

**СХОДЯЩАЯСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ
ДЕТОНАЦИОННАЯ ВОЛНА В ГАЗЕ**

M. E. Топчян, B. A. Ясаков

(*Новосибирск*)

Процесс схождения цилиндрической детонационной волны к центру интересен с точки зрения современной теории детонации, поскольку он дает возможность осуществить непрерывно пересжимаемую детонационную волну и тем самым наблюдать влияние такого процесса на поперечные волны. Как известно [1, 2], существование поперечных волн обусловливается наличием задержки воспламенения смеси. С ростом степени пересжатия эти задержки уменьшаются вследствие повышения температуры за фронтом, что должно привести к исчезновению поперечных волн на некотором этапе схождения.

Известно, что, несмотря на наличие поперечных волн, весь детонационный комплекс в среднем имеет параметры, соответствующие одномерной теории, развитой рядом авторов [3—5]. С этой точки зрения интересен вопрос о возможности теоретического решения задачи о сходящейся волне без учета поперечных волн.

Теория для конечной стадии схождения, где несущественно выделение химической энергии, развита в работе Л. Д. Ландау и К. П. Станюковича, изложенной в известной монографии К. П. Станюковича [6]. Начальная и некоторая промежуточная область ($\text{до } \frac{r}{r_0} \approx 0,2$) рассмотрена для отношения удельных теплоемкостей $\frac{c_p}{c_v} = \gamma = 3$ в работе Я. Б. Зельдовича. В этой же работе даны характеристики процесса при $\gamma = 1$.

Полученные приближенные решения не могут быть применимы для газовой детонации, поскольку для нее величина γ обычно равна $\approx 1,25$. Поэтому представляется интересным попытаться исследовать этот случай и развить для него удобную схему расчета. Возможность такого исследования вытекает из некоторых хорошо известных свойств детонационной волны: касанием изэнтропы к адиабате Гюгонио в точке Жуге и минимальностью скорости детонации в точке Жуге, т. е.

$$\left(\frac{dS}{dp} \right)_{H,0} = 0; \quad (1)$$

$$\left(\frac{dD}{dp} \right)_{H,0} = 0; \quad (2)$$

Индекс «*H*» означает, что производная взята вдоль адиабаты Гюгонио, «0» — в точке Жуге. Вследствие первого свойства можно принять,

что до определенной стадии энтропия продуктов детонации не меняется с пересжатием. Второе свойство означает, что при небольших пересжатиях скорость детонации остается постоянной.

На рис. 1 приведены графики изменения скорости детонации в зависимости от степени пересжатия волны для пяти смесей. По оси абсцисс отложено отношение скорости пересжатой детонационной волны к скорости, определяемой условием Жуге; по оси ординат — давление в пересжатой волне к давлению в точке Жуге нормальной детонационной волны. Считается, что химическая реакция проходит мгновенно до равновесия, и условие Жуге достигается сразу при прохождении детонационной волны. В расчетах использовались данные по условиям Жуге из работ [1] и [8].

Приведенные графики показывают, что при изменении давления на фронте в 2 раза скорость детонационной волны для всех указанных

