
 s_{36} &= -2 \hat{A}_2 \left(\frac{i \xi}{\operatorname{Re}} - \frac{2 i \xi}{\operatorname{Re}} \frac{1}{1 - \sqrt{\hat{A}_2 / \operatorname{Re}}} \right), \quad s_{37} = -2 \hat{A}_2 \left(\frac{i \xi}{\operatorname{Re}} - \frac{2 i \xi}{\operatorname{Re}} \frac{1}{1 + \sqrt{\hat{A}_2 / \operatorname{Re}}} \right), \\
 s_{41} &= 2 \xi^2 \frac{1}{\operatorname{Re}} \sqrt{\frac{\hat{A}_2}{\operatorname{Re}}} \frac{1}{1 - \hat{A}_2 / \operatorname{Re}} + R_{43} \frac{2 i \xi}{\operatorname{Re}} \sqrt{\frac{\hat{A}_2}{\operatorname{Re}}} \frac{1}{1 - \hat{A}_2 / \operatorname{Re}} + \frac{1}{\operatorname{Re}} \xi^2, \\
 s_{42} &= -2 \xi^2 \frac{1}{\operatorname{Re}} \sqrt{\frac{\hat{A}_2}{\operatorname{Re}}} \frac{1}{1 - \hat{A}_2 / \operatorname{Re}} + R_{45} \frac{2 i \xi}{\operatorname{Re}} \sqrt{\frac{\hat{A}_2}{\operatorname{Re}}} \frac{1}{1 - \hat{A}_2 / \operatorname{Re}} - \frac{1}{\operatorname{Re}} \xi^2, \\
 s_{43} &= \frac{i \xi \omega}{\sqrt{\operatorname{Re} \hat{A}_2}} \frac{1}{1 - \hat{A}_2 / \operatorname{Re}} - i \xi \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Re} \hat{A}_2}} \frac{\hat{a}'_{12} + i \xi \hat{A}_1}{\hat{A}_2} + \frac{i \xi \hat{\omega}}{\hat{A}_2}, \quad s_{44} = 0, \\
 s_{45} &= -2 \xi^2 \sqrt{\frac{\hat{A}_2}{\operatorname{Re}}} \frac{1}{1 - \hat{A}_2 / \operatorname{Re}} - \xi^2, \\
 s_{46} &= 2 i \xi \sqrt{\frac{\hat{A}_2}{\operatorname{Re}}} \frac{1}{1 - \hat{A}_2 / \operatorname{Re}} \left(\frac{\lambda - i \xi \hat{u}}{\sqrt{\operatorname{Re} \hat{A}_2}} - \frac{2 a_{12} i \xi}{\hat{A}_2 \operatorname{Re}} \right) + \\
 &\quad + \frac{2 i \xi}{\operatorname{Re}} \sqrt{\frac{\hat{A}_2}{\operatorname{Re}}} \frac{1}{1 - \hat{A}_2 / \operatorname{Re}} \left(2 \frac{\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} R_{43} + \lambda - i \xi \hat{u} + R_{44} \right) + \frac{2 \hat{a}_{12}}{\operatorname{Re} \hat{A}_2} \xi^2 + \\
 &\quad + 2 i \xi \sqrt{\frac{\hat{A}_2}{\operatorname{Re}}} \frac{1}{1 - \hat{A}_2 / \operatorname{Re}} \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{Re} \hat{A}_2}} \right)' - \frac{2 i \xi}{\operatorname{Re}} \left(\frac{1}{1 - \sqrt{\hat{A}_2 / \operatorname{Re}}} \right)', \\
 s_{47} &= -2 i \xi \sqrt{\frac{\hat{A}_2}{\operatorname{Re}}} \frac{1}{1 - \hat{A}_2 / \operatorname{Re}} \left(\frac{\lambda - i \xi \hat{u}}{\sqrt{\operatorname{Re} \hat{A}_2}} + \frac{2 a_{12} i \xi}{\hat{A}_2 \operatorname{Re}} \right) + \\
 &\quad + \frac{2 i \xi}{\operatorname{Re}} \sqrt{\frac{\hat{A}_2}{\operatorname{Re}}} \frac{1}{1 - \hat{A}_2 / \operatorname{Re}} \left(2 \frac{\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} R_{43} + \lambda - i \xi \hat{u} + R_{44} \right) + \frac{2 \hat{a}_{12}}{\operatorname{Re} \hat{A}_2} \xi^2 - \\
 &\quad - 2 i \xi \sqrt{\frac{\hat{A}_2}{\operatorname{Re}}} \frac{1}{1 - \hat{A}_2 / \operatorname{Re}} \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{Re} \hat{A}_2}} \right)' - \frac{2 i \xi}{\operatorname{Re}} \left(\frac{1}{1 - \sqrt{\hat{A}_2 / \operatorname{Re}}} \right)',
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{51} &= s_{52} = s_{53} = 0, & s_{54} &= 1, & s_{55} &= 0, \\
s_{56} &= -\frac{2i\xi}{\text{Re}} \frac{1}{1 - \sqrt{\hat{A}_2/\text{Re}}}, & s_{57} &= -\frac{2i\xi}{\text{Re}} \frac{1}{1 + \sqrt{\hat{A}_2/\text{Re}}}, & & (2.5) \\
s_{61} &= -\frac{i\xi}{2} \sqrt{\frac{\hat{A}_2}{\text{Re}}} + \frac{R_{43}}{2}, & s_{62} &= \frac{i\xi}{2} \sqrt{\frac{\hat{A}_2}{\text{Re}}} + \frac{R_{45}}{2}, & s_{63} &= \frac{\hat{\omega}}{4} \sqrt{\frac{\text{Re}}{\hat{A}_2}} - \frac{a'_{12} + i\xi \hat{A}_1}{4\hat{A}_2}, \\
s_{64} &= 0, & s_{65} &= \frac{i\xi \sqrt{\text{Re} \hat{A}_2}}{2}, \\
s_{66} &= \frac{\sqrt{\text{Re} \hat{A}_2}}{2} \left(\frac{\lambda - i\xi \hat{u}}{\sqrt{\text{Re} \hat{A}_2}} - \frac{2\hat{a}_{12}i\xi}{\text{Re} \hat{A}_2} \right) + \frac{1}{2} \left(2 \frac{\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} R_{43} + \lambda - i\xi \hat{u} + R_{44} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\text{Re} \hat{A}_2} \left(\frac{1}{\sqrt{\text{Re} \hat{A}_2}} \right)', \\
s_{67} &= -\frac{\sqrt{\text{Re} \hat{A}_2}}{2} \left(\frac{\lambda - i\xi \hat{u}}{\sqrt{\text{Re} \hat{A}_2}} + \frac{2\hat{a}_{12}i\xi}{\text{Re} \hat{A}_2} \right) + \frac{1}{2} \left(2 \frac{\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} R_{43} + \lambda - i\xi \hat{u} + R_{44} \right) - \frac{1}{2\sqrt{\text{Re} \hat{A}_2}} \left(\frac{1}{\sqrt{\text{Re} \hat{A}_2}} \right)', \\
s_{71} &= \frac{i\xi}{2} \sqrt{\frac{\hat{A}_2}{\text{Re}}} + \frac{R_{43}}{2}, & s_{72} &= -\frac{i\xi}{2} \frac{\sqrt{\hat{A}_2}}{\text{Re}} + \frac{R_{45}}{2}, & s_{73} &= -\frac{\hat{\omega}}{4} \sqrt{\frac{\text{Re}}{\hat{A}_2}} - \frac{\hat{a}'_{12} + i\xi \hat{A}_1}{2}, \\
s_{74} &= 0, & s_{75} &= -i\xi \frac{\sqrt{\text{Re} \hat{A}_2}}{2} - \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{1}{\sqrt{\text{Re} \hat{A}_2}} \right)', \\
s_{76} &= \frac{\hat{a}_{12}i\xi}{\sqrt{\text{Re} \hat{A}_2}} + \frac{\hat{a}_{12}}{\hat{A}_2} R_{43} + R_{44} - \frac{1}{2} \sqrt{\text{Re} \hat{A}_2} \left(\frac{1}{\sqrt{\text{Re} \hat{A}_2}} \right)', \\
s_{77} &= \lambda - i\xi \hat{u} + R_{44} + i\xi \frac{\hat{a}_{12}}{\sqrt{\text{Re} \hat{A}_2}} + \frac{\hat{a}'_{12} R_{43}}{\hat{A}_2} + \frac{1}{2\sqrt{\text{Re} \hat{A}_2}} \left(\frac{1}{\sqrt{\text{Re} \hat{A}_2}} \right)'.
\end{aligned}$$

В силу формул (2.5) матрица G (коэффициент при параметре λ) принимает вид

$$G = \left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2i\xi}{1 - \hat{A}_2/\text{Re}} \left(\frac{1}{\sqrt{\text{Re} \hat{A}_2}} + \frac{1}{\text{Re}} \right) & \frac{2i\xi}{1 - \hat{A}_2/\text{Re}} \left(\frac{1}{\text{Re}} - \frac{1}{\sqrt{\text{Re} \hat{A}_2}} \right) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\text{Re} \hat{A}_2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\text{Re} \hat{A}_2}
\end{array} \right). \quad (2.6)$$

Из канонической матрицы K и матрицы G первые три компоненты z_1, z_2, z_3 выражаются через остальные компоненты вектора z , причем с коэффициентом порядка $1/\lambda$ при

$|\lambda| \rightarrow \infty$. Поэтому компонентами z_1, z_2, z_3 можно пренебречь. Следовательно, достаточно исследовать систему для функций z_4, z_5, z_6, z_7 с матрицей при λ , которая представляет собой диагональный блок четвертого порядка (в представлении (2.6) он выделен).

Приведем данную матрицу к каноническому виду с помощью следующей матрицы перехода:

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} 2i\xi \frac{1}{1 - \hat{A}_2/\text{Re}} \frac{\hat{A}_2}{\text{Re}} \left(\frac{1}{\text{Re}} - \frac{1}{\sqrt{\text{Re} \hat{A}_2}} \right) & -2i\xi \frac{1}{1 - \hat{A}_2/\text{Re}} \frac{\hat{A}_2}{\text{Re}} \left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{1}{\sqrt{\text{Re} \hat{A}_2}} \right) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выполнив замену $\mathbf{Z} = \tilde{T}\hat{\mathbf{Y}}$, получаем систему

$$I_4 \hat{\mathbf{Y}}' + (\lambda J + D) \hat{\mathbf{Y}} = 0, \quad (2.7)$$

где

$$J = \begin{pmatrix} \sqrt{\text{Re} / \hat{A}_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\text{Re} / \hat{A}_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

матрица $D = \tilde{T}^{-1} \tilde{S} \tilde{T} + \tilde{T}^{-1} \tilde{T}'$ ($\tilde{S} = (s_{ij})$ ($i, j = 4, \dots, 7$) — подматрица матрицы S) записывается в виде

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{\text{Re} / \hat{A}_2} \check{s}_{77} & \sqrt{\text{Re} / \hat{A}_2} s_{76} & 0 & \sqrt{\text{Re} / \hat{A}_2} s_{75} \\ -\sqrt{\text{Re} / \hat{A}_2} \check{s}_{67} & -\sqrt{\text{Re} / \hat{A}_2} \check{s}_{66} & 0 & -\sqrt{\text{Re} / \hat{A}_2} s_{65} \\ \hline \beta^*(s_{41} - \check{s}_{77}) & \beta^*(s_{41} - \check{s}_{66}) & & \\ -\beta_* \check{s}_{67} + \check{s}_{47} & -\beta_* s_{76} + \check{s}_{46} & s_{41} & s_{42} - \beta_* s_{65} - \beta^* s_{75} \\ +(\beta^*)' & +(\beta_*)' & & \\ \hline \beta^* + s_{57} & \beta_* + s_{56} & s_{54} & 0 \end{pmatrix},$$

причем элементы s_{ij} определены формулами (2.5), знак “ $\check{}$ ” означает, что из соответствующих элементов удалены слагаемые, содержащие параметр λ ;

$$\beta^* = 2i\xi \frac{1}{1 - \hat{A}_2/\text{Re}} \frac{\hat{A}_2}{\text{Re}} \left(\frac{1}{\text{Re}} - \frac{1}{\sqrt{\text{Re} \hat{A}_2}} \right), \quad \beta_* = -2i\xi \frac{1}{1 - \hat{A}_2/\text{Re}} \frac{\hat{A}_2}{\text{Re}} \left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{1}{\sqrt{\text{Re} \hat{A}_2}} \right).$$

Получаем асимптотическое представление фундаментальной матрицы для системы (2.7) при $|\lambda| \rightarrow \infty$. Разбивая матрицу D на блоки (один диагональный блок соответствует ненулевым собственным числам $\sqrt{\text{Re} / \hat{A}_2}$ и $-\sqrt{\text{Re} / \hat{A}_2}$, второй — нулю), систему (2.7) запишем в виде

$$I_4 \hat{\mathbf{Y}}' = -(\lambda J + D) \hat{\mathbf{Y}},$$

где

$$D = \left(\begin{array}{c|c} D_{\text{I}}^{\text{I}} & D_{\text{II}}^{\text{I}} \\ \hline D_{\text{I}}^{\text{II}} & D_{\text{II}}^{\text{II}} \end{array} \right).$$

Используя блочную структуру матрицы D и вводя обозначение

$$\mu = -\lambda,$$

получаем набор задач Коши для компонент неизвестной вектор-функции, соответствующей нулевому собственному значению:

$$\hat{\mathbf{Y}}_{\text{II}}^i = -D_{\text{II}}^{\text{II}} \hat{\mathbf{Y}}_{\text{II}}^i - D_{\text{I}}^{\text{II}} \hat{\mathbf{Y}}_{\text{I}}^i \quad (2.8)$$

($\hat{\mathbf{Y}}_{\text{II}}^i = (0, 1)^T$ — i -компонента, $i = 1, 2$). Полагая векторы $\hat{\mathbf{Y}}_{\text{I}}^i$ ($i = 1, 2$) известными, найдем фундаментальную систему решений для системы (2.8) и запишем общее решение соответствующей однородной системы:

$$\hat{\mathbf{Y}}_{\text{II}} = C_1 \hat{\mathbf{Y}}_{\text{II}}^1 + C_2 \hat{\mathbf{Y}}_{\text{II}}^2 \quad (2.9)$$

(C_i — произвольные комплексные постоянные, $i = 1, 2$) и общее решение системы (2.8):

$$\hat{\mathbf{Y}}_{\text{II}} = C_1 \hat{\mathbf{Y}}_{\text{II}}^1 + C_2 \hat{\mathbf{Y}}_{\text{II}}^2 + \int_0^y Y(y) Y^{-1}(s) D_{\text{I}}^{\text{II}} \hat{\mathbf{Y}}_{\text{I}}(s) ds \quad (2.10)$$

($Y(y)$ — фундаментальная матрица, составленная из столбцов Y_{II}^i , $i = 1, 2$).

Систему для поиска оставшихся двух компонент вектора $\hat{\mathbf{Y}}$ в силу (2.10) запишем следующим образом:

$$\hat{\mathbf{Y}}_{\text{I}}' = \mu \begin{pmatrix} \sqrt{\text{Re}/\hat{A}_2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\text{Re}/\hat{A}_2} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_{\text{I}} - D_{\text{I}}^{\text{I}} \hat{\mathbf{Y}}_{\text{I}} - D_{\text{II}}^{\text{I}} (C_1 \hat{\mathbf{Y}}_{\text{II}}^1 + C_2 \hat{\mathbf{Y}}_{\text{II}}^2) - D_{\text{II}}^{\text{I}} \int_0^y Y(y) Y^{-1}(s) D_{\text{I}}^{\text{II}}(s) \hat{\mathbf{Y}}_{\text{I}}(s) ds \quad (2.11)$$

(слагаемые $-D_{\text{I}}^{\text{II}}(C_1 \hat{\mathbf{Y}}_{\text{II}}^1 + C_2 \hat{\mathbf{Y}}_{\text{II}}^2)$, $D_{\text{II}}^{\text{I}} \int_0^y Y(y) Y^{-1}(s) D_{\text{I}}^{\text{II}} \hat{\mathbf{Y}}_{\text{I}}(s) ds$ — свободные члены).

В соответствии с [13] (см. также [14, 15]) при больших по модулю μ фундаментальную систему решений (2.11) будем искать в виде

$$\hat{\mathbf{Y}}_{\text{I}} = \left(P_0(y) + \frac{1}{\mu} P_1(y) + \frac{1}{\mu^2} P_2(y) + \dots \right) \delta_{ij} e^{\mu \Gamma_j(y)}, \quad i, j = 1, 2, \quad (2.12)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера;

$$\Gamma_1(y) = \int_0^y \sqrt{\frac{\text{Re}}{\hat{A}_2}} d\xi, \quad \Gamma_2(y) = -\Gamma_1(y).$$

Подставляя представление (2.12) в соответствующую однородную систему, получаем соотношение

$$\begin{aligned} \left(P_0(y) + \frac{1}{\mu} P_1(y) + \frac{1}{\mu^2} P_2(y) + \dots \right) \mu \Lambda + \left(P_0' + \frac{1}{\mu} P_1' + \frac{1}{\mu^2} P_2' + \dots \right) = \\ = (\mu \Lambda - D_{\text{I}}^{\text{I}}) \left(P_0 + \frac{1}{\mu} P_1 + \frac{1}{\mu^2} P_2 + \dots \right), \end{aligned}$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{\text{Re}/\hat{A}_2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\text{Re}/\hat{A}_2} \end{pmatrix}.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ , получаем

$$P_0\Lambda = \Lambda P_0; \quad (2.13)$$

$$P_1\Lambda + P'_0 = \Lambda P_1 - D_1^I P_0. \quad (2.14)$$

Поскольку диагональные элементы матрицы Λ различны, из равенства (2.13) следует, что матрица P_0 является диагональной:

$$P_0(y) = \begin{pmatrix} p_1(y) & 0 \\ 0 & p_2(y) \end{pmatrix}.$$

Рассматривая диагональные элементы, из равенства (2.14) получаем соотношения

$$p'_i = -d_{ii}^I p_i, \quad p_i(0) = 1, \quad i = 1, 2,$$

причем d_{ii}^I — диагональные элементы матрицы D_1^I . Отсюда следует

$$p_i = \exp\left(-\int_0^y d_{ii}(\xi) d\xi\right), \quad i = 1, 2$$

(индекс I опущен).

Полученная фундаментальная система позволяет найти общее решение неоднородной системы (2.11), однако в силу наличия интегралов, появляющихся при использовании метода произвольных постоянных, свободный член $D_{II}^I(C_1\hat{Y}_{II}^1 + C_2\hat{Y}_{II}^2)$ дает дополнительные множители порядка $1/\mu$, и его вклад можно не учитывать. Аналогичные рассуждения при-

менимы к слагаемому $D_{II}^I \int_0^y Y(y)Y^{-1}(s)D_I^{II}\hat{Y}_I(s) ds$ в системе (2.11) и свободному члену в

системе (2.8).

Таким образом, фундаментальная матрица $W_{\hat{Y}}$ для системы

$$\hat{Y}' = (\mu J - D)\hat{Y}$$

имеет вид

$$W_{\hat{Y}} = \begin{pmatrix} e^{\mu \int_0^y \sqrt{\frac{\text{Re}}{\hat{A}_2}} d\xi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\mu \int_0^y \sqrt{\frac{\text{Re}}{\hat{A}_2}} d\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_3^3 & y_4^3 \\ 0 & 0 & y_3^4 & y_4^4 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

где y_i^j ($i, j = 3, 4$) — компоненты фундаментальной матрицы $Y(y)$ (2.9).

Краевые условия (2.2), (2.3) при $y = 0, 1$ в новых переменных \hat{y}_i , $i = 1, 2, 3, 4$ записываются следующим образом:

$$\hat{y}_1 - \hat{y}_2 = 0,$$

$$\left(\beta^* - \frac{2i\xi}{\operatorname{Re}(1 - \sqrt{\hat{A}_2/\operatorname{Re}})} + \frac{i\xi}{\operatorname{Re}}\right)\hat{y}_1 + \left(\beta_* - \frac{2i\xi}{\operatorname{Re}(1 + \sqrt{\hat{A}_2/\operatorname{Re}})} + \frac{i\xi}{\operatorname{Re}}\right)\hat{y}_2 + \hat{y}_3 = 0.$$

Введя обозначения

$$\alpha_1 = \beta^* - \frac{2i\xi}{\operatorname{Re}(1 - \sqrt{\hat{A}_2/\operatorname{Re}})} + \frac{i\xi}{\operatorname{Re}}, \quad \alpha_2 = \beta_* - \frac{2i\xi}{\operatorname{Re}(1 + \sqrt{\hat{A}_2/\operatorname{Re}})} + \frac{i\xi}{\operatorname{Re}}$$

и используя представление (2.15) фундаментальной матрицы $W_{\hat{Y}}$, получаем спектральное соотношение

$$\det \begin{pmatrix} L \\ LW_{\hat{Y}}(1) \end{pmatrix} = 0, \quad (2.16)$$

где матрица L имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выполняя в равенстве (2.16) элементарные преобразования определителя, получаем

$$\exp\left(\mu \int_0^1 \sqrt{\frac{\operatorname{Re}}{\hat{A}_2}} d\xi\right)p_1(1) + \exp\left(-\mu \int_0^1 \sqrt{\frac{\operatorname{Re}}{\hat{A}_2}} d\xi\right)p_2(1) = 0.$$

Следовательно,

$$\exp\left(2\mu \int_0^1 \sqrt{\frac{\operatorname{Re}}{\hat{A}_2}} d\xi\right) = -\frac{p_2(1)}{p_1(1)} = -\exp\left(\int_0^1 (d_{11} - d_{22}) d\xi\right).$$

Таким образом,

$$\lambda_k = -\left(\int_0^1 (d_{11} - d_{22}) d\xi + (2k + 1)i\pi\right) / \left(2 \int_0^1 \sqrt{\frac{\operatorname{Re}}{\hat{A}_2}} d\eta\right) + O\left(\frac{1}{|k|}\right), \quad (2.17)$$

где k — целое число, $|k| \rightarrow \infty$.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Используя представление (2.12) (а также более общий вариант представления, учитывающий дополнительно степени λ^{-1} [15]), можно получить асимптотическую формулу любого порядка точности, определяемого степенью k^{-1} .

ЗАМЕЧАНИЕ 7. С учетом формулы (2.5) из (2.17) можно получить неравенство, гарантирующее линейную неустойчивость аналога течения Пуазейля:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\hat{A}_2}} \left(\frac{3}{2} R_{44} + \frac{R_{43}}{\hat{A}_2} (\hat{a}'_{12} + \hat{a}_{12}) - \frac{\hat{A}'_2}{4 \operatorname{Re} \hat{A}_2^2}\right) d\eta < 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Предложенный метод без существенных изменений можно использовать при исследовании устойчивости выбранного аналога течения Пуазейля в классе одномерных возмущений. Однако с физической точки зрения наибольший интерес представляет двумерный случай (при больших значениях частоты ξ).

ЛИТЕРАТУРА

1. Алтухов Ю. А., Головичева И. Э., Пышнограй Г. В. Молекулярный подход в динамике линейных полимеров: теория и численный эксперимент // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2000. № 1. С. 3–13.
2. Пышнограй Г. В., Покровский В. Н., Яновский Ю. Г. и др. Определяющее уравнение нелинейных вязкоупругих (полимерных) сред в нулевом приближении по параметрам молекулярной теории и следствия для сдвига и растяжения // Докл. АН. 1994. Т. 355, № 9. С. 612–615.
3. Volkov V. S., Vinogradov G. V. Molecular theories of nonlinear viscoelasticity of polymers // Rheol. Acta. 1984. V. 23, N 3. P. 231–237.
4. Алтухов Ю. А., Гусев А. С., Макарова М. А., Пышнограй Г. В. Обобщение закона Пуазейля для плоскопараллельного течения вязкоупругих сред // Механика композиц. материалов и конструкций. 2007. Т. 13, № 4. С. 581–590.
5. Алтухов Ю. А., Пышнограй Г. В. Входные течения в канале 4 : 1 текучих линейных полимеров // Механика композиц. материалов и конструкций. 2001. Т. 7, № 1. С. 16–23.
6. Блохин А. М., Егитов А. В., Ткачев Д. Л. Линейная неустойчивость решений математической модели, описывающей течения полимеров в бесконечном канале // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2015. Т. 55, № 5. С. 850–875.
7. Блохин А. М., Ткачев Д. Л. Линейная асимптотическая неустойчивость стационарного течения полимерной среды в плоском канале в случае периодических возмущений // Сиб. журн. индустр. математики. 2014. Т. 17, № 3. С. 13–25.
8. Алтухов Ю. А. Введение в мезоскопическую теорию текущих полимерных систем / Ю. А. Алтухов, А. С. Гусев, Г. В. Пышнограй. Барнаул: Алт. гос. пед. акад., 2012.
9. Блохин А. М., Бамбаева Н. В. Нахождение решений типа Пуазейля и Куэтта для уравнений несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, № 2. С. 3–14.
10. Wassner E., Schmidt M., Munstedt H. Entry flow of a low-density-polyethylene melt into a slit die: An experimental study by laser-Doppler velocimetry // J. Rheol. 1999. V. 49, N 6. P. 1339–1353.
11. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1979.
12. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
13. Birkhoff G. D. Collected mathematical papers. N. Y.: Amer. Math. Soc., 1950.
14. Брушлинский К. В. О росте решения смешанной задачи в случае неполноты собственных функций // Изв. АН СССР. Сер. Математика. 1959. № 23. С. 893–912.
15. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.

*Поступила в редакцию 20/X 2017 г.,
в окончательном варианте — 5/III 2018 г.*