

## АМПЛИТУДНО-ЗАВИСИМАЯ ДИССИПАЦИЯ В МИКРОНЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ С ЛИНЕЙНЫМ ПОГЛОЩЕНИЕМ И УПРУГОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

**В.Ю. Зайцев, Л.А. Матвеев\***

*Институт прикладной физики РАН, 603600, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46, Россия  
\* Нижегородский госуниверситет, 603950, Нижний Новгород, просп. Гагарина, 23, Россия*

Рассматривается механизм негистерезисного амплитудно-зависимого поглощения упругих волн в микронеоднородных средах, содержащих мягкие дефекты-включения, обладающие линейными диссипативными свойствами и упругой нелинейностью. Совместное действие этих факторов может приводить к выраженной преимущественно диссипативной нелинейности для упругих волн. Такой механизм должен эффективно проявляться в горных породах и других структурно-неоднородных материалах, где роль мягких включений играют трещины и межзеренные контакты. В отличие от однородных материалов, где амплитудно-зависимые вариации поглощения и упругого модуля оказываются, как правило, одного порядка, в микронеоднородном материале изменения поглощения могут многократно превышать сопутствующие вариации упругого модуля. При умеренных деформациях, типичных для акустических и сейсмических возмущений, вызывающих изменения упругого модуля среды на единицы процентов, декремент упругих волн может изменяться в несколько раз. Более того, с изменением частоты воздействия нелинейно-обусловленное изменение упругого модуля за счет такого механизма может менять знак, обращаясь на некоторой частоте в ноль при существенном изменении поглощения. Данный механизм действует параллельно с обычно обсуждаемыми для структурно-неоднородных сред механизмами гистерезисного типа (за счет микрофрикционных и адгезионных явлений) и может существенно влиять на наблюдаемое экспериментально соотношение между амплитудно-зависимым поглощением и изменениями упругого модуля. Обсуждается также ряд известных экспериментальных данных по нелинейно-диссипативным эффектам.

*Микронеоднородная среда, упругая нелинейность, линейное поглощение, амплитудно-зависимая диссипация.*

### STRAIN-AMPLITUDE DEPENDENT DISSIPATION IN LINEARLY DISSIPATIVE AND NONLINEAR ELASTIC MICROHETEROGENEOUS MEDIA

**V.Yu. Zaitsev and L.A. Matveev**

We discuss a mechanism of nonhysteretic strain-amplitude dependent dissipation of elastic waves in microheterogeneous media containing linearly dissipative and nonlinear elastic soft defects. The combined effect of these factors can cause well-pronounced essentially dissipative nonlinearity of elastic waves. The mechanism presumably works in rocks and other materials with microstructure where cracks and grain contacts act as soft inclusions. Unlike homogeneous materials where strain dependent variations of dissipation and elasticity are commonly of the same order, dissipation variations in microheterogeneous materials can be times as great as the respective elasticity variations. A slight (a few percent) change in Young's modulus can correspond to a many-fold dissipation change at moderate strain typical of acoustic and seismic applications. Moreover, in the case of variable frequency, this nonlinear mechanism can increase or decrease Young's modulus or reduce its variation to zero at certain frequencies, while dissipation variations remain quite large. The nonhysteretic mechanism may act concurrently with hysteretic mechanisms, which are due to friction and adhesion effects and are commonly invoked for materials with microstructure, and influence the relationship between strain dependent dissipation and elasticity observed in experiments on nonlinear dissipative effects.

*Microheterogeneous medium, elastic nonlinearity, linear dissipation, amplitude dependent dissipation*

### ВВЕДЕНИЕ

В последние годы наблюдается заметный рост интереса к исследованию нелинейных акустических и сейсмических эффектов, использование которых открывает многообещающие перспективы в диагностических применениях (неразрушающем контроле, инженерной сейсмике и т. д. [1—7]). Довольно часто при обсуждении нелинейности горных пород с точки зрения ее влияния на процессы распространения и взаимодействия упругих волн подразумевается, прежде всего, упругая (т. е. реактивная) нелинейность. Действительно, ее уровень для горных пород, как правило, многократно повышен по сравнению с идеальными кристаллами и аморфными однородными средами, хотя для линейных упругих модулей аналогичной сильной разницы не наблюдается. Эти различия обусловлены структурным механизмом [3, 8—11] возрастания нелинейности горных пород и других микронеоднородных сред, содержащих трещины, межзеренные контакты, скопления дислокаций и тому подобные дефекты, „мягкость“ которых

многократно выше, чем у окружающего однородного материала. Качественный смысл этого механизма следующий: высокая податливость мягких дефектов приводит к многократно повышенной деформации в их непосредственной окрестности, что обуславливает локально повышенные отклонения от линейного поведения материала и, соответственно, ведет к сильному росту нелинейности микронеоднородной среды в целом.

Следует отметить, что помимо упругой составляющей нелинейности такие среды (горные породы в том числе) демонстрируют также выраженную амплитудно-зависимую диссипацию упругих волн, подмеченную достаточно давно [11]. За прошедшие десятилетия был накоплен обширный экспериментальный материал, свидетельствующий, что в горных породах и других микронеоднородных средах, как правило, нелинейно-упругие эффекты сопровождаются выраженными амплитудно-зависимыми потерями [11—15], что нехарактерно для „классической“ упругой нелинейности твердых тел, обусловленной слабой ангармоничностью межатомного потенциала. Совокупность этих нелинейных реактивных и диссипативных свойств обычно объясняется гистерезисной (например, фрикционной или адгезионной происхождения) нелинейностью среды [11, 12, 16—19]. Экспериментально гистерезисные формы зависимостей упругое напряжение—деформация для горных пород наблюдаемы непосредственно в диапазоне деформаций выше  $10^{-5}$ — $10^{-4}$  [11, 17—20]. Для деформаций, меньших  $10^{-5}$  (типичных для амплитуд акустических и сейсмических волн), прямое наблюдение гистерезисных кривых пока технически недоступно, в связи с чем приходится судить о характере гистерезиса по наблюдаемым косвенным нелинейно-волновым проявлениям. Традиционно обсуждается в этом аспекте соотношение между гистерезисными (амплитудно-зависимыми) потерями за период колебания и обусловленным гистерезисной нелинейностью сопутствующим изменением упругого модуля  $\Delta E/E$  (обычно называемым „дефектом модуля“, поскольку у большинства гистерезисных материалов модуль уменьшается с ростом колебательной амплитуды [21]). Величину потерь можно характеризовать безразмерным логарифмическим декрементом  $\theta$ , для которого удобно использовать энергетическое определение  $\theta = \Delta W/(2W)$ , где  $\Delta W$  — потери энергии упругой волны за период колебания в единице объема среды, а  $W = E\varepsilon^2/2$  — максимальная величина запасенной упругой энергии также на единицу объема. Уже довольно давно было подмечено, что отношение между амплитудно-зависимым декрементом  $\theta_H$  за счет гистерезисных потерь и обусловленным гистерезисом дефектом модуля  $(\Delta E/E)_H$  часто практически не зависит от амплитуды (по-видимому, впервые данное утверждение было четко сформулировано в работе Т.А. Рида [22]). В связи с этим для коэффициента пропорциональности  $r$  между этими величинами,  $\theta_H = r (\Delta E/E)_H$ , иногда используют название „параметр Рида“. Экспериментальное измерение значения этого параметра предлагается использовать для идентификации типов гистерезисных зависимостей напряжение—деформация в исследуемых материалах [21]. Действительно, при часто используемой кусочно-степенной аппроксимации формы ветвей гистерезиса экспериментально показатель степени можно определить по наблюдаемым зависимостям гармоник или по зависимости декремента и дефекта модуля от амплитуды деформации. Полученное значение степени, однако, еще не характеризует однозначно форму петель, и для дальнейшего уточнения этой формы предлагается воспользоваться определением параметра  $r$  [21]. Этот параметр дает дополнительную информацию о форме гистерезиса (фактически о соотношении между площадью петли гистерезиса и наклоном и искривленностью ветвей этой петли, которые не задаются однозначно показателем  $n$  аппроксимирующей степенной функции). При одинаковых показателях степени для различных используемых моделей гистерезиса величина параметра  $r$  оказывается различной. Так, в работе [21] рассмотрено различие параметра Рида для нескольких характерных примеров: гистерезиса типа Гранато-Люкке, гистерезиса Давиденкова и так называемого гистерезиса без возвращающей силы (БВС). Например, для кусочно-квадратичного ( $n = 2$ ) случая, которому соответствуют линейные (т. е. с показателем  $n - 1 = 1$ ) амплитудные зависимости  $\theta_H$  и  $(\Delta E/E)_H$ , параметр Рида  $r \approx 1,25$  для гистерезиса Давиденкова и  $r \approx 2,7$  для гистерезиса БВС [21]. Поскольку значения параметра  $r$ , найденные для различных моделей, не отличаются радикально, для получения значимой информации о гистерезисном уравнении состояния материала необходимо определять этот параметр достаточно точно и, кроме того, иметь уверенность, что соотношение наблюдаемых амплитудно-зависимых эффектов обусловлено именно гистерезисом, а не каким-либо иным механизмом.

На первый взгляд представляется, что наличие в материале негистерезисных, линейных по физической природе (например, термоупругих или вязких) потерь не должно приводить к каким-либо трудностям в описанной выше процедуре идентификации гистерезиса. При этом предполагается, что из полной величины измеренного декремента достаточно вычесть амплитудно-независимую часть, чтобы приписать оставшийся амплитудно-зависимый вклад проявлениям гистерезиса. Однако в микронеоднородных средах, к классу которых относятся практически все горные породы, ситуация оказывается сложнее. Действительно, с одной стороны, в таких средах гистерезисные свойства обусловлены микрофрикционными

или адгезионными эффектами, локализованными на высокосжимаемых (податливых) дефектах-включениях (типа трещин и микроконтактов между гранулами зернистого материала). С другой стороны, на тех же самых мягких дефектах, благодаря локально повышенной деформации, помимо возможных гистерезисных явлений имеют место сильно повышенные потери, обусловленные обычными линейными механизмами. Это могут быть, например, термоупругие потери на контактах между поверхностями трещин [23, 24], причем величина этих потерь существенно зависит от геометрии дефектов (степени раскрытия трещин, поджатия микроконтактов и т. д.). В свою очередь, в силу высокой податливости этих дефектов их геометрические параметры (ширина контактов, раскрытие трещин и т. п.) оказываются высокочувствительными к очень умеренным средним напряжениям в материале. Поскольку эти же самые параметры определяют и величину линейных (например, термоупругих) потерь на дефектах, то и эти (линейные по своей природе) потери в микронеоднородной среде становятся амплитудно-зависимыми. Такой механизм появления амплитудно-зависимой (нелинейной) диссипации в микронеоднородных средах за счет комбинированного действия упругой нелинейности и линейных потерь на дефектах был предложен в работе [25]. В ней без детального обсуждения различного характера нелинейных свойств дефектов основное внимание было уделено возможным отличиям таких потерь для продольных и сдвиговых деформаций. Наиболее существенной в контексте настоящего обсуждения является полученная в [25] оценка, показывающая, что относительные амплитудно-зависимые изменения величины декремента могут многократно превышать сопутствующие им относительные изменения величины упругих модулей среды.

В данной работе, ограничиваясь одномерным приближением, для предложенного в [25] негистерезисного механизма амплитудно-зависимых потерь детально рассматриваются амплитудные и частотные зависимости одновременных вариаций декремента и упругого модуля. Вначале (с использованием стандартной реологической модели вязкоупругого материала) проведено обсуждение, почему в однородной вязкоупругой среде, обладающей упругой нелинейностью, данный механизм, формально оставаясь работоспособным, не может приводить к значительным отличиям в изменении поглощения по сравнению с вариациями упругих характеристик. Далее, на примере модифицированной модели [26, 27], учитывающей микронеоднородность среды, проведено исследование частотного поведения амплитудно-зависимых вариаций поглощения и упругого модуля для нескольких характерных типов упругой нелинейности дефектов. В заключение проведено сопоставление предсказываемых изменений упругих и диссипативных свойств среды за счет параллельно действующих гистерезисного и обсуждаемого негистерезисного механизмов. В результате такого сравнения показано, что влияние негистерезисного вклада может в несколько раз изменять наблюдаемую величину отношения между дефектом модуля и амплитудно-зависимыми потерями. Этот результат существенно меняет вывод о непосредственной возможности использования такого отношения (параметра Рида) для идентификации типа гистерезиса в исследуемом материале.

### РЕОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СТАНДАРТНОГО ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЛА И ОДНОМЕРНОЙ МИКРОНЕОДНОРОДНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ

Использование эквивалентных реологических моделей (представляющих собой комбинации параллельно либо последовательно соединенных упругих и диссипативных элементов) является традиционным подходом к описанию вязкоупругих характеристик твердых тел [28]. Такие модели позволили исследовать без излишней детализации важные особенности дисперсионных свойств упругих и диссипативных параметров вязкоупругих материалов. В „классической“ форме эти модели обычно рассматриваются как сосредоточенные, что фактически предполагает однородность материала. При необходимости проанализировать распределенную задачу (ограничиваясь одномерным приближением) для однородной среды достаточно рассмотреть цепочку из одинаковых вязкоупругих элементов.

Покажем это на следующем простом примере. Рассмотрим модель среды в виде цепочки одинаковых масс  $m$ , соединенных упруговязкими элементами Кельвина—Фойгта, представленную на рис. 1 (в данном контексте нам не принципиально возможное усложнение структуры отдельного звена, например, с использованием модели стандартного вязкоупругого тела, включающей дополнительный упругий элемент последовательно с вязким). Полагаем, что площадь сечения звеньев единичная, упругий элемент характеризуем упругим модулем  $E$ , а вязкий элемент — коэффициентом эффективной вязкости  $g$ . Если рассматривать фрагмент такой цепочки, много меньший характерной длины упругой волны, то как для всего фрагмента, так и для каждого отдельного элемента закон Гука имеет вид

$$\sigma = E\varepsilon + g d\varepsilon/dt. \quad (1)$$

Для возмущения гармонического вида  $\varepsilon = \varepsilon_a \exp(i\omega t)$  из (1) получаем выражения для реальной и мнимой частей модуля упругости  $E_{eff} = \sigma/\varepsilon_a$ :

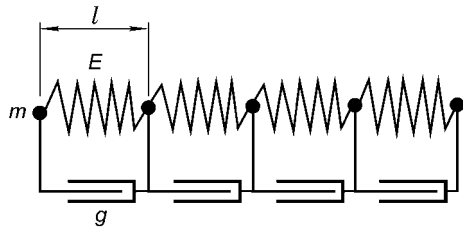


Рис. 1. Модель среды в виде одинаковых упруговязких элементов Кельвина—Фойгта.

$$\operatorname{Re} E_{eff} = E, \quad \operatorname{Im} E_{eff} = g\omega. \quad (2)$$

Тогда декремент выражается через отношение мнимой и реальной частей упругого модуля [29]:

$$\theta = \pi \operatorname{Im} E_{eff} / \operatorname{Re} E_{eff} = \pi \omega g / E \sim E^{-1}. \quad (3)$$

Из выражения (3) следует, что если по каким-то причинам (например, из-за зависимости от приложенного к материалу статического напряжения  $\epsilon_0$ ) модуль  $E(\epsilon_0)$  изменяется на небольшую величину,  $\Delta E/E \ll 1$ , то таким же по порядку оказывается обусловленное этим относительное изменение декремента:  $\Delta\theta/\theta \approx -\Delta E/E$ . Совершенно аналогичный вывод получается, если рассматривать не один элемент, а записать для распределенной модели, состоящей из одинаковых элементов, как показано на рис. 1, волновое уравнение (в длинноволновом приближении, когда длина упругой волны  $\lambda \gg l$ )

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} = \alpha U_{xxx} \quad (4)$$

где  $c = (El/m)^{1/2} = (E/\rho)^{1/2}$  — скорость упругой волны,  $\rho = m/l$  — плотность среды,  $\alpha = g\rho$ . Переходя к „бегущей“ переменной  $\tau = t - x/c$  и „медленной“ переменной  $x$ , получаем укороченное уравнение, соответствующее (4):

$$U_x = \frac{\alpha}{2c^3} U_{\tau\tau}. \quad (5)$$

Подставляя в это уравнение решение вида  $U = V \exp(i\omega t)$ , получаем

$$V_x = -\beta V, \quad \text{т. е. } V = V_0 \exp(-\beta x), \quad (6)$$

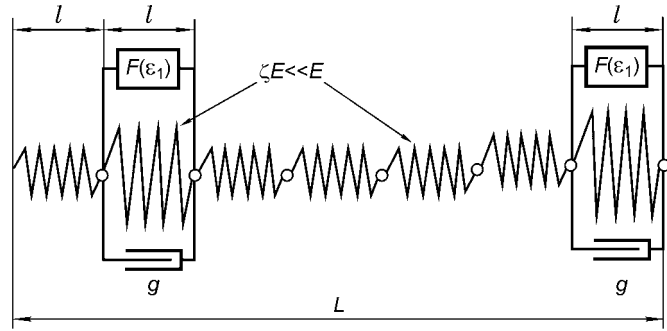
где коэффициент поглощения имеет вид  $\beta = \alpha\omega^2/(2c^3)$ , откуда выражение для декремента  $\theta = \lambda\beta$  вновь принимает форму (3):

$$\theta = \lambda\beta = \pi\omega g/E \sim E^{-1}. \quad (7)$$

Итак, из совпадающих уравнений (3), (7) видно, что при неизменной величине вязких свойств элементов относительные изменения упругого модуля и относительные изменения декремента одинаковы по величине. Такой вывод, следующий из модели (см. рис. 1), не согласуется с отмеченным выше экспериментальным фактом, что для широкого класса реальных материалов относительные изменения декремента обычно существенно выше, чем для упругого модуля. Поэтому для улучшения согласования с экспериментом обсуждаются, например, варианты модифицированной реологической модели Кельвина—Фойгта (или стандартного упругого тела) [30] с добавленным последовательно еще одним диссипативным элементом, вязкость которого существенно зависит от приложенного ко всему элементу напряжения (хотя связь такой модификации с особенностями структуры реальных материалов остается открытой).

Можно, однако, предложить альтернативный вариант модели, не привлекающей таких предположений и непосредственно основанной на учете особенностей структурных характеристик, типичных для горных пород и других микронеоднородных материалов. Такая модель [8—10, 25—27] на реологическом уровне формализует отмеченный во введении структурный „контрастно-мягкий“ механизм возрастания упругой (реактивной) нелинейности среды, содержащей мягкие дефекты, а при учете их вязких (даже чисто линейных) свойств предсказывает также существование выраженной амплитудно-зависимой диссипации в таком структурно-неоднородном материале [25]. Принципиальная особенность модели (по сравнению с традиционными моделями, типа показанной на рис. 1) заключается во введении в структуру моделирующей среду цепочки (если говорить об одномерном варианте) небольшого количества элементов („дефектов“), сжимаемость которых многократно превышает сжимаемость остальных более жестких элементов, соответствующих однородной среде-матрице. Именно высокий контраст по линейным упругим свойствам приводит к тому, что такие мягкие включения испытывают деформации, многократно превышающие среднюю деформацию среды, а потому из-за локально повышенной деформации именно на мягких включениях локализованы и наибольшие отклонения от линейного закона Гука, что приводит к возрастанию макроскопической нелинейности среды, как рассмотрено в работах [8—10] в низкочастотном (квазистатическом) пределе.

**Рис. 2. Распределенная реологическая модель микронеоднородной среды с контрастно-мягкими вязкоупругими нелинейными включениями.**



Выходя за рамки квазистатики, следует учесть, что в силу локально повышенной деформации тех же мягких дефектов происходит и повышенная диссипация упругой энергии, так что макроскопические диссипативные свойства материала также определяются в основном именно вкладом таких мягких дефектов.

При этом упругие элементы, соответствующие областям однородной среды-матрицы, можно считать линейно-упругими. Таким образом, модифицированная распределенная модель микронеоднородной среды может быть представлена в виде неоднородной цепочки [26, 27], содержащей мягкие элементы, на которых локализована и нелинейность, и диссипация (физическим примером таких дефектов являются, например, трещины, где роль эффективной вязкости могут играть локально повышенные термоупругие потери [23]). Данная модель представлена на рис. 2.

В модифицированной модели упругие элементы, соответствующие среде-матрице, подчиняются обычному линейному закону Гука с модулем  $E$ ,

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (8)$$

а мягкие дефекты характеризуются модулем  $E_1 = \zeta E$  (где параметр мягкости  $\zeta \ll 1$ ) и коэффициентом  $g$  их эффективной вязкости, а также нелинейной функцией  $F(\dots)$ , описывающей упругую нелинейность дефектов. Таким образом, имеем следующее уравнение состояния такого мягкого включения:

$$\sigma = \zeta E [\varepsilon_1 + F(\varepsilon_1)] + g d\varepsilon_1/dt. \quad (9)$$

Следует подчеркнуть, что в (9) под деформацией  $\varepsilon_1$  понимается не средняя деформация материала, а деформация мягкого дефекта в его собственном масштабе. Количество дефектов характеризуется их безразмерной линейной концентрацией  $\nu$  (ей в трехмерном случае соответствует относительное объемное содержание мягких включений). Предполагая, что характерная длина упругой волны  $\Lambda \gg L \gg l$ , при малой концентрации дефектов  $\nu \ll 1$  (когда вносимая ими нелинейная поправка мала) макроскопическое уравнение состояния среды принимает следующий вид [26, 27]:

$$\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon - \nu E\Omega \int_{-\infty}^t \varepsilon(\tau) e^{-\Omega\zeta(t-\tau)} + \nu E\Omega\zeta \int_{-\infty}^t e^{-\Omega\zeta(t-\tau)} F \left\{ \Omega \int_{-\infty}^{\tau} \varepsilon(\tau') e^{-\Omega\zeta(t-\tau')} d\tau' \right\} d\tau, \quad (10)$$

где  $\Omega = E/(gl)$  имеет размерность частоты, так что  $\Omega\zeta$  соответствует характерной релаксационной частоте дефекта. В правой части выражения (10) первое слагаемое определяется однородной средой-матрицей, подчиняющейся закону Гука, второе — описывает вносимую мягкими вязкоупругими дефектами линейную релаксационную поправку, третье — соответствует нелинейной поправке, определяемой совместным действием упругой нелинейности и линейной релаксации мягких включений. Отсюда видно, что справедливое для однородных сред представление о возможности аддитивного учета релаксационных и нелинейных поправок к уравнению состояния становится несправедливым для микронеоднородных сред. Физически это обусловлено тем, что и линейные релаксационные, и нелинейно-упругие свойства в такой среде локализованы в основном на одних и тех же мягких дефектах. В связи с этим релаксационное „замораживание“ реакции дефектов с возрастанием частоты воздействия в микронеоднородной среде затрагивает одновременно ее линейные и нелинейные свойства и проявляется не только в частотной зависимости упругих модулей и линейного поглощения, но и приводит к выраженной частотной зависимости нелинейности [26, 27]. Кроме того, как будет показано ниже для нескольких характерных видов нелинейной функции  $F(\dots)$ , неоднородность структуры среды, наряду с ростом уровня упругой нелинейности, приводит также к появлению ярко выраженной амплитудной зависимости диссипации за счет комбинированного влияния линейных потерь на дефектах и их упругой нелинейности. При этом, в отличие от рассмотренного выше случая однородной среды (где имеет место примерное равенство  $\Delta\theta/\theta \approx -\Delta E/E$ ), относительные изменения поглощения в микронеоднородном материале могут многократно превосходить сопутствующие относительные вариации упругого модуля.

## АМПЛИТУДНО-ЗАВИСИМЫЕ ПОТЕРИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ УПРУГОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ ДЕФЕКТОВ

**Квадратично-нелинейные дефекты.** Рассмотрим квадратичную упругую нелинейность дефектов  $F(\varepsilon_1) = \gamma \varepsilon_1^2$ . Сразу подчеркнем, что коэффициент  $\gamma$ , характеризующий нелинейность мягких дефектов в их собственном масштабе деформации, имеет вполне обычную величину порядка нескольких единиц, и только за счет локально повышенной деформации дефектов, находящихся в относительно жесткой среде-матрице, макроскопический параметр нелинейности микро неоднородной среды сильно возрастает [8—10, 26, 27]. Для реальных сред, как правило,  $\gamma < 0$ , что соответствует умягчению материала при растяжении ( $\varepsilon > 0$ ) и, наоборот, увеличению жесткости при сжатии ( $\varepsilon < 0$ ). Будем считать далее, что в среде созданы статическая деформация  $\varepsilon_0$  и осциллирующая (акустическая) деформация  $\tilde{\varepsilon}_a = (\varepsilon_a e^{i\omega t} + \varepsilon_a^* e^{-i\omega t})/2$ , причем выполнено условие  $\varepsilon_0 \gg \varepsilon_a$ . Подставляя в уравнение (10) выражение вида

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon}_a \quad (11)$$

и собирая в упругом напряжении осциллирующие слагаемые при  $\exp(i\omega t)$ , получаем

$$\sigma_a(\varepsilon_a) = E\varepsilon_a - \frac{\nu E}{\zeta} \varepsilon_a \frac{1}{1+\bar{\omega}^2} - \frac{\nu E}{\zeta} \varepsilon_a F' \left( \frac{\varepsilon_0}{\zeta} \right) \frac{1-\bar{\omega}^2}{(1+\bar{\omega}^2)^2} + i \frac{\nu E}{\zeta} \varepsilon_a \frac{\bar{\omega}}{1+\bar{\omega}^2} + i \frac{\nu E}{\zeta} \varepsilon_a F' \left( \frac{\varepsilon_0}{\zeta} \right) \frac{2\bar{\omega}}{(1+\bar{\omega}^2)^2}, \quad (12)$$

где  $\bar{\omega} = \omega/(\Omega\zeta)$  — нормированная частота. Выделяя в (11) (аналогично преобразованиям уравнений (1)—(3)) комплексный модуль упругости и разделяя его действительную и мнимую части, с учетом того, что  $F(\varepsilon) = -|\gamma|\varepsilon^2$ , получаем выражения для эффективного модуля упругости среды и декремента затухания:

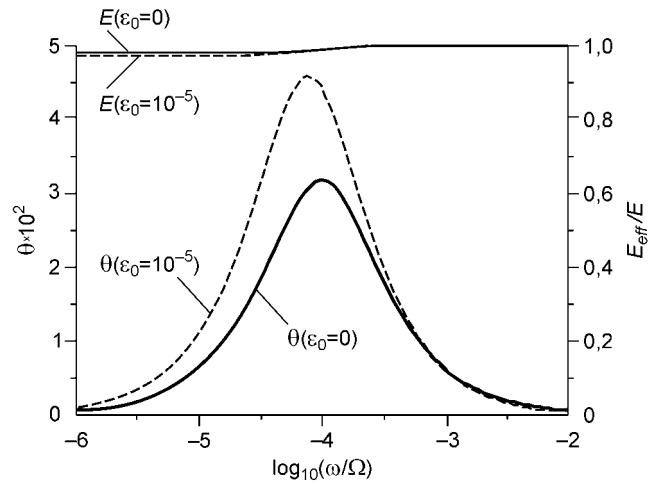
$$E_{eff}/E \approx 1 - \frac{\nu}{\zeta} \frac{1}{1+\bar{\omega}^2} - 2 \frac{|\gamma|\varepsilon_0 \nu}{\zeta^2} \frac{1-\bar{\omega}^2}{(1+\bar{\omega}^2)^2}, \quad (13)$$

$$\theta = \theta_{lin} + \theta_{nl} \approx \pi \frac{\nu}{\zeta} \frac{\bar{\omega}}{1+\bar{\omega}^2} + 2\pi \frac{\nu\gamma\varepsilon_0}{\zeta^2} \frac{2\bar{\omega}}{(1+\bar{\omega}^2)^2}. \quad (14)$$

Второй член в уравнении (13) соответствует вносимой дефектами линейной относительной поправке к упругому модулю  $E$  среды-матрицы, а третий член описывает нелинейную (т. е. зависящую от  $\varepsilon_0$ ) относительную поправку к модулю  $E$ . В отличие от упругого модуля, который определяется в основном однородной средой-матрицей, ее вклад в потери пренебрежимо мал по сравнению с потерями на дефектах. В связи с этим в выражении (14) для декремента и линейный, и нелинейный (т. е. зависящий от  $\varepsilon_0$ ) вклады обусловлены дефектами и соответствуют абсолютным значениям потерь. При этом в (14) отношение нелинейного слагаемого к линейному  $\theta_{nl}/\theta_{lin}$  по порядку величины равно  $\gamma\varepsilon_0/\zeta$ . Отсюда видно, что для достаточно мягких ( $\zeta \ll 1$ ) дефектов нелинейный (т. е. зависящий от  $\varepsilon_0$ ) вклад может оказаться одного порядка с линейным даже при умеренных деформациях среды. Обсудим подробнее частотное поведение соотношения между амплитудно-зависимыми вариациями упругого модуля и декремента. Примем для параметра мягкости дефектов значение  $\zeta = 10^{-4}$  (соответствующее достаточно типичному [31] для тонких трещин отношению их величины раскрытия к диаметру). Также выберем заведомо умеренную величину параметра  $\gamma = 2$ , характеризующую нелинейность трещины в ее собственном масштабе деформации. Для концентрации дефектов примем значение  $\nu = 2 \cdot 10^{-6}$ , которое для линейных потерь (в окрестности релаксационного максимума слагаемого  $\theta_{lin}$ ) соответствует величине добротности  $Q \equiv \pi/\theta \approx 100$ , типичной для сейсмических волн. При этом в последнем члене уравнения (13) „макроскопический“ коэффициент нелинейности  $2\gamma\nu/\zeta^2 = 800$ , что также вполне типично для горных пород [1—3, 12, 13]. На рис. 3 приведены рассчитанные при этих параметрах частотные зависимости (13), (14) для макроскопического модуля упругости  $E_{eff}$  и декремента  $\theta$  при значениях статической деформации  $\varepsilon_0 = 0$  и умеренной деформации  $\varepsilon_0 = 10^{-5}$  (положительный знак соответствует растяжению).

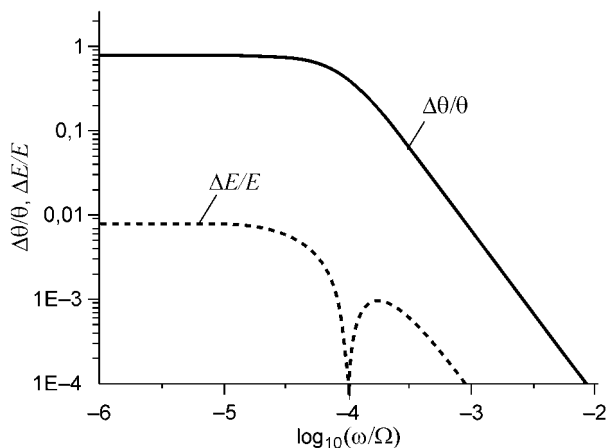
Из этих графиков видно, что максимум линейного вклада в декремент от релаксирующих дефектов достигается, как и следовало ожидать, вблизи их частоты релаксации  $\omega = \Omega\zeta$ . В окрестности этого максимума видно сильное (более 1,5 раз) возрастание декремента, вызванное приложением статической деформации, а сопутствующее относительное изменение эффективного модуля упругости составляет менее процента. Это различие более наглядно видно на рис. 4, где приведены относительные амплитудно-зависимые вариации декремента  $\Delta\theta/\theta$  и модуля упругости  $\Delta E/E$ . Эти графики показывают, что в среднем

**Рис. 3.** Зависимости эффективного модуля упругости (13) и декремента от частоты (14) при статической деформации  $\epsilon_0 = 0$  и при умеренном растяжении  $\epsilon_0 = 10^{-5}$  среды, содержащей одинаковые квадратично-нелинейные дефекты с показателем мягкости  $\zeta = 10^{-4}$ .



относительные вариации поглощения на два порядка превышают вариации упругого модуля. Более того, в окрестности релаксационной частоты дефектов ( $\omega = \Omega\zeta$ ) амплитудно-зависимая поправка к упругому модулю обращается в ноль, меняя знак (чему в логарифмических координатах соответствует провал в зависимости  $\Delta E/E$ , см. рис. 4). В этой области относительные изменения декремента могут сколь угодно сильно превышать величину относительных вариаций упругого модуля. Физически смена знака  $\Delta E$  ( $\epsilon_0$ ) обусловлена задержкой фазы в реакции релаксирующих дефектов на колебательное воздействие. Отметим, что при однократной (в линейном случае) релаксации вносимый ею максимальный фазовый сдвиг не превышает  $\pi/2$ . Однако, как видно из структуры уравнения (10), для нелинейной поправки к упругому напряжению фазовый сдвиг может быть и больше, так как релаксация „срабатывает“ неоднократно. Действительно, она проявляет себя, во-первых, как и в линейном случае (чему соответствует релаксатор в аргументе нелинейной функции  $F(\dots)$ ). Во-вторых, еще раз релаксируют порожденные нелинейностью дефекта спектральные компоненты (чему соответствует релаксатор снаружи нелинейной функции  $F(\dots)$  в (10)), причем в рассматриваемом случае мы выделяли только компоненту на основной частоте колебания. В результате дополнительного поворота фазы за счет такой каскадной релаксации добавка к упругому модулю, обусловленная нелинейностью дефектов, может менять знак (фаза сдвигается более чем на  $\pi/2$ ). В результате вместо умягчения (наблюдаемого на частотах ниже релаксационной) для колебания с частотой выше релаксационной может наблюдаться эффективное возрастание жесткости. Таким образом, в окрестности релаксационной частоты должен иметь место несколько парадоксальный эффект появления очень заметного амплитудно-зависимого поглощения при практически полном отсутствии одновременных изменений упругого модуля. Этот эффект выглядит как проявление чисто диссипативной нелинейности, хотя физически он возникает за счет комбинации чисто реактивной (упругой) нелинейности дефектов и обычных линейных потерь релаксационного типа.

Выше был использован простейший вариант модели среды, в которой параметры дефектов предполагались строго одинаковыми (с одинаковой частотой релаксации), что нехарактерно для реальных горных пород и других микронеоднородных сред. В связи с этим интересно рассмотреть, сохраняются ли основные полученные выводы при широком распределении дефектов по их релаксационным частотам. Такое распределение должно ближе соответствовать многочисленным экспериментам, свидетельствующим об очень слабой частотной зависимости декремента в широком частотном диапазоне, что более типично для горных пород и сходных с ними по структуре сред. Как было показано в работах [32, 33] в



рамках обсуждаемой модели микронеоднородной среды, в линейном приближении приблизительно частотно-независимый декремент соответствует широкому и однородному распределению дефектов по их параметру мягкости, когда  $\nu(\zeta) \approx \nu_0 = \text{const}$  при  $a \leq \zeta \leq b$  (где  $a \ll b$ ) и  $\nu(\zeta) = 0$  вне этого диапазона.

Проводя, аналогично линейному анализу [32, 33], суммирование вкладов от различных дефектов

**Рис. 4.** Относительные одновременные амплитудно-зависимые изменения декремента  $\Delta\theta/\theta$  и модуля упругости  $\Delta E/E$  от частоты при тех же параметрах дефектов, что и на рис. 3.

по широкому распределению  $v(\zeta)$  в нелинейном уравнении состояния (10), получаем выражения для эффективного упругого модуля и декремента, аналогичные выражениям (13) и (14), получавшиеся в случае одинаковых квадратично-нелинейных дефектов:

$$E_{eff} \approx 1 - \frac{1}{2} v_0 \ln \frac{\Omega^2 b^2 + \omega^2}{\Omega^2 a^2 + \omega^2} + 2v_0 \gamma \varepsilon_0 \Omega^2 \left\{ \frac{b}{\Omega^2 b^2 + \omega^2} - \frac{a}{\Omega^2 a^2 + \omega^2} \right\}, \quad (15)$$

$$\theta = \theta_{lin} + \theta_{nl} \approx \pi v_0 \left\{ \operatorname{arctg} \frac{\Omega b}{\omega} - \operatorname{arctg} \frac{\Omega a}{\omega} \right\} - 2\pi v_0 \gamma \varepsilon_0 \Omega \left\{ \frac{\omega}{\Omega^2 b^2 + \omega^2} - \frac{\omega}{\Omega^2 a^2 + \omega^2} \right\}. \quad (16)$$

В этих выражениях линейные (не зависящие от  $\varepsilon_0$ ) слагаемые совпадают с результатами работ из [32, 33]. На рис. 5 (аналогичному рис. 3) для квадратично-нелинейных дефектов (с параметром нелинейности  $\gamma = 2$ ) приведены графики зависимости декремента и упругого модуля от нормированной частоты  $\omega/\Omega$  и значений статической деформации  $\varepsilon_0 = 0$  и  $\varepsilon_0 = 10^{-5}$  при равномерно распределенной мягкости дефектов  $10^{-5} \leq \zeta \leq 10^{-2}$ . Такой диапазон представляется достаточно разумным для аппроксимации распределения реальных трещин по параметру мягкости [34]. Для концентрации дефектов взята величина  $v_0 = 6 \cdot 10^{-3}$ , которая соответствует линейной (при  $\varepsilon_0 = 0$ ) добротности среды  $Q \sim 100$  (т. е.  $\theta = \pi/Q \sim 0,03$ ) в частотной области, где декремент приблизительно постоянен.

Из графика видно, что аналогично случаю одинаковых дефектов (см. рис. 3) по-прежнему в широком диапазоне частот относительное изменение декремента многократно превышает относительное изменение упругого модуля. Для большей наглядности относительные изменения декремента  $\Delta\theta(\varepsilon_0)/\theta$  и модуля упругости  $\Delta E/E$  приведены на рис. 6, где смена знака  $\Delta E/E$  за счет релаксационного сдвига фазы так же, как и на рис. 4, приводит к появлению провала, в окрестности которого относительное изменение декремента может быть произвольно велико по сравнению с относительным изменением модуля.

Остановимся еще раз на реактивном (упругом) проявлении отмеченного выше эффекта релаксационного сдвига фазы. Обе рассмотренные модели (как с одинаковыми дефектами, так и более реалистичная модель среды с распределенными по мягкости дефектами) предсказывают, что на частотах пробного возмущения выше частоты смены знака поправки  $\Delta E(\varepsilon_0)$  при растягивающей статической деформации вместо умягчения среды должен наблюдаться необычный эффект увеличения упругого модуля для пробной волны. Наоборот, при статическом сжатии среды модуль для пробной волны должен уменьшаться. Экспериментальные примеры нелинейных вариаций динамического модуля разных знаков известны для динамического нагружения среды. В частности, при самовоздействии достаточно интенсивной волны в различных экспериментах наблюдалось как уменьшение, так и возрастание модуля упругости с амплитудой воздействия (см., например, [24]). В отличие от динамического нагружения, при

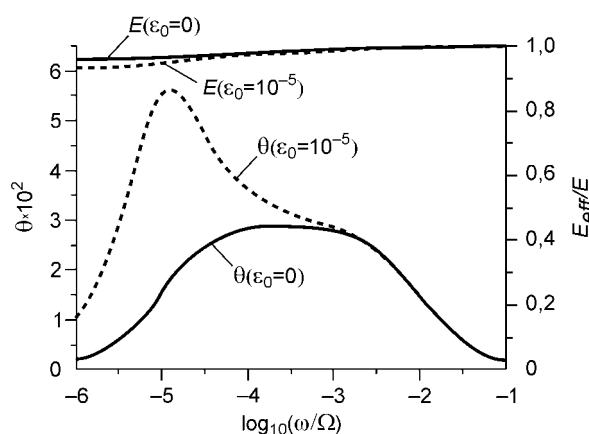


Рис. 5. Зависимости декремента (15) и упругого модуля (16) от частоты для случая квадратично-нелинейных дефектов при статической деформации  $\varepsilon_0 = 0$  и  $\varepsilon_0 = 10^{-5}$  при широком распределении дефектов по параметру мягкости.

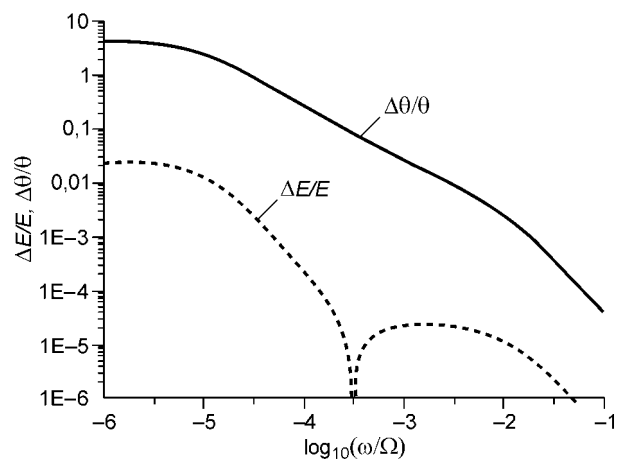


Рис. 6. Относительные одновременные амплитудно-зависимые изменения декремента  $\Delta\theta/\theta$  и модуля упругости  $\Delta E/E$  от частоты при тех же параметрах дефектов, что и на рис. 5.



сжимающем квазистатическом воздействии на среду обычно отмечается возрастание упругого модуля пробной волны, и наблюдения в таких условиях его эффективного уменьшения авторам не известны.

Что касается сделанного вывода о значительном превышении амплитудно-зависимых вариаций поглощения по сравнению с сопутствующими вариациями упругого модуля, то такое заключение хорошо согласуется с подавляющим большинством экспериментальных наблюдений амплитудно-зависимых эффектов такого рода (можно отметить, например, хорошо известные лабораторные результаты, обсуждаемые в работах [11] и [34]). Для натуральных условий результаты недавних наблюдений [35] модуляции тональной сейсмической волны приливными деформациями земной коры также неплохо согласуются с выражениями (13)—(16). А именно, как и предсказывает модель, в эксперименте [35] амплитудно-фазовые вариации зондирующей волны соответствовали одинаковым по порядку значениям абсолютного изменения декремента и относительного изменении упругого модуля соответственно,  $\Delta\theta \sim (3 - 4) \cdot 10^{-3}$  и  $\Delta E/E \sim (7 - 9) \cdot 10^{-3}$ . Относительные вариации декремента при этом многократно превышали относительные изменения упругого модуля.

Качественно-аналогичное сильное превышение относительных вариаций поглощения над вариациями скорости пробной сейсмической волны под действием поля деформаций мощного низкочастотного сейсмодвибратора отмечалось и в работе [15]. Однако в ней подчеркивалось также, что средний результат действия поля сейсмодвибратора нельзя интерпретировать как простое усреднение квазистатических мгновенных наблюдаемых вариаций пробной волны, т. е. эффект являлся существенно динамическим. В следующих разделах будет рассмотрена возможность получения ненулевого среднего результата в процессе периодического симметричного воздействия на среду при наличии нечетной компоненты нелинейности дефектов.

**Кубично-нелинейные дефекты.** В рассмотренном выше случае квадратичная (четная) нелинейность дефектов приводила для пробного возмущения к появлению нелинейных вариаций, пропорциональных деформации  $\varepsilon_0$  дополнительного воздействия на среду. Такая четная нелинейность при синусоидально меняющемся воздействии  $\varepsilon_0$  (которое можно называть „накачкой“, следуя терминологии, принятой в нелинейной оптике) не приводит к появлению усредненного по периоду изменения. В данном разделе рассмотрен простейший пример нечетно-нелинейных дефектов с кубичной нелинейностью, которые должны приводить к усредненному эффекту и при динамическом, осциллирующем воздействии на среду. Кубично-нелинейные дефекты характеризуем по аналогии с квадратичными безразмерным коэффициентом нелинейности  $\beta$ :

$$F(\varepsilon) = \beta \varepsilon^3. \quad (17)$$

Отметим, что обычно осциллирующее воздействие приводит к усредненному умягчению среды, чему соответствует  $\beta < 0$ . Предположим далее, что в среде возбуждено пробное возмущение  $\varepsilon_{pr}$  на частоте  $\omega$  с амплитудой деформации  $a$  и осциллирующее воздействие (накачка)  $\varepsilon_{pm}$  на частоте  $w$  с амплитудой деформации  $|A| \gg |a|$ :

$$\varepsilon = \varepsilon_{pr} + \varepsilon_{pm} = \frac{1}{2} (ae^{i\omega t} + ae^{-i\omega t}) + \frac{1}{2} (Ae^{i\omega t} + Ae^{-i\omega t}). \quad (18)$$

После подстановки в уравнение (10) (соответствующее случаю одинаковых дефектов) и выделения компоненты  $\sim \exp(i\omega t)$ , получаем следующие выражения, описывающие эффективный упругий модуль и декремент для пробного возмущения (в пренебрежении его самовоздействием в силу условия  $|A| \gg |a|$ ):

$$E_{eff}/E \approx 1 - \frac{\nu}{\zeta(1 + \bar{\omega}^2)} - \frac{3}{2} \nu \beta |A|^2 \frac{1 - \bar{\omega}^2}{\zeta^3 (1 + \bar{\omega}^2) (1 + \bar{\omega}^2)^2}, \quad (19)$$

$$\theta \approx \pi \frac{\nu \bar{\omega}}{\zeta(1 + \bar{\omega}^2)} + 3\pi |A|^2 \frac{\nu \beta}{\zeta^3 (1 + \bar{\omega}^2) (1 + \bar{\omega}^2)^2}, \quad (20)$$

где  $\bar{\omega} = \omega/(\Omega\zeta)$ ,  $\bar{w} = w/(\Omega\zeta)$  — нормированные частоты пробного возмущения и накачки. Эти выражения показывают, во-первых, что нечетный характер кубической нелинейности (в отличие от четной квадратичной) приводит при синусоидальной накачке к ненулевым усредненным поправкам для упругого модуля и декремента пробной волны, причем знак поправок зависит от знака коэффициента нелинейности. Далее, как и выше при анализе аналогичных выражений (13), (14) для квадратичного случая, из тех же соображений выбираем значения параметра  $\zeta = 10^{-4}$  для показателя мягкости дефектов и  $\nu = 2 \cdot 10^{-6}$  для их концентрации, а также примем, что значение параметра их собственной кубичной нелинейности  $\beta = 8$ . Выберем умеренно сильную (для акустики и сеймики) амплитуду накачки  $A = 10^{-5}$  с частотой  $\bar{w} = 1$  (зависимость от  $\bar{w}$ , как видно из выражений (19) и (20), одинакова для нелинейных поправок к модулю и декременту и потому не влияет на их соотношение). Получающиеся при выбранных параметрах зави-

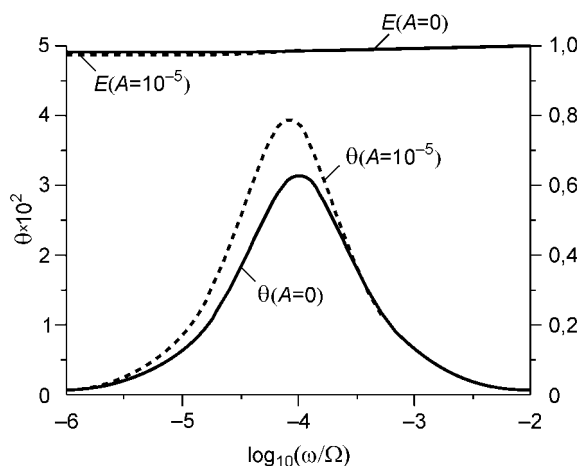


Рис. 7. Зависимости упругого модуля (19) и декремента пробной волны (20) от ее частоты в случае одинаковых по мягкости кубично-нелинейных дефектов при амплитуде деформации волны накачки  $A = 0$  и  $A = 10^{-5}$ .

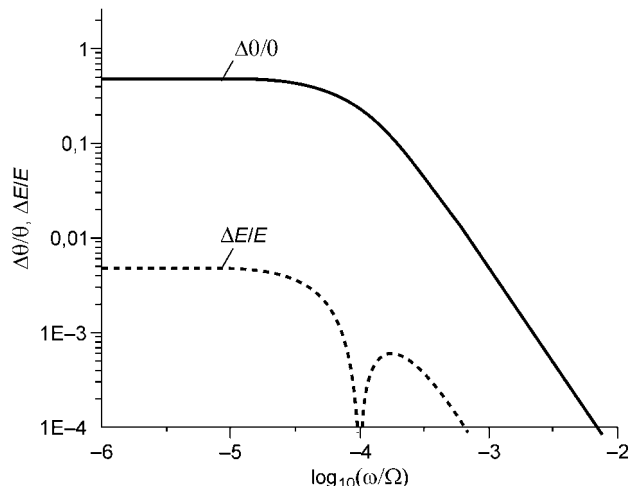


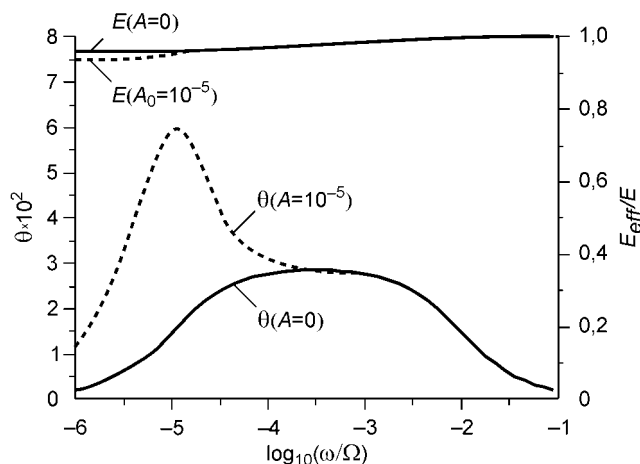
Рис. 8. Зависимости относительных изменений упругого модуля и декремента затухания пробной волны от ее частоты при тех же параметрах, что и для кривых, приведенных на рис. 7.

симости упругого модуля и декремента пробной волны от ее частоты приведены на рис. 7. Соответствующие частотные зависимости для вызванных накачкой относительных изменений декремента  $\Delta\theta/\theta$  и модуля упругости  $\Delta E/E$  при тех же параметрах показаны на рис. 8.

Основные качественные особенности влияния динамической накачки подобны рассмотренному выше статическому случаю для квадратичных дефектов. Вновь видно, что  $\Delta\theta/\theta > \Delta E/E$ , причем в окрестности релаксационной частоты дефектов из-за релаксационного сдвига фазы имеет место смена знака нелинейной поправки к упругому модулю.

Далее, по аналогии с предыдущим разделом, рассмотрим случай широкого равномерного распределения  $\nu(\zeta)$  дефектов по их показателю мягкости в диапазоне  $10^{-5} \leq \zeta \leq 10^{-2}$  при выборе значения  $\nu_0 = 6 \cdot 10^{-3}$ , обеспечивающем, как и ранее, значение добротности  $Q \sim 100$  в области частотной независимости линейного декремента. Опуская достаточно громоздкие выражения, получающиеся при интегрировании уравнений (19), (20) по распределению  $\nu(\zeta)$ , приведем только частотные зависимости для декремента и нормированного модуля упругости (рис. 9) в абсолютных значениях и (рис. 10) для их относительных изменений.

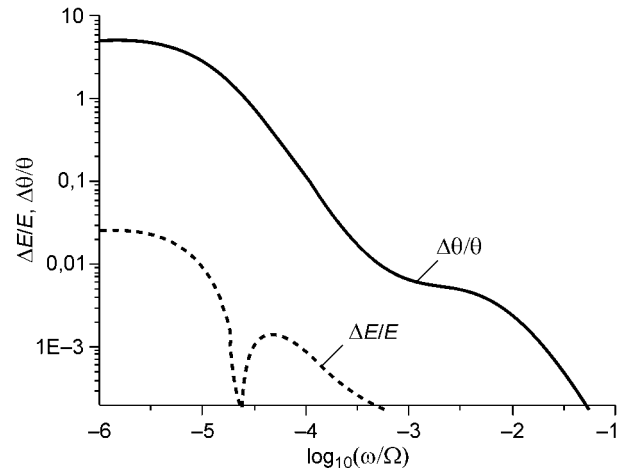
Качественно эти результаты похожи на аналогичные зависимости для случая статического воздействия. А именно, также имеется характерная частота, при которой нелинейная поправка к упругому модулю меняет знак и может быть сколь угодно мала, а сопутствующие изменения декремента очень существенны, причем не только в относительном выражении, но и по абсолютной величине. Поэтому в



окрестности этой характерной частоты комбинарованное влияние линейной релаксации и упругой нелинейности выглядит как чисто диссипативная нелинейность. При распространении возмущения на значительные расстояния (в масштабе длины упругой волны) эти различия в проявлениях амплитудно-зависимых вариаций

Рис. 9. Зависимости упругого модуля и декремента пробной волны от ее частоты для случая кубично-нелинейных дефектов для амплитуд деформации волны накачки  $A = 0$  и  $A = 10^{-5}$  при широком распределении дефектов по параметру мягкости.

**Рис. 10.** Относительные изменения упругого модуля и декремента затухания пробной волны от ее частоты при широком распределении кубично-нелинейных дефектов по их параметру мягкости и прочих параметрах, как и для кривых, показанных на рис. 9.



упругого модуля (т. е. скорости волны) и декремента должны еще более подчеркиваться, так как фазовые или групповые задержки пропорциональны дистанции, а ослабление волны из-за диссипации накапливается с расстоянием экспоненциально.

Кроме того, из выражений (18)—(20) также очевидно, что и в отсутствие второго возбуждения (накачки) для одного достаточно интенсивного колебательного возмущения из-за его самовоздействия также будут наблюдаться нелинейные вариации упругого модуля и поглощения. В случае самовоздействия также имеется некоторая характерная частота, при которой нелинейная поправка к упругому модулю меняет знак. Таким образом, при одном и том же знаке нелинейности дефектов в зависимости от частоты волны (ниже или выше этой характерной частоты) с ростом колебательной амплитуды может наблюдаться либо увеличение, либо уменьшение эффективного упругого модуля для этой волны. Отметим, что данный механизм, возможно, имеет отношение к некоторым наблюдениям увеличения скорости упругих волн с ростом амплитуды, хотя чаще для горных пород и других микрогетерогенных сред наблюдается нечетная нелинейность “мягкого” типа (когда скорость волны уменьшается с ростом амплитуды). Как уже отмечалось во введении, интерпретация результатов экспериментов дополнительно усложняется тем, что параллельно в одном материале могут действовать несколько механизмов нелинейности. В частности, наряду с упругонелинейными и релаксационными явлениями на тех же самых дефектах могут иметь место гистерезисные (например, адгезионного или фрикционного типа) эффекты. В следующем разделе будет показано, что при качественном подобии проявлений гистерезиса и обсуждаемого негистерезисного механизма обусловленные ими нелинейные вариации модуля и амплитудно-зависимое поглощение и количественно могут быть одного порядка.

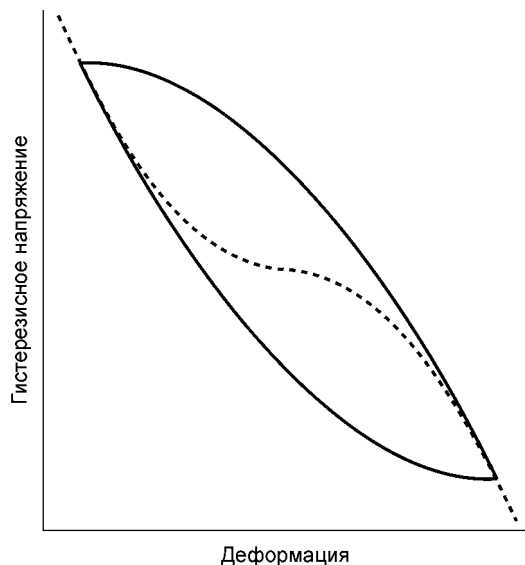
**Нечетно-квадратичные дефекты : сопоставление с квадратичным гистерезисом.** К настоящему времени накоплено большое число экспериментальных данных, свидетельствующих о том, что для многих горных пород наблюдаемые нелинейные эффекты (доминирование нечетных гармоник, квадратично зависящих от амплитуды, а также пропорциональные первой степени волны дефект модуля и нелинейные потери) хорошо объясняются гистерезисной зависимостью напряжение—деформация нечетного кусочно-квадратичного типа. Для описания формы гистерезисных зависимостей широко применяется подход Прейсаха—Красносельского [36], в котором макроскопический гистерезис представляется как коллективный отклик большого ансамбля примитивных гистерезисных элементов в линейно-упругой среде-матрице. Такая модель гистерезиса при достаточно общих предположениях дает следующее выражение для кусочно-квадратичной гистерезисной петли [37]:

$$\sigma_H = \begin{cases} \sigma_H(\varepsilon_{\max}) + \frac{h_H E}{2} (\varepsilon - \varepsilon_{\max})^2, & \partial \varepsilon / \partial t < 0 \\ \sigma_H(\varepsilon_{\min}) - \frac{h_H E}{2} (\varepsilon - \varepsilon_{\min})^2 = \sigma_H(\varepsilon_{\max}) - \frac{h_H E}{2} [(\varepsilon - \varepsilon_{\min})^2 - (\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min})^2], & \partial \varepsilon / \partial t > 0 \end{cases}, \quad (21)$$

где  $E$ , как и ранее, — упругий модуль среды матрицы, содержащей гистерезисные включения-дефекты,  $h_H$  — безразмерный параметр гистерезисной нелинейности, а  $\varepsilon_{\max}$  и  $\varepsilon_{\min}$  — максимальное и минимальное значения деформации среды. Подчеркнем, что в выражении (21) полностью убрана доминирующая линейная компонента связи напряжение—деформация и оставлена только существенная для настоящего рассмотрения нелинейная гистерезисная компонента. Константа  $\sigma_H(\varepsilon_{\max})$  в выражении (21) не определена, так как ее значение не влияет на площадь гистерезисной петли и ее искривленность, отвечающие за потери и дефект модуля. Форма петли гистерезиса вида (21) показана на рис. 11.

При амплитуде деформации  $A$  нетрудно найти соответствующие выражению (21) величины амплитудно-зависимого декремента и дефекта модуля [37]:

$$\theta_H = (4/3)h_H A, \quad (\Delta E/E)_H = h_H A. \quad (22)$$



**Рис. 11.** Форма петли нечетно-квадратичного гистерезиса (21), следующая из подхода Прейсаха—Красносельского (сплошная линия) и эквивалентная негистерезисная нечетно-квадратичная нелинейность, дающая такой же (функционально и по величине) дефект модуля.

Отсюда для квадратичного гистерезиса вида (21) получается значение параметра Рида

$$r = \theta_H / (\Delta E / E)_H = 4/3. \quad (23)$$

Далее следует принять во внимание, что на тех же самых микроструктурных особенностях (типа микроконтактов и подобных „слабых мест“ в материале, где имеют место гистерезисные адгезионные и фрикционные явления) должны локализоваться и линейные (термоупругие или вязкие) потери, т. е. должны иметь место релаксационные эффекты. В силу этого, ответственная за дефект модуля

нелинейно-упругая компонента, присутствующая в гистерезисной нелинейности, за счет рассмотренного выше комбинированного нелинейно-релаксационного механизма должна также приводить к появлению амплитудной зависимости потерь. Причем, как следует из проведенного выше рассмотрения, обусловленные нелинейно-релаксационным механизмом амплитудные зависимости диссипации и дефекта модуля должны совпадать как между собой, так и с амплитудной зависимостью гистерезисных потерь (см. выражения (22)). Более того, как будет видно ниже, амплитудно-зависимые гистерезисные и негистерезисные потери могут оказаться сопоставимы также и по величине (по крайней мере, в некотором частотном диапазоне). Чтобы проиллюстрировать эти утверждения, рассмотрим пример нелинейных вязкоупругих мягких дефектов-включений, которые демонстрируют эквивалентное гистерезису вида (21) поведение с точки зрения нелинейной упругости, но не обладают гистерезисными потерями. Такая „эквивалентная“ упругая нелинейность дефектов может быть описана нечетной квадратичной функцией  $F(\varepsilon)$  следующего вида:

$$F(\varepsilon) = -\gamma \varepsilon^2 \operatorname{sgn}(\varepsilon). \quad (24)$$

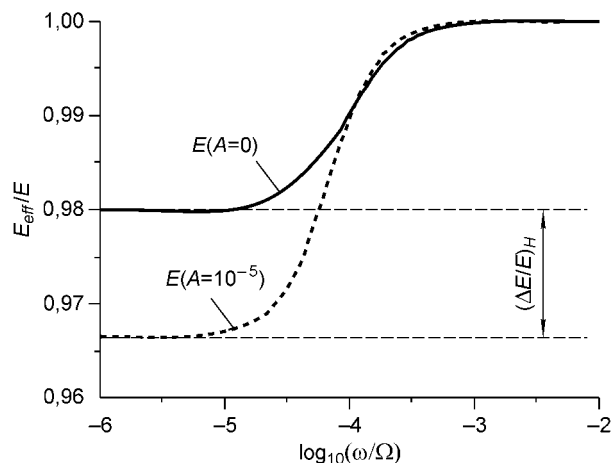
С учетом (24), используя процедуру, аналогичную описанной выше для обычных квадратично-нелинейных и кубично-нелинейных дефектов, в случае самовоздействия колебательного возмущения с амплитудой  $A$ , получаем следующие выражения для дефекта модуля и для негистерезисной части декремента в среде с такими дефектами:

$$(\Delta E / E) \approx -\frac{\nu}{\zeta} \frac{1}{1 + \bar{\omega}^2} - \frac{8}{3\pi} \frac{\nu \gamma A (1 - \bar{\omega}^2)}{\zeta^2 (1 + \bar{\omega}^2)^{5/2}}, \quad (25)$$

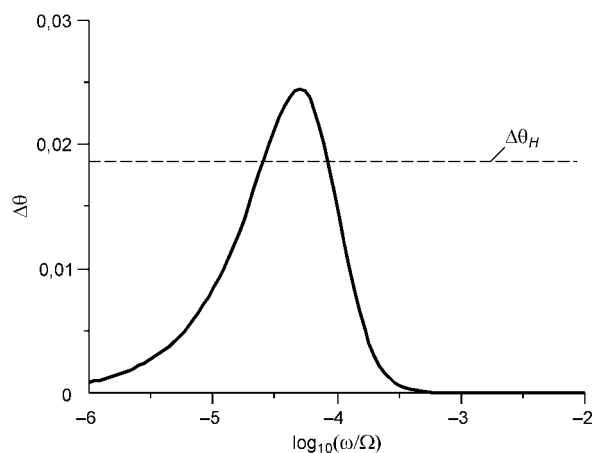
$$\theta = \theta_{lin} + \theta_{nl} = \pi \frac{\nu}{\zeta} \frac{\bar{\omega}}{1 + \bar{\omega}^2} + \frac{16}{3} \frac{\gamma A \bar{\omega}}{\zeta^2 (1 + \bar{\omega}^2)^{5/2}}. \quad (26)$$

Как видно из (25), (26), для выбранного вида эквивалентной негистерезисной нелинейности (24) амплитудное поведение нелинейного поглощения и дефекта модуля, действительно, функционально совпадает с их зависимостями (22) для квадратичного гистерезиса (21). Далее нетрудно обеспечить и количественное совпадение величины нелинейного дефекта модуля (25) с соответствующим гистерезису вида (21) значением  $(\Delta E / E)_H = h_H A$ . Сравнение этого выражения с выражением (25) показывает, что для обеспечения одинакового (в низкочастотном пределе) значения дефекта модуля следует положить  $h_H = 8\nu\gamma / (3\pi\zeta^2)$ . Получающаяся при этом эквивалентная негистерезисная нелинейная зависимость напряжение—деформация показана на рис. 11 штриховой линией.

Для иллюстрации количественных соотношений в качестве примера на рис. 12, 13 приведены величины амплитудно-зависимого дефекта модуля (25) и амплитудно-зависимая (нелинейно-релаксационная) часть декремента (26) для „эквивалентной“ негистерезисной нелинейности, а также показаны аналогичные величины, описываемые выражениями (22) для гистерезисной нелинейности вида (21). При принятых, как и ранее, значениях концентрации ( $\nu = 2 \cdot 10^{-6}$ ) и параметра мягкости ( $\zeta = 10^{-4}$ ) обеспечивается линейная добротность среды  $Q \sim 100$ . Далее при выборе параметра нелинейности дефектов ( $\gamma = 8$ ) обеспечивается значение параметра гистерезисной нелинейности среды  $h_H = 8\nu\gamma / (3\pi\zeta^2) \approx 1400$ , что также



**Рис. 12.** Амплитудно-зависимый дефект модуля для гистерезисной нелинейности (21) и для эквивалентной упругой нелинейности вида (24), дающей такое же значение дефекта модуля в низкочастотном пределе.



**Рис. 13.** Негистерезисный амплитудно-зависимый декремент для эквивалентной упругой нелинейности и гистерезисный вклад в декремент, соответствующие дефекту модуля, показанному на рис. 12.

типично для горных пород [1, 12, 13] и обеспечивает нелинейное изменение величины упругого модуля порядка 1,5 % при амплитуде деформации  $A = 10^{-5}$  (см. рис. 12). Далее, как видно из рис. 13, при заданной величине дефекта модуля нелинейно-релаксационный вклад в величину декремента может быть сравним и даже превышать нелинейный гистерезисный декремент, оцененный по выражению (22). При этом следует подчеркнуть, что квазистатические гистерезисные оценки (22) являются завышенными, поскольку релаксационное демпфирование реакции дефектов должно уменьшать (по сравнению с оценкой на основе (22)) как дефект модуля, так и площадь петли гистерезиса, соответствующую гистерезисным потерям. Таким образом, с приближением частоты воздействия к релаксационной частоте дефектов роль гистерезисных потерь должна заметно падать, а нелинейно-релаксационный вклад в декремент должен, наоборот, возрастать и затем убывать вновь. Уменьшение уровня гистерезисной нелинейности с ростом частоты (наблюдавшееся по уменьшению дефекта модуля) ярко проявлялось, например, в эксперименте, описанном в [38]. Экспериментальное определение частотного поведения вклада нелинейно-релаксационных потерь существенно более сложно из-за трудности разделения гистерезисного и нелинейно-релаксационного вкладов в потери. Разделение этих вкладов затруднено, во-первых, тем, что их амплитудная зависимость одинакова (если исследуется самовоздействие). В случае действия более сильной волны накачки на другую пробную различение вкладов разных механизмов также нетривиально, так как для декремента пробной волны должно иметь место существенно немонотонное частотное поведение даже для частотно-независимой гистерезисной петли вида (21) [37]. Кроме того, для сравнения с реальными материалами необходима достаточно реалистичная оценка распределения дефектов по частотам релаксации. Более детальное обсуждение этих вопросов выходит за рамки данной работы, в связи с этим здесь мы ограничимся модельными иллюстрациями (см. рис. 12, 13). Уже эти примеры наглядно показывают, что нелинейно-релаксационный вклад при одинаковом амплитудном поведении с гистерезисным вкладом в потери может в разы менять наблюдаемую величину общих нелинейных потерь. Это заключение, а также уже отмечавшая возможность смены знака нелинейной поправки к упругому модулю на некоторой частоте говорят о том, что на различных частотах величина отношения нелинейных потерь к нелинейной вариации упругого модуля может фактически сколь угодно сильно отличаться от истинно гистерезисного значения параметра Рида, надежное определение которого возможно только в квазистатическом пределе.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе в рамках реологической модели микронеоднородной среды с линейно-вязкими и нелинейно-упругими дефектами и в развитие работы [25] продемонстрировано, что совместное влияние даже чисто упругой нелинейности и линейной релаксации может приводить к ярко выраженной амплитудной зависимости диссипации в такой среде. Диссипация может сильно меняться как при квазистатическом, так и симметричном осциллирующем воздействии на среду (при наличии у дефектов нечетной

компоненты нелинейности). При этом, как правило, относительные изменения диссипации (декремента) на порядок и более превышают относительные изменения упругого модуля.

Проведенное сопоставление со свойствами однородной вязкоупругой среды показало, что в однородном случае такой эффект принципиально отсутствует, так что относительные изменения упругого модуля и декремента оказываются одного порядка. Анализ выявил большое сходство механизма появления эффективной диссипативной нелинейности в вязкоупругой микронеоднородной среде с исследованным ранее на подобных моделях эффектом сильного возрастания упругой нелинейности при незначительных вариациях линейных упругих свойств [8—10]. Действительно, сами по себе мягкие дефекты-включения (при измерении деформации в масштабе собственной толщины) не обладают аномальными нелинейными свойствами. Ключевую роль играет здесь их относительная мягкость, приводящая к тому, что при средней деформации много меньшей единицы локально на мягких дефектах деформация может приближаться к единице. При столь сильной деформации, во-первых, происходит очень заметное локальное отклонение характера деформации от линейного закона, так что при не слишком малой концентрации дефектов средняя нелинейность очень значительно меняется. Во-вторых, эти же сильные локальные деформации обуславливают и эффект появления макроскопической диссипативной нелинейности. А именно, поскольку на отдельном локальном вязкоупругом дефекте деформация может стать сравнимой с единицей даже при умеренной средней деформации, то на каждом таком дефекте наблюдаются хотя и значительные, но еще одинаковые по порядку величины вариации упругости и декремента  $(\Delta\theta/\theta)_{loc} \approx (\Delta E/E)_{loc}$  (как было рассмотрено в начале первого раздела). Далее, поскольку вклад мягких дефектов в макроскопический упругий модуль среды изначально был малым, то даже довольно сильное изменение  $(\Delta E/E)_{loc}$  незначительно сказывается на изменении макроскопической упругости среды, так что  $(\Delta E/E)_{macro} \ll (\Delta E/E)_{loc}$ . Что касается диссипации в такой среде, то, в отличие от упругого модуля, она изначально определялась в основном вкладом мягких дефектов. Именно поэтому сильное локальное изменение диссипации на дефектах может приводить к почти такому же изменению полной макроскопической диссипации в среде, т. е.  $(\Delta\theta/\theta)_{macro} \sim (\Delta\theta/\theta)_{loc}$ . В этом и состоит физический смысл рассмотренного механизма. Следует отметить дополнительно, что экспоненциальное накопление потерь с расстоянием может приводить к еще более яркому проявлению диссипации (изменяя результирующую амплитуду в разы даже при не столь сильном изменении поглощения).

Таким образом, механизм комбинированного влияния линейно-вязких потерь и нелинейной упругости наряду с обычно обсуждаемыми нелинейными механизмами гистерезисного типа и непосредственно нелинейной диссипацией (например, нелинейно-вязкими потерями) может давать существенный вклад в наблюдаемые экспериментально явления, связанные с амплитудно-зависимым поглощением. Поскольку этот механизм должен действовать параллельно с гистерезисной нелинейностью, возникающей за счет адгезионных и фрикционных эффектов, необходимо учитывать его роль при интерпретации экспериментальных результатов. В частности, при оценивании параметра Рида по акустическим измерениям, измененное за счет нелинейно-релаксационного вклада отношение диссипации и дефекта модуля может совершенно не соответствовать значению параметра Рида, ожидаемому для квазистатической деформации гистерезисной среды. И в других ситуациях, например, для наблюдений [38] увеличения скорости упругой волны с ростом ее амплитуды может играть роль не только обсуждаемый в работе [38] гистерезисный механизм, но и рассмотренный в данной работе релаксационный эффект смены знака нелинейной вариации упругого модуля при достаточно высокочастотном воздействии на среду.

Отметим, что и для диссипации подобный эффект смены знака нелинейно-релаксационной поправки к декременту на разных частотах также может иметь место, например, за счет термоупругой релаксации на вытянутых нелинейных контактах в трещинах [24, 39]. Этот эффект связан с тем, что на таких полосковых контактах нелинейно-обусловленный сдвиг положения релаксационного пика происходит практически без изменения его высоты, что может приводить к уменьшению диссипации на одном склоне пика и ее одновременному увеличению на другом в зависимости от частоты наблюдения. Таким образом, возможность наложения проявлений гистерезисной нелинейности, упругой нелинейности и нелинейно-релаксационных эффектов необходимо учитывать при интерпретации нелинейно-акустических и сейсмических экспериментов.

Существенным стимулом к выполнению данного исследования послужили дискуссии с участниками семинаров С.В. Гольдина „Геомеханика и геофизика“ 2002—2004 гг. в Институте геофизики СО РАН.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 05-02-17355) и программы Отделения физических наук РАН „Когерентные акустические поля и сигналы“.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Guyer R., Johnson P.** Nonlinear mesoscopic elasticity: evidence for a new class of materials // *Physics Today*, 1999, April, p. 30—36.

2. **Ostrovsky L.A., Johnson P.A.** Dynamic nonlinear elasticity in geomaterials // *Rivista del Nuovo chimento*, 2001, v. 24, № 7, p. 1—46.
3. **Проблемы** нелинейной сейсмологии / Под ред. А.В. Николаева, И.Н. Галкина. М., Наука, 1987, 288 с.
4. **Tournat V., Zaitsev V., Gusev V. et al.** Probing granular media by acoustic parametric emitting antenna: clapping contacts, nonlinear dilatancy and polarization anisotropy // *Phys. Rev. Lett.*, 2004, v. 92(8), p. 085502(1—4).
5. **Турна В., Зайцев В., Гусев В. и др.** Экспериментальные исследования нелинейных акустических эффектов в зернистых средах // *Акуст. журн.*, 2005, т. 51, № 5, с. 633—644.
6. **Zaitsev V., Nazarov V., Tournat V. et al.** Luxemburg-Gorky effect in a granular medium: probing perturbations of the material state via cross-modulation of elastic waves // *Europhys. Lett.*, 2005, v. 70(5), p. 607—613.
7. **Зайцев В.Ю., Назаров В.Е., Таланов В.И.** „Неклассические“ проявления микроструктурно-обусловленной нелинейности: новые возможности для акустической диагностики // *Успехи физических наук*, 2006, т. 176, № 1, с. 97—102.
8. **Zaitsev V.Yu.** A model of anomalous acoustic nonlinearity of micro-inhomogeneous media // *Acoustics Lett.*, 1996, v. 19, № 9, p. 171—176.
9. **Беляева И.Ю., Зайцев В.Ю.** Упругие нелинейные свойства микронеоднородных сред с иерархической структурой // *Акуст. журн.*, 1997, т. 43, № 5, с. 594—599.
10. **Беляева И.Ю., Зайцев В.Ю.** О предельном значении параметра упругой нелинейности структурно-неоднородных сред // *Акуст. журн.*, 1998, т. 44, № 6, с. 731—737.
11. **Gordon R.B., Davis L.A.** Velocity and attenuation of seismic waves in imperfectly elastic rock // *J. Geophys. Res.*, 1968, v. 73(12), p. 3917—3935.
12. **Nazarov V.E., Ostrovsky L.A., Soustova I.A., Sutin A.M.** Nonlinear acoustics of micro-inhomogeneous media // *Phys. Earth Planet. Inter.*, 1988, v. 50(1), p. 65—73.
13. **Зименков С.В., Назаров В.Е.** Нелинейные акустические эффекты в образцах горных пород // *Физика Земли*, 1993, № 1, с. 13—18.
14. **Назаров В.Е., Радостин А.В., Соустова И.А.** Влияние интенсивной звуковой волны на акустические свойства резонатора из песчаника // *Акуст. журн.*, 2002, т. 48, № 1, с. 85—90.
15. **Геца Н.И., Егоров Г.В., Мкртумян Ю.В., Юшин В.И.** Экспериментальное исследование мгновенных вариаций скорости и затухания сейсмических волн в рыхлой среде *in situ*, подвергаемой пульсирующей динамической нагрузке // *Геология и геофизика*, 2001, т. 42, с. 1137—1146.
16. **Sharma M.M., Tutuncu A.N.** Grain contact adhesion hysteresis: a mechanism for attenuation of seismic waves // *Geophys. Res. Lett.*, 1994, v. 21, № 21, p. 2323—2326.
17. **Guyer R.A., McCall K.R., Boitnott G.N.** Hysteresis, discrete memory, and nonlinear wave propagation in rock: A new paradigm // *Phys. Rev. Lett.*, 1995, v. 74, p. 3491—3494.
18. **Tutuncu A.N., Podio A.L., Gregory A.R., Sharma M.M.** Nonlinear viscoelastic behavior of sedimentary rocks: II. Hysteresis effects and influence of fluid type on elastic moduli // *Geophysics*, 1998, v. 63, № 1, p. 195—203.
19. **Tutuncu A.N., Podio A.L., Sharma M.M.** Nonlinear viscoelastic behavior of sedimentary rocks: I. Effect of frequency and strain amplitude // *Ibid.*, p. 184—194.
20. **Cook N.G.W., Hodgson K.** Some detailed stress-strain curves for rock // *J. Geophys. Res.*, 1965, v. 70(12), p. 2883—2888.
21. **Лебедев А.Б.** Амплитудно-зависимый дефект модуля упругости в основных моделях дислокационного гистерезиса // *ФТТ*, 1999, т. 41, № 7, с. 1214—1221.
22. **Reed T.A.** The internal friction of single metal crystals // *Phys. Rev.*, 1940, v. 58, p. 371—380.
23. **Zaitsev V., Gusev V., Castagnede B.** Luxemburg-Gorky effect retooled for elastic waves: a mechanism and experimental evidence // *Phys. Rev. Lett.*, 2002, v. 89(10), p. 105—502 (1—4).
24. **Zaitsev V., Gusev V., Castagnede B.** Thermoelastic mechanism for logarithmic slow dynamics and memory in elastic wave interaction with individual cracks // *Phys. Rev. Lett.*, 2003, v. 90, № 7, p. 07550 (1—4).
25. **Zaitsev V.Yu., Sas P.** Dissipation in microinhomogeneous solids: inherent amplitude-dependent attenuation of a non-hysteretical and non-frictional type // *Acustica-Acta Acustica*, 2000, v. 86, p. 429—445.
26. **Зайцев В.Ю., Назаров В.Е., Беляева И.Ю.** Уравнение состояния микронеоднородных сред и частотная зависимость их упругой нелинейности // *Акуст. журн.*, 2001, т. 47 № 2, с. 220.
27. **Nazarov V.E., Zaitsev V.Yu., Belyaeva I.Yu.** Nonlinear transformation of acoustic waves in microinhomogeneous media with relaxation // *Acustica-Acta Acustica*, 2002, v. 88, p. 40—49.
28. **Физическая акустика** / Ред. У. Мэзон. Т. 4, часть А: Применение физической акустики в квантовой физике и физике твердого тела. М., Мир, 1969, 436 с.

29. **O'Connell R.J., Budiansky B.** Measures of dissipation in viscoelastic media // *Geoph. Res. Lett.*, 1978, v. 5(1), p. 5—8.
30. **Hermida E.B., Povalo F., Porta P.** Internal friction and loss tangent of nonlinear viscoelastic materials: different concepts, different results // *J. Alloys Compounds*, 2000, v. 310, p. 280—283.
31. **Mavko G.** Frictional attenuation: an inherent amplitude dependence // *J. Geophys. Res.*, 1979, v. 84(B9), p. 4769—4775.
32. **Зайцев В.Ю., Назаров В.Е., Шульга А.Е.** О диссипативных и дисперсионных свойствах микро-неоднородных сред // *Акуст. журн.*, 2000, т. 46, № 3, с. 348—355.
33. **Zaitsev V., Sas P.** Elastic moduli and dissipative properties of microinhomogeneous solids with isotropically oriented defects // *Acustica-Acta Acustica*, 2000, v. 86, p. 216—228.
34. **Johnston D.H., Toksoz M.N., Timur A.** Attenuation of seismic waves in dry and saturated rocks: II. Mechanisms // *Geophysics*, 1979, v. 44(4), p. 691—711.
35. **Боголюбов Б.Н., Лобанов В.Н., Назаров В.Е. и др.** Амплитудно-фазовая модуляция сейсмоакустической волны под действием лунно-солнечного прилива // *Геология и геофизика*, 2004, т. 45, с. 1045—1049.
36. **Mayergoyz I.D.** Hysteresis models from the mathematical and control theory points of view // *J. Appl. Phys.*, 1985, v. 57, p. 3803—3806.
37. **Zaitsev V., Gusev V., Zaytsev Yu.** Mutually induced variations in dissipation and elasticity for oscillations in hysteretic materials: non-simplex interaction regimes // *Ultrasonics*, 2005, v. 43, p. 699—709.
38. **Mashinskii E.I.** Experimental study of the amplitude effect on wave velocity and attenuation in consolidated rocks under confining pressure // *J. Geophys. Eng.*, 2005, v. 2, p. 199—212.
39. **Fillinger L., Zaitsev V., Gusev V., Castagnede B.** Nonlinear relaxational absorption/transparency for acoustic waves due to thermoelastic effect // *Acustica-Acta Acustica*, 2006, v. 92, № 1, p. 24—34.

*Поступила в редакцию  
23 ноября 2005 г.*