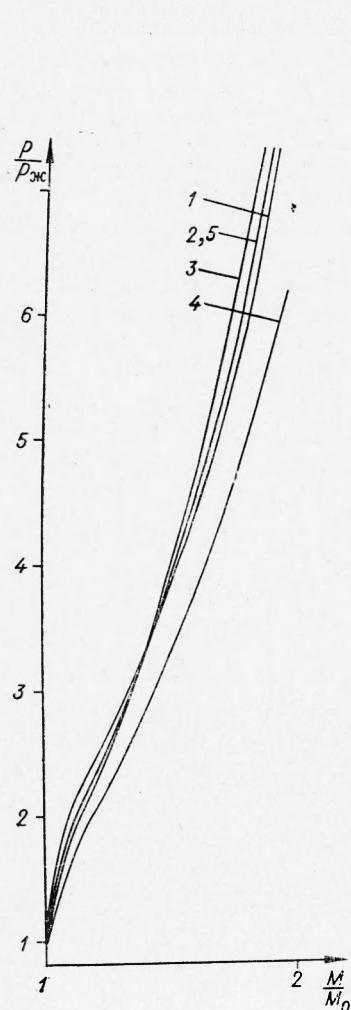


Рис. 1. Изменение скорости детонации при пересжатии.
1 — $2\text{H}_2 + \text{O}_2$; 2 — $2\text{C}_2\text{H}_2 + 5\text{O}_2$; 3 — $2\text{CO} + \text{O}_2$; 4 — водород с воздухом, стехиометрия; 5 — ацетилен с воздухом (стехиометрия).

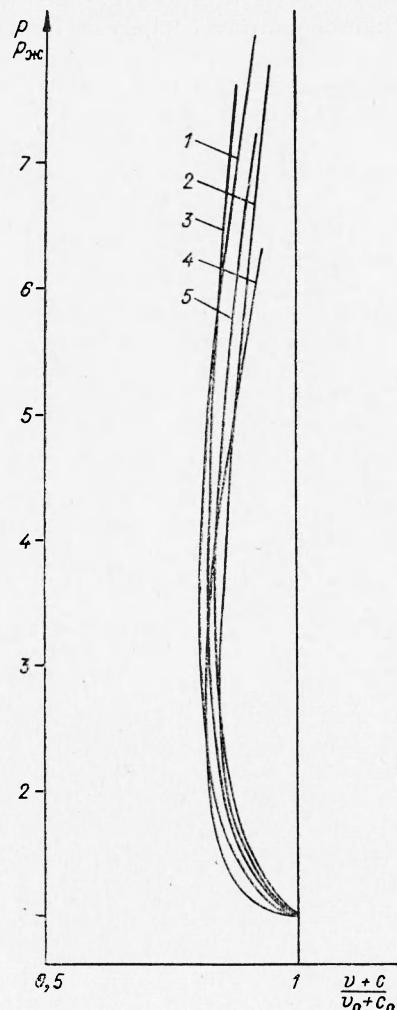


Рис. 2. Величина $v+c$, отнесенная к ее значению в точке Жуге, в зависимости от степени пересжатия. (Цифровые значения см. рис. 1.)

смесей меняется менее чем на 15%. На этой стадии процесса практически весь прирост давления происходит лишь в результате изменения u . Основываясь на этих предположениях, будем рассматривать основную систему уравнений газовой динамики в цилиндрическом случае.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial r} \cdot u &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial r} \cdot u &= - \frac{\rho}{u} \frac{\partial}{\partial r} (u \cdot r); \\ \frac{\partial S}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial S}{\partial r} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

К ним следует добавить термодинамическое уравнение состояния $p=p(\rho, S)$. В силу принятого нами предположения о постоянстве энтропии третье уравнение в системе (3) выпадает и остаются только два уравнения. Эти уравнения могут быть записаны в характеристиках в терминах u и скорости звука c :

$$\frac{d \alpha}{d t} \Big|_{dr = (u+c) dt} = - \frac{uc}{r}; \quad (4)$$

$$\frac{d \beta}{dt} \Big|_{dr = (u-c) dt} = \frac{uc}{r}. \quad (5)$$

Вследствие того, что движение не плоское, а осесимметричное, α -инвариант $\left(\alpha = u + \frac{2}{\gamma-1} c \right)$ для случая уравнения адиабаты $p=A \cdot \rho^{\gamma}$ не остается постоянным вдоль характеристики $\frac{dr}{dt} = u+c$, аналогично и величина $\beta = u - \frac{2}{\gamma-1} c$ не остается постоянной вдоль характеристики $\frac{dr}{dt} = u-c$.

Как показывает Я. Б. Зельдович, при $\gamma=3$ для достаточно широкой области можно положить $\alpha=\alpha_0=\text{const}$, тогда, подставляя в уравнение для β -характеристики u и c , выраженные через α и β , и заменяя α на α_0 , получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для β . При $\alpha=\alpha_0$ эти уравнения могут быть проинтегрированы и, следовательно, получены параметрические уравнения: $r=r(\beta, \beta_0)$ и $t=t(\beta, \beta_0)$, которые совместно с $t=\frac{r-r_0}{D_0}$ определяют значение β на детонационном фронте, а через β и давление в зависимости от радиуса.

В работе Я. Б. Зельдовича [7] довольно подробно рассмотрена возможная схема расчета, поэтому отметим лишь один важный момент.

Для интегрирования уравнений в характеристиках и получения правильных приближений предположение о постоянстве скорости детонации несущественно, поскольку здесь основную роль играет малость величины α по сравнению с β (точнее α^2 по сравнению с β^2). Постоянство D необходимо лишь для нахождения амплитуды волны при подстановке величины $t=\frac{r-r_0}{D_0}$ в уравнения.

В случае детонационной волны в газе γ в продуктах реакции имеет, как известно, два значения: γ_f — «замороженное» и γ_c — равновесное.

Для широкого диапазона газовых смесей γ_f лежит в пределах от 1,212 до 1,269, причем воздушные стехиометрические смеси все имеют значение γ_f , очень близкое к 1,25. Равновесное значение $\gamma = \gamma_e$ лежит в пределах от 1,120 до 1,169, а для большинства смесей мало отличается от 1,165. Поэтому предположение о постоянстве α -инварианта уже недопустимо, так же как и развитый в [7] приближенный метод расчета, поскольку, например, в случае $\gamma = 1,25$ зависимость $\alpha(r)$ довольно сильная и величина α мало отличается по модулю от β . Легко подсчитать, что в начальной точке для $\gamma = 1,25$

$$\beta = \beta_0 = -4,88 D_0,$$

$$\alpha = \alpha_0 = 4 D_0.$$

По этой причине необходимо найти какое-то другое соотношение, которое будет хорошо выполняться при $\gamma < 3$ и позволит, как и в [7], свести задачу к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений.

Произведенный расчет детонационных волн для указанных выше смесей при различных пересжатиях показывает, что в детонационной волне хорошо сохраняется величина

$$\varphi = v + c,$$

где v — скорость газа относительно фронта; c — скорость звука в продуктах реакции.

На рис. 2 приведены графики величины $\varphi = v + c$, отнесенной к ее значению в точке Жуге $\varphi_0 = v_0 + c_0$. Можно видеть, что при увеличении пересжатия величина φ сначала уменьшается по абсолютной величине, а по достижении пересжатий порядка 2–3 увеличивается, приближаясь к своему первоначальному значению. Все изменения лежат в пределах 15–18% от значения в начальной точке, даже если не принимать в расчет увеличение β в процессе схождения (графики построены для тех же смесей, что и ранее).

При движении к центру, в сторону уменьшающихся r , можно записать

$$u = -D + v.$$

Если теперь рассмотреть величину $\theta = u + c = -D + v + c$, то можно легко видеть, что в области, где D меняется мало, величина $u + c$ тоже будет изменяться мало.

С другой стороны, для детонационной волны, сходящейся к центру и не сильно отличающейся от нормальной, в выбранной системе координат $u = -\frac{1}{\gamma+1} D$ и $c = \frac{\gamma}{\gamma+1} D$.

Рассмотрим теперь величины

$$\begin{aligned} \alpha &= u + \frac{2}{\gamma-1} c = \frac{1}{\gamma-1} D; \\ \beta &= u - \frac{2}{\gamma-1} c = -\frac{3\gamma-1}{\gamma^2-1} D; \\ \theta &= u + c = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} D. \end{aligned} \tag{6}$$

Легко видеть, что при $\gamma = 3$ a и θ совпадают, а при $\gamma < 3$ θ меньше a . Точность приближенных решений зависит от того, насколько быстро меняется параметр, принятый постоянным, при изменении D . При $\gamma < 3$ величина θ меняется медленнее, чем a , а при $\gamma < 1,27$ θ к тому же составляет величину менее 3% от β , в то время как a меняется при этих условиях очень сильно и по величине сравнима с β .

Из этих соображений при интегрировании уравнения для β -характеристик выгодно принять ($\gamma < 3$)

$$u + c = \theta_0 = \text{const.}$$

Это предположение является основным при решении поставленной задачи.

Рассмотрим теперь уравнение (5) для β -характеристик. (Нас интересуют только β -характеристики, поскольку их приход на фронт обуславливает повышение давления на фронте.) Оно может быть записано следующим образом:

$$\frac{d\beta}{dt} \Big|_{dr = (u - c) dt} = (u - c) \frac{d\beta}{dr} \Big|_{dt = \frac{dr}{u - c}} = \frac{u + c}{r}. \quad (7)$$

Величины u и c правой части могут быть выражены через β и θ_0 . На самом деле, так как $\beta = u - \frac{2}{\gamma - 1} c$ и $\theta = u + c$, то

$$u = \frac{2\theta + (\gamma - 1)\beta}{\gamma + 1} \quad \text{и} \quad c = \frac{(\gamma - 1)(\theta - \beta)}{\gamma + 1}. \quad (6a)$$

Подставляя эти значения в уравнение (7), получаем

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{2\beta + \frac{3-\gamma}{\gamma-1}\theta}{\gamma+1} \frac{d\beta}{dr} = \frac{[2\theta + (\gamma - 1)\beta][(\gamma - 1)\theta - (\gamma - 1)\beta]}{(\gamma + 1)^2 r}. \quad (8)$$

Уравнение для $\beta(r)$ может быть записано в виде

$$\frac{\left(2\beta + \frac{3\gamma}{\gamma-1}\theta\right) d\beta}{(\beta - \theta)\left(\beta + \frac{2\theta}{\gamma-1}\right)} = - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{dr}{r}. \quad (9)$$

Интегрирование (8), если считать $\theta = \theta_0 = \text{const}$, дает

$$r = r_0 \left[\frac{(\beta_0 - \theta_0)\left(\beta_0 + \frac{2\theta_0}{\gamma-1}\right)}{(\beta - \theta_0)\left(\beta + \frac{2\theta_0}{\gamma-1}\right)} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (10)$$

Подставляя это выражение для r в (8), имеем

$$\frac{d\beta}{dt} = - \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^2 \frac{\left[\left(\beta + \frac{2\theta_0}{\gamma - 1} \right) (\beta - \theta_0) \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}}{\left[(\beta_0 - \theta_0) \left(\beta_0 + \frac{2\theta_0}{\gamma - 1} \right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}}. \quad (11)$$

Последнее уравнение может быть проинтегрировано в элементарных функциях только при значениях γ , удовлетворяющих условиям

$$\gamma = \frac{n}{n-2}, \text{ либо } \gamma = \frac{n-1}{n-3}, \text{ либо } \gamma = \frac{n-1}{n-5},$$

где n — целое число. Можно легко видеть, что спектр значений γ достаточно плотный, чтобы можно было выбрать величину γ , близкую к реальным условиям.

При $\gamma = 1,25$ значения начальных величин θ_0 и β_0 легко подсчитать, они равны соответственно $0,11 D_0$ и $-4,88 D_0$, при этом β возрастает по абсолютной величине с приближением к центру, а величина θ , как показывает расчет, монотонно уменьшается, переходя в конечном счете в область отрицательных значений. Отношение θ/β_0 достигает величины 0,15 при пересжатиях порядка 2—3, если даже не учитывать увеличение β (рис. 3).

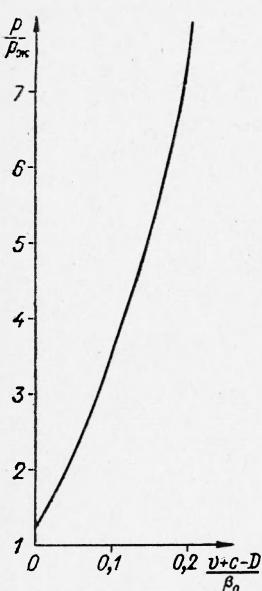


Рис. 3. θ/β_0 в зависимости от степени пересжатия для $\gamma = 1,25$.

При выбранном значении $\gamma = 1,25$ из (10)

$$r = r_0 \left[\frac{(\beta_0 - \theta_0)(\beta_0 + 8\theta_0)}{(\beta - \theta_0)(\beta + 8\theta_0)} \right]^9. \quad (12)$$

Интегрирование уравнения (11) дает

$$t + \text{const} = -81 \chi_{01} \times \\ \times \left\{ \frac{2\beta + 7\theta_0}{19} \sum_{k=0}^{k=8} \frac{2^k [19 \cdot 17 \dots (19 - 2k)]}{9 \cdot 8 \dots (9 - k) (-81 \theta_0^2)^{k+1} [\beta^2 + 7\theta_0 \beta - 8\theta_0^2]^{9-k}} - \right. \\ \left. - \frac{2^9 (17)!!}{9! (81 \theta_0^2)^9} \frac{1}{\sqrt{81 \theta_0^2}} \ln \frac{\beta - \theta_0}{\beta + 8\theta_0} \right\}, \quad (13)$$

где

$$\chi_{01} = [(\beta_0 - \theta_0)(\beta_0 + 8\theta_0)]^9 \cdot r_0.$$

Оценка членов в выражении (13) для зависимостей $t = t(\beta, \beta_0^*)$ показывает, что для численных значений начальных параметров, осу-

ществляющихся при $\gamma = 1,25$, например, для смеси ацетилена с кислородом ($c_0 = 0,11 D_0$, $\beta_0 = -4,88 D_0$, $D_0 = 2426 \text{ м/сек}$) для достаточно точного определения $t = t(\beta, \beta_0)$. можно взять основной логарифмический член и два последних члена ряда. Зависимость $t = t(\beta, \beta_0)$ можно представить как $t = \Psi(\beta) - \Psi(\beta_0)$, где

$$\begin{aligned} \Psi(\beta) = 81 \chi_{01} \left[364 \cdot 10^3 \ln \frac{\beta - \theta_0}{\beta + 8\theta_0} + 165 \cdot 10^3 \frac{2\beta + 7\theta_0}{\beta^2 - 7\theta_0\beta - 8\theta_0^2} - \right. \\ \left. - 22,4 \cdot 10^3 \frac{2\beta + 7\theta_0}{[\beta^2 + 7\theta_0\beta - 8\theta_0^2]^2} \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, задача о начальной стадии схождения цилиндрической детонационной волны в газе в нашем приближении имеет конкретное решение, задаваемое формулами (12) и (13). Амплитуду детонационной волны можно теперь найти по алгоритму, изложенному в работе Я. Б. Зельдовича [7].

Вопрос о поведении детонационной волны вблизи точки $r = r_0$ может быть решен разложением β в ряд вблизи точки $r = r_0$:

$$\beta = \beta_0 + \frac{d\beta}{dr} \Big|_{r=r_0} (r - r_0). \quad (15)$$

Используя соотношения на скачке и пренебрегая начальным давлением смеси, получаем $p_0 = \rho_0 u_0 D_0$, $p = \rho_0 u D_0$ или

$$\frac{p}{p_0} = \frac{u}{u_0}. \quad (16)$$

Подставляя сюда (6а) и соответственно u_0 , получаем

$$\frac{p}{p_0} = \frac{2\theta_0 + (\gamma - 1)\beta}{2\theta_0 + (\gamma - 1)\beta_0}, \quad (17)$$

затем, используя (6) и (9) после алгебраических преобразований, получаем из (15)

$$\beta = -\frac{3\gamma - 1}{\gamma^2 - 1} D_0 - \frac{\gamma}{(\gamma + 1)^2} \left(1 - \frac{r}{r_0} \right) D_0. \quad (18)$$

И, наконец, после подстановки (18) в (17), используя начальные значения β и θ , имеем

$$\frac{p}{p_0} = 1 + \frac{\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} \left(1 - \frac{r}{r_0} \right).$$

или

$$\frac{p}{p_0} \cong \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\frac{\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2}},$$

т. е. при $\gamma = 1,25$

$$\frac{p}{p_0} \approx \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-1/16} = \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-0,0625}.$$

Этот результат, как и следовало ожидать, отличается от полученного в [7] при $\gamma = 3$.

Границы применимости этого последнего результата определяются соотношением между принятыми нами в расчет и отброшенными членами ряда по β , а также величиной давления, при котором происходит заметное изменение скорости детонационной волны, поскольку при этом уже нельзя пользоваться соотношением (17). Оценка показывает, что здесь основной является погрешность, вносимая при разложении в ряд, и полученная формула справедлива до

$$\frac{r}{r_0} \cong 0,9.$$

Несколько слов о возможной экспериментальной проверке полученных соотношений. Как известно, при нормальном распространении в детонационной волне существуют поперечные волны. Осуществление сходящейся цилиндрической детонационной волны интересно тем, что при этом процессе будет осуществляться непрерывное все усиливающееся пересжатие. При достаточном пересжатии поперечные волны должны исчезнуть, поскольку химическая энергия становится в конце концов несущественной. Можно ожидать, что исчезновение волн произойдет гораздо раньше. К оценке степени пересжатия, приводящего к исчезновению поперечных волн, можно подойти, рассматривая спиновую детонацию.

Естественно, что возникновение поперечных волн возможно лишь при заметных задержках воспламенения, когда может появиться за ударной волной слой сжатого, но не горевшего газа. Если такого слоя не образуется, то возникновение поперечных волн невозможно.

При рассмотрении спиновой детонации можно видеть, что в косой волне, сопровождающей спиновую детонацию (изломе переднего фронта), реакция идет практически с очень малой задержкой. При спиновой детонации давление в косом скачке наружного фронта примерно в 2 раза выше, что соответствует условию Чепмена — Жуге. Следует поэтому ожидать того, что при пересжатиях двухкратного порядка поперечные волны вновь возникнуть не должны.

Однако при попытке получить этот результат на эксперименте следует иметь в виду, что при пересжатой детонации все возмущения, существующие за фронтом, догоняют фронт. Следовательно, волна, «наследив» позади себя, «собирает» в процессе движения все неоднородности на фронте. Если считать, что возмущения имеют амплитуду порядка давления в поперечной волне, то полного сглаживания фронта следует, по-видимому, ожидать при пересжатиях, давление при которых становится порядка величины его за поперечной волной, т. е. 6—7 раз от давления во фронте одномерной волны, распространяющейся со скоростью Чепмена — Жуге.

Нетрудно непосредственно осуществить измерение давления в такой сходящейся детонационной волне. При таких измерениях надо иметь в виду, однако, что существование поперечных волн будет заметно искажать показания датчика в сторону завышения, по крайней мере, до пересжатий порядка 6—7.

Таким образом, непосредственная экспериментальная проверка закона на начальной стадии схождения будет представлять существенные трудности. Решение рассмотренной здесь задачи проведено фактически как раз для этой стадии.

*Поступила в редакцию
6/VIII 1966*

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Войцеховский, В. В. Митрофанов, М. Е. Топчиян. Структура фронта детонации в газах. Новосибирск. Изд-во СО АН СССР, 1963.
2. Р. И. Солоухин. Ударные волны и детонация в газах. М., Физматгиз, 1963.
3. E. Jouguet's. Mécanique des Explosifs. Paris, 1917.
4. Я. Б. Зельдович. ЖЭТФ, 1942, 12, 9, 389.
5. I. von Neumann. J. ORSD. 1942, 5, 49.
6. К. П. Станюкович. Неустановившиеся движения сплошной среды, Гостехиздат, 1955.
7. Я. Б. Зельдович. ЖЭТФ, 1959, 36, 3.
8. C. Eisen, R. Gross, T. Rivlin. Combustion and Flame. 1960, 4, 2, 137.