

УДК 532.517.013.4 : 537.2

УСТОЙЧИВОСТЬ СТРУИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ ВЫСОКОЙ ЧАСТОТЫ

Е. А. Демехин, С. В. Полянских

Кубанский государственный университет, 350040 Краснодар
E-mail: mathf@rambler.ru

В предположении, что жидкость является вязкой ньютоновской, рассмотрена устойчивость струи жидкости-электролита, помещенной в тангенциальное электрическое поле, гармонически осциллирующее с высокой частотой. Показано, что в случае малости числа Пекле, вычисленного по толщине дебаевского слоя, возможно раздельное решение электродинамической части задачи в слое Дебая и гидродинамической части задачи внутри струи. Исследована линейная устойчивость тривиального решения задачи. Получено дисперсионное соотношение, с помощью которого изучено влияние амплитуды и частоты колебаний электрического поля на устойчивость струи. Показано, что наличие внешнего осциллирующего поля оказывает на струю стабилизирующее действие. Исследованы основные режимы устойчивости в зависимости от контрольных параметров задачи, а также бифуркационные смены режимов.

Ключевые слова: электрогидродинамика, электролит, линейная устойчивость, вязкая жидкость, микроструя.

Введение. Задача о поведении капиллярной струи во внешнем электрическом поле является классической задачей электрогидродинамики и имеет широкое практическое применение, в частности в качестве одного из способов распыления жидкости (принтеры, карбюраторы автомобилей, распыление топлива в форсунках и т. д.). Случай внешнего постоянного электрического поля и заряда на поверхности струи исследован во многих работах (см., например, [1–5]), в которых показано, что наличие заряда на свободной поверхности приводит к дестабилизации струи по отношению к длинноволновым возмущениям, а наличие внешнего тангенциального поля, наоборот, стабилизирует струю. Как известно, капиллярные струи являются неустойчивыми и распадаются на капли [2, 6]. Экспериментальное исследование струй и капель жидкости, находящихся под действием электрического поля, начато в работе [7]. Существует достаточно большое количество моделей, описывающих различные особенности изучаемых процессов. Обзор различных моделей, построенных к настоящему времени, содержится в работе [8].

Поведение струи существенно зависит от того, чем является рабочая жидкость струи — диэлектриком, проводником или электролитом. В настоящее время наименее изучены электролиты, несмотря на то что они исследовались в экспериментах [7] и часто применяются на практике в целях электрораспыления.

В ряде экспериментальных работ, в частности в [9], предложено вместо постоянного поля использовать переменное электрическое поле высокой частоты. Преимуществами

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00005-а).

такого внешнего силового поля являются наличие нового контрольного параметра — частоты колебаний; электронейтральность образующихся при распылении капель жидкости; отсутствие при достаточно больших частотах колебания (более 10 кГц) нежелательных химических реакций, сопровождающих процесс, вследствие того что период колебаний значительно меньше характерного времени реакции. Целью настоящей работы является создание модели, описывающей явления такого типа.

Отметим, что первоначально для описания поведения капель и струй жидкости во внешнем электрическом поле использовались либо статические модели, либо модели, основанные на предположении об идеальности жидкости. Применение такого подхода допустимо, поскольку первичная потеря устойчивости обусловлена именно нормальными напряжениями на границе раздела фаз. Тем не менее в дальнейшем в работах [10, 11] были указаны некоторые противоречия, к которым приводит предположение об идеальности рассматриваемой жидкости, а также отмечены различия теоретических результатов и экспериментальных данных. Например, в работе [10] исследуется процесс схлопывания струи жидкости. Отмечено, что тонкий пограничный слой вблизи перешейка, возникающий при сколь угодно малой вязкости, играет основную роль в процессе схлопывания. В [11] приведено асимптотическое решение задачи об эмиссии струи жидкости из конуса Тейлора, показано, что струя формируется из тонкого пограничного слоя вблизи границы конус — газ. Поэтому поведение струи жидкости, истекающей из конуса Тейлора при больших значениях разности потенциалов, по-видимому, невозможно адекватно описать с помощью моделей невязкой жидкости.

В настоящей работе теоретически исследуется устойчивость струи вязкой капиллярной жидкости цилиндрической формы в тангенциальном электрическом поле, колеблющемся с частотой $\tilde{\omega}$ порядка $\tilde{\kappa}/\tilde{\varepsilon}$ ($\tilde{\kappa}$ — электрическая проводимость; $\tilde{\varepsilon}$ — диэлектрическая проницаемость жидкости). Возбужденное таким полем механическое движение в системе включает медленно меняющуюся среднюю и быструю колебательную, или вибрационную, компоненты [12]. Результирующее движение представляет собой их суперпозицию, причем при увеличении частоты колебаний вклад вибрационной составляющей стремится к нулю [12].

В результате линеаризации системы вблизи тривиального решения получаем задачу на собственные значения, зависящую от волнового числа и коэффициента линейного роста возмущений, а также от основных безразмерных параметров системы. В настоящей работе исследуется зависимость области устойчивости от указанных параметров, а также переходы между различными режимами устойчивости при достижении контрольным параметром критических значений. Показано, что увеличение амплитуды колебаний внешнего поля приводит к стабилизации струи за счет сужения диапазона неустойчивых длин волн, а также к уменьшению максимального значения коэффициента линейного роста. Увеличение частоты колебаний, наоборот, приводит к незначительной дестабилизации струи. Установлено, что при фиксированных физико-химических свойствах жидкости существует два критических значения частоты колебаний поля, при переходе через которые изменяется режим устойчивости.

1. Постановка задачи. Рассмотрим струю вязкой жидкости-электролита, помещенную во внешнее тангенциальное электрическое поле. Процессы, происходящие внутри жидкой фазы, описываются двумя уравнениями переноса отрицательных и положительных ионов, уравнением Пуассона для потенциала электрического поля, гидродинамическими уравнениями Навье — Стокса и уравнением неразрывности. Жидкость представляет собой простой бинарный электролит: $z^+ = -z^- = 1$. Коэффициенты диффузии отрицательных и положительных ионов полагаются равными: $\tilde{D}^+ = \tilde{D}^- = \tilde{D}$. Полная система уравнений

имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{c}^\pm}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{c}^\pm &= \tilde{D} \left(\pm \frac{\tilde{F}}{\tilde{R}\tilde{T}} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{c}^\pm \tilde{\nabla} \tilde{\Phi}) + \tilde{\nabla}^2 \tilde{c}^\pm \right), \\ \tilde{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{U}} \right) &= -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \tilde{\mu} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{U}} + \tilde{F} (\tilde{c}^- - \tilde{c}^+) \tilde{\nabla} \tilde{\Phi}, \\ \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{U}} &= 0, \quad \tilde{\nabla}^2 \tilde{\Phi} = \tilde{F} (\tilde{c}^- - \tilde{c}^+) / \tilde{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь знаком “ \sim ” отмечены размерные величины; \tilde{c}^+ , \tilