

УДК 536.242

## **Динамика поля температуры в массивной подложке при воздействии концентрированного теплового потока\***

**А.И. Федорченко<sup>1,2</sup>, В.В. Терехов<sup>2</sup>, Н. Ян Лун<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Институт термомеханики Чешской академии наук, Прага, Чехия*

<sup>2</sup>*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск*

E-mail: vt@itp.nsc.ru

В статье представлены результаты аналитического решения задачи о распространении тепла внутри массивного твердого образца при концентрированном теплоподводе к поверхности этого образца. С использованием интегральных косинус-преобразования Фурье и преобразования Ганкеля получены аналитические выражения для нестационарного распределения температуры внутри тела. Представлены примеры применения решений для оценки характерных времен достижения точек Чернова  $As_1$  и  $As_3$  модельных гиповзвлектоидных сталей при воздействии на них лазерного излучения. Продемонстрировано приложение указанного решения для расчета динамики охлаждения керамических образцов  $Al_2O_3$  и  $SiO_2$  под воздействием импульсных воздушной и водяной струй.

**Ключевые слова:** импульсное охлаждение, воздушные и водяные струи, косинус-преобразование Фурье, преобразование Ганкеля, гиповзвлектоидная сталь, точки Чернова, нагрев лазерным пучком.

### **Введение**

В настоящее время наблюдается большой интерес к новым технологиям создания функциональных материалов с заданными свойствами. В связи с этим вопросы теплопередачи при тепловом воздействии на керамику, гиповзвлектоидные стали и металлы, склонные к аморфизации, представляются важными, в особенности такими современными методами локального воздействия, как электронные и лазерные пучки, струи низкотемпературной плазмы, импульсные газовые или жидкостные струи.

Обработка поверхностей с помощью струй низкотемпературной плазмы широко распространена, основные аспекты этой технологии рассматривались в работах [1, 2]. К таковым следует отнести процессы межфазного обмена импульсом, тепло- и массоперенос в пылевых плазменных струях и взаимодействие между частицами, находящимися

---

\* Работа выполнена в рамках совместного Российско-Чешского проекта. С чешской стороны работа была поддержана грантом Czech Science Foundation (Project No. 21-26232J) и частично — Institute of Thermomechanics (RVO: 61388998), с российской стороны — РФФИ (грант 20-58-26003) и госконтрактом № 121031800217-8.

в различных агрегатных состояниях, и поверхностью. Большое внимание в указанных работах уделялось экспериментальным и теоретическим исследованиям процессов в гомогенных и гетерогенных плазменных струях.

Лазерный нагрев поверхностей включает в себя широкий класс методов обработки материалов, таких как закалка, отжиг, поверхностная переплавка и сплавление. Отметим, что высокоэнергетичные пучки, в том числе лазерные, используются для нагрева поверхности, а для эффективного ее охлаждения применяются воздушные или жидкостные импактные струи [3–8]. И в том и в другом случае важно иметь возможность предсказывать динамику изменения температуры и время достижения определенных ее значений. Так, в случае нагрева гипозвектиодной стали для этого используются температура плавления и точки Чернова [9]. При охлаждении электронных устройств важно избегать температуры перегрева, при которой происходит потеря рабочих свойств полупроводников. Например, это происходит в случае, когда при повышении температуры диод начинает проводить ток в обоих направлениях, что может сохраняться даже при последующем его охлаждении [10, 11]. Такое явление объясняется тем, что при повышении температуры ток, проходящий через полупроводниковое устройство, увеличивается, что приводит к большей диссипации тепла на нем и, следовательно, дальнейшему повышению температуры. Очевидно, что предсказание такого поведения устройств является актуальной задачей.

Аналитические решения позволяют проводить априорный анализ, который дает возможность предсказывать нежелательные тепловые режимы и, соответственно, избегать их.

Таким образом, целью настоящего исследования является построение аналитического решения для задачи распространения тепла от концентрированного источника внутри различных материалов. Это решение должно быть одинаково справедливо как для режима нагрева, так и охлаждения материала.

## 1. Постановка задачи и математическая модель

Локализованные источники позволяют нагревать порошковые и композитные материалы с минимальными затратами энергии. Кроме того, отдельные части конструкций и устройств, изготовленные из некоторых материалов, например, титана, могут быть соединены только путем сварки струей низкотемпературной плазмы или электронным пучком. Данный подход требует точного контроля температуры образцов. На основе этих соображений и будем искать аналитическое решение для распределения температуры в общей постановке.

Рассмотрим полубесконечный образец, на поверхности которого ( $z = 0$ , ось  $z$  направлена вниз) локализованный осесимметричный тепловой источник радиуса  $R$  прилагается в момент времени  $t = 0$ . В общем случае плотность теплового потока  $q = q_0 f(t, r)$ , где  $f(t, r)$  — безразмерная функция, описывающая распределение теплового потока по нагреваемой поверхности. Начальная температура образца постоянна и равна  $T_0$ .

Уравнение теплопроводности в цилиндрических координатах  $(t, r, z)$ , описывающее динамику поля температуры внутри образца, может быть записано в форме:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

где  $a = \lambda/(\rho c)$  — коэффициент теплопроводности,  $\rho$  — плотность,  $c$  — теплоемкость.

Начальные и граничные условия для описываемой задачи имеют вид:

$$T(0, r, z) = T_0, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = -\frac{q_0}{\lambda} f(t, r). \quad (3)$$

Для приведения краевой задачи к безразмерному виду введем следующие зависимости и независимые переменные:  $\theta = (T - T_0)/T_0$ , число Фурье  $Fo = at/R^2$ ,  $r^* = r/R$ ,  $z^* = z/R$ . Тогда уравнения (1)–(3) можно записать как

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}, \quad (4)$$

$$\theta(r, z, 0) = 0, \quad (5)$$

$$\left. \partial \theta / \partial z \right|_{z=0} = -Bi f(Fo, r), \quad (6)$$

где  $Bi = q_0 R / (\lambda T_0)$  — число Био (здесь и далее мы опускаем звездочку на безразмерных величинах).

## 2. Аналитическое решение

Последовательно применяя к задаче (4)–(6) косинус-преобразование Фурье по переменной  $z$

$$\theta_\alpha(r, Fo) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \theta(r, z, Fo) \cos(\alpha z) dz \quad (7)$$

и преобразование Ганкеля нулевого порядка по переменной  $r$

$$\theta_{\alpha, \beta}(Fo) = \int_0^\infty r \theta_\alpha(r, Fo) J_0(r\beta) dr, \quad (8)$$

получим

$$\frac{d\theta_{\alpha, \beta}}{dFo} = -(\alpha^2 + \beta^2) \theta_{\alpha, \beta} + F_\beta(Fo), \quad (9)$$

$$\theta_{\alpha, \beta}(0) = 0, \quad (10)$$

где  $F_\beta(Fo) = Bi \int_0^\infty r f(r, Fo) J_0(\beta r) dr$ .

Для вывода уравнения (9) после применения преобразования Ганкеля к слагаемому  $\frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)$  последнее было дважды проинтегрировано по частям с учетом следующих свойств функций Бесселя:

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x), \quad \frac{dJ_1(x)}{dx} = J_0 - \frac{J_1(x)}{x}. \quad (11)$$

Решая уравнения (9) и (10) методом вариации произвольной постоянной, получаем

$$\theta_{\alpha,\beta}(Fo) = e^{-(\alpha^2+\beta^2)Fo} \int_0^{Fo} e^{(\alpha^2+\beta^2)\tau} F_{\beta}(\tau) d\tau. \quad (12)$$

После использования обратных преобразований Фурье и Ганкеля имеем

$$\theta(z, r, Fo) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left[ e^{-(\alpha^2+\beta^2)Fo} \int_0^{Fo} e^{(\alpha^2+\beta^2)\tau} F_{\beta}(\tau) d\tau \right] \cos(\alpha z) J_0(\beta r) \beta d\alpha d\beta. \quad (13)$$

В случае стационарной плотности теплового потока на поверхности решение, данное уравнением (13), упрощается:

$$\theta(z, r, Fo) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{F_{\beta}}{\alpha^2 + \beta^2} \left[ 1 - e^{-(\alpha^2+\beta^2)Fo} \right] \cos(\alpha z) J_0(\beta r) \beta d\alpha d\beta. \quad (14)$$

Обычно распределение плотности теплового потока  $q = q_0 f(r)$  при использовании плазменной струи или лазерного пучка описывается гауссовым профилем:  $Q(r) = q/q_0 = \exp(-kr^2)$ , где  $k$  — безразмерный коэффициент фокусировки. В этом случае преобразование Ганкеля от  $Q(r)$  является первым экспоненциальным интегралом Вебера:

$$F_{\beta} = \text{Bi} \int_0^{\infty} r J_0(\beta r) e^{-kr^2} dr = \frac{\text{Bi}}{2k} e^{-\beta^2/4k}. \quad (15)$$

Подстановка (15) в (14) дает

$$\theta(z, r, Fo) = \text{Bi} \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \int_0^{\infty} \beta J_0(\beta r) e^{-\frac{\beta^2}{4k}} \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-(\alpha^2+\beta^2)Fo}}{\alpha^2 + \beta^2} \cos(\alpha z) d\alpha d\beta. \quad (16)$$

Для удобства сравнения профилей температуры и радиуса локального нагрева будем принимать, что при  $r = R$  функция  $\exp(-kr^2)$  уменьшается в  $e$  раз, т.е.  $kr^2 = 1$ . В этом случае безразмерный коэффициент фокусировки равен 1, так что  $k^* = kR^2 = 1$ .

В качестве примеров теплового воздействия лазерного пучка рассмотрим два важных для практики случая: нагрев лазером модельной гипоевтектоидной стали ( $C < 0,8\%$ ) и молибдена как материала, склонного к аморфизации [12, 13]. В случае нагрева стали важны моменты достижения критических температур  $Ac_1 = 727^\circ\text{C}$  и  $Ac_3 = 820^\circ\text{C}$  (точки Чернова). Точка  $Ac_1$  соответствует переходу перлита в аустенит (начало рекристаллизации), а точка  $Ac_3$  соответствует окончанию рекристаллизации, т.е. сталь переходит в однофазный аустенит. В общем случае температура  $Ac_3$  зависит от содержания углерода в стали. Под модельностью в данном случае подразумевается постоянство теплофизических свойств в зависимости от температуры. В действительности теплофизические свойства, представленные в табл. 1, изменяются существенно в исследуемом диапазоне температур. Поэтому пренебрежение данной зависимостью является приближением. Также следует отметить, что точка Кюри для сталей находится в непосредственной близости к рассматриваемым температурам, и это необходимо учитывать для реальных приложений.

**Таблица 1**

**Теплофизические свойства гиповтектоидной стали ( $C < 0,8\%$ ) и молибдена**

Параметры Материал подложки	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$c$ , Дж/(кг·К)	$\lambda$ , Вт/(м·К)	$T_m$ , К	$a$ , (м <sup>2</sup> /с)
Гиповтектоидная сталь ( $C < 0,8\%$ )	7800	600	70	1758	$1,5 \cdot 10^{-5}$
Молибден	10210	244	135	2896	$5,42 \cdot 10^{-5}$

Во время теплового воздействия на аморфный молибден важно контролировать температуру, т.к. кристаллизация возможна в температурном диапазоне  $0,4T_m - 0,6T_m$ , что также сопровождается резким изменением теплофизических свойств.

Проведем расчеты для следующих значений режимных и безразмерных параметров:  $q_0 = 10^8$  Вт/м<sup>2</sup>,  $R = 2$  мм. Тогда  $Bi = 11,1$  и  $4,94$  для стали и молибдена соответственно.

Рисунки 1 и 2 демонстрируют динамику нагрева лазерным пучком гиповтектоидной стали и молибдена соответственно.

### 3. Включение параметров импактной струи в математическую модель

В отличие от лазерного пучка, для описания импактной струи в математическую модель следует ввести следующие параметры: температуру  $T_\infty$  и скорость струи  $u$ , кинематическую вязкость  $\nu$ , коэффициент температуропроводности жидкости  $a = \lambda/(\rho c)$ , а также радиус струи  $R$ . Температура  $T_\infty$  может быть учтена путем использования безразмерной температуры в виде  $\theta = (T - T_0)/(T_\infty - T_0)$ .

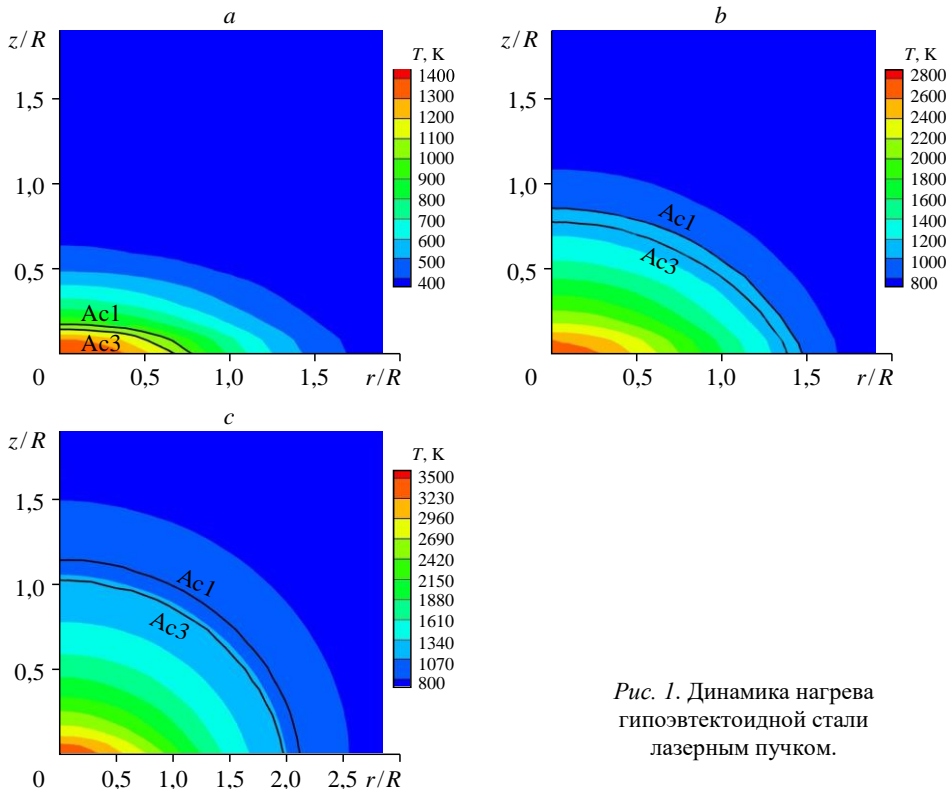


Рис. 1. Динамика нагрева гиповтектоидной стали лазерным пучком.

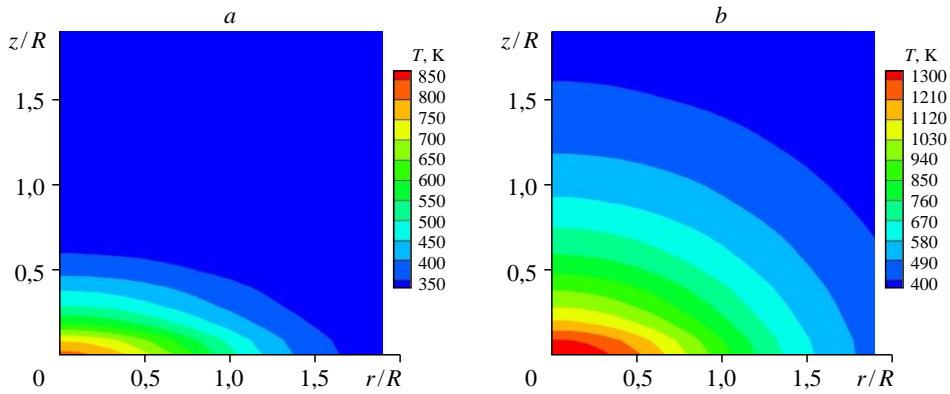


Рис. 2. Динамика нагрева молибдена лазерным пучком.

Многочисленные теоретические и экспериментальные исследования импактных струй [3, 4] предлагают применять закон теплообмена на поверхности, в общем виде записываемый следующей формулой:

$$Nu = A Re^m Pr^n, \tag{17}$$

где  $A$  — некоторый коэффициент,  $Re = uR/\nu$  и  $Pr = \nu/a$  — числа Рейнольдса и Прандтля соответственно.

В частности, для учета влияния расстояния от сопла до поверхности на теплоотдачу импактной струи жидкости в формулу (17) включается число Фруда [6]:

$$Nu = 1,035 Re^{0.5} Pr^{0.5} Fr^{-3/4} \text{ для } Fr \ll 1, \tag{18}$$

$$Nu = 0,795 Re^{0.5} Pr^{0.5} \text{ для } Fr \gg 1, \tag{19}$$

где  $Fr = u/(gh)^{0.5}$  — число Фруда,  $g$  — ускорение свободного падения,  $h$  — расстояние от сопла до подложки.

Тепловой поток на поверхности подложки может быть рассчитан по формуле  $q = Nu(T_\infty - T_0)\lambda/R$ . При этом скорость струи, кинематическая вязкость и коэффициент температуропроводности включены в модель через критерии  $Re$  и  $Pr$ .

С учетом новых безразмерных переменных распределение температуры в подложке, охлаждаемой жидкой или газовой импактной струей, имеет вид:

$$\theta(z, r, Fo) = -\frac{Bi}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \beta e^{-\beta^2/4} J_0(\beta r) \frac{1 - e^{-(\alpha^2 + \beta^2)Fo}}{\alpha^2 + \beta^2} \cos(\alpha z) d\alpha d\beta. \tag{20}$$

В качестве примера рассмотрим результаты охлаждения воздушной и водяной импактными струями двух керамических подложек —  $Al_2O_3$  и  $SiO_2$ . Физические свойства этих подложек приведены в табл. 2.

Таблица 2  
Теплофизические свойства керамических подложек [1]

Параметры Материал подложки	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$c$ , Дж/(кг·К)	$\lambda$ , Вт/(м·К)	$T_m$ , К	$a$ , м <sup>2</sup> /с
$Al_2O_3$	3970	775	40	2300	$1,3 \cdot 10^{-5}$
$SiO_2$	2200	1052	1,38	2000	$6,0 \cdot 10^{-7}$

Таблица 3

Использованные в расчетах свойства  
воздушных и водяных импактных струй

Кинематическая вязкость воздуха $\nu_{\text{air}}$ , $\text{м}^2/\text{с}$	$15,0 \cdot 10^{-6}$
Кинематическая вязкость воды $\nu_{\text{water}}$ , $\text{м}^2/\text{с}$	$1,01 \cdot 10^{-6}$
Коэффициент температуропроводности воздуха $a_{\text{air}}$ , $\text{м}^2/\text{с}$	$21,4 \cdot 10^{-6}$
Коэффициент температуропроводности воды $a_{\text{water}}$ , $\text{м}^2/\text{с}$	$0,144 \cdot 10^{-6}$
Коэффициент теплопроводности воздуха $\lambda_{\text{air}}$ , $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$	0,026
Коэффициент теплопроводности воды $\lambda_{\text{water}}$ , $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$	0,603
Число Прандтля для воздуха $\text{Pr}_{\text{air}}$	0,71
Число Прандтля для воды $\text{Pr}_{\text{water}}$	7,01
Диаметр струи $D_{\text{air}} = D_{\text{water}}$ , $\text{м}$	$10^{-2}$
Температура струи $T_{\infty}$ , $\text{К}$	293
Начальная температура подложки $T_0$ , $\text{К}$	373
Число Рейнольдса $\text{Re}_{\text{air}} = \text{Re}_{\text{water}}$	1000

Полный набор данных, использованных ниже для расчетов воздушной и водяной импактных струй, включая теплофизические свойства воздуха и воды, представлен в табл. 3.

Критериальные уравнения для вычисления плотности теплового потока, согласно работе [3], записываются в виде:

$$\begin{aligned} \text{Nu} &= 0,715 \cdot \text{Re}_D^{0,5} \cdot \text{Pr}^{0,4} \text{ для } 0,15 < \text{Pr} < 3, \\ \text{Nu} &= 0,797 \cdot \text{Re}_D^{0,5} \cdot \text{Pr}^{0,33} \text{ для } 0,15 < \text{Pr} < 3. \end{aligned} \quad (21)$$

В результате вычисления числа Нуссельта по (21) и данным табл. 3 для воздушной струи получаем  $\text{Nu} = 19,6$ , а для водяной —  $\text{Nu} = 47,9$ . Следующие формулы позволяют определить плотность теплового потока и число Био:

$$q_0 = \text{Nu} (T_{\infty} - T_0) \frac{\lambda}{D}, \quad \text{Bi} = \frac{q_0}{\lambda} \cdot \frac{R}{(T_0 - T_{\infty})}. \quad (22)$$

Соответственно, из уравнения (22) получаем  $q_0 = -4076,8 \text{ Вт}/\text{м}^2$  — для воздушной струи и  $q_0 = -2,31 \cdot 10^5 \text{ Вт}/\text{м}^2$  — для водяной. Для воздушной струи, охлаждающей подложку из  $\text{SiO}_2$ ,  $\text{Bi} = -0,3693$ , а для водяной струи на образце из  $\text{Al}_2\text{O}_3$   $\text{Bi} = -0,723$ .

Рисунок 3 демонстрирует режимы охлаждения керамической подложки из  $\text{SiO}_2$ , натекающей импактной струей, и подложки из  $\text{Al}_2\text{O}_3$  — водяной струей. Из рисунка видно, что при равных числах Рейнольдса эффективность охлаждения существенным образом определяется числом Прандтля. Кроме того, характерные времена охлаждения могут существенно различаться. Так, в рассмотренных примерах при одинаковых числах Фурье физическое время остывания отличается больше чем в 20 раз:  $t(\text{Fo} = 0,1) = 0,77 \text{ с}$  — для  $\text{Al}_2\text{O}_3$  и  $t(\text{Fo} = 0,1) = 16,7 \text{ с}$  — для  $\text{SiO}_2$ .

### Заключение

С использованием интегральных косинус-преобразования Фурье и преобразования Ганкеля получены аналитические выражения для нестационарного поля температуры внутри образцов, подвергающихся локальному нагреву. Эти решения позволяют проводить

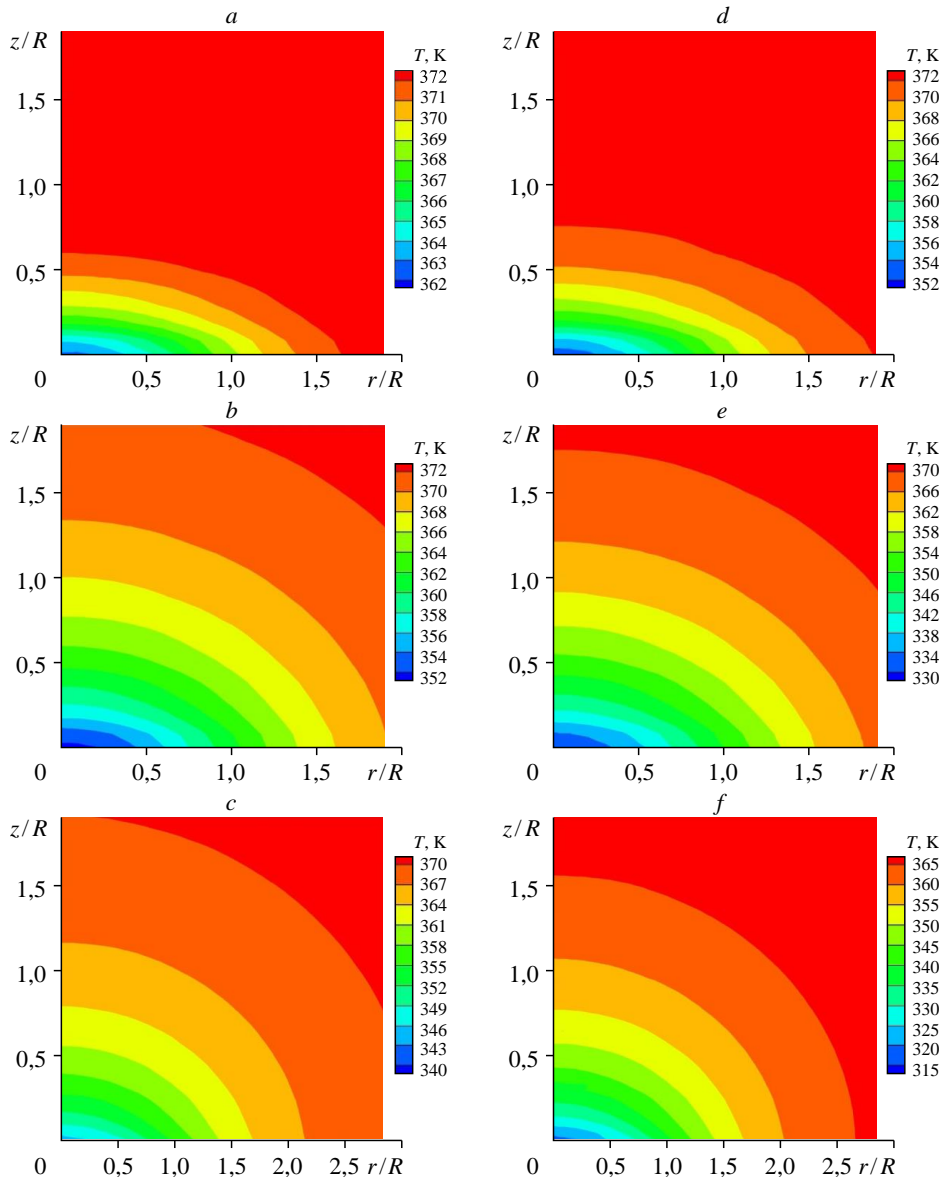


Рис. 3. Динамика температуры образцов из  $\text{SiO}_2$  и  $\text{Al}_2\text{O}_3$ , охлаждаемых импактной воздушной и водяной струями.

априорный анализ режимов нагрева в различных приложениях. Показано, что с использованием простых преобразований решение можно адаптировать как для нагрева подложек лазерным или плазменным пучком, так и для охлаждения их импактными струями.

Продемонстрированы примеры применения полученных выражений для определения времени достижения точек Чернова  $A_{c1}$  и  $A_{c3}$  при лазерном нагреве модельной гиповтектоидной стали, а также динамики охлаждения керамических подложек из  $\text{Al}_2\text{O}_3$  и  $\text{SiO}_2$  под воздействием импактных воздушной и водяной струй.



### Список литературы

1. **High-temperature** dust-laden jets in plasma technology // Eds. O.P. Solonenko, A.I. Fedorchenko. CRC Press, 1990. 584 p.
2. **Plasma** jets in the development of new materials technology // Eds. O.P. Solonenko, A.I. Fedorchenko. CRC Press, 1990. 716 p.
3. **Webb B.W., Ma C.-F.** Single-phase liquid jet impingement heat transfer // *Advances in Heat Transfer*. 1995. Vol. 26. P. 105–217.
4. **Liu X., Gabour L.A., Leinhard J.H., Stagnation-Point V.** Heat transfer during impingement of laminar liquid jets: analysis including surface tension // *J. Heat Transfer*. 1993. Vol. 115. P. 99–105.
5. **Lytle D., Webb B.W.** Air jet impingement heat transfer at low nozzle–plate spacings // *Intern. J. Heat Mass Transfer*. 1994. Vol. 37, No. 12. P. 1687–1697.
6. **Федорченко А.И., Марсик Ф., Терехов В.И., Терехов В.В.** Теплообмен в точке торможения свободно падающей импактной струи жидкости // *Теплофизика и аэромеханика*. 2022. Т. 29, № 4. С. 541–546.
7. **Antosova Z., Travnicek Z.** Stagnation point heat transfer to an axisymmetric impinging jet at transition to turbulence // *J. Heat Transfer*. 2023. Vol. 145, No. 2. P. 023902-1–023902-10.
8. **Guo Y., Wood D.H.** Measurements in the vicinity of stagnation point // *Exp. Therm. Fluid Sci.* 2002. Vol. 25, No. 8. P. 605–614.
9. **Golovin A.F.** The centennial of D. K. Chernov’s discovery of polymorphous transformations in steel (1868–1968) // *Metal Sci. Heat Treatment*. 1968. Vol. 10, No. 5. P. 335–340.
10. **Tauc J., Abraham A.** Thermal breakdown in silicon p-n junctions // *Phys. Rev.* 1957. Vol. 108, No. 4. P. 936–937.
11. **Scarlet R.M., Shockley W., Haitz R.H.** Thermal instabilities and hot spots in junction transistors // *Physics of Failure in Electronics* / Eds. M.F. Goldberg, J. Vaccaro. Baltimore: Spartan Books, 1963. P. 194–203.
12. **Fedorchenko A.I.** On the glass transition of the one-component metallic melts // *J. Crystal Growth*. 2017. Vol. 475. P. 362–367.
13. **Fedorchenko A.I., Wang A.B.** Non-equilibrium solidification of the molten metal droplets impacting on a solid surface // *Intern. J. Heat Mass Transfer*. 2007. Vol. 50, No. 13–14. P. 2463–2468.

*Статья поступила в редакцию 14 августа 2023 г.,  
после доработки — 15 ноября 2023 г.,  
принята к публикации 21 ноября 2023 г.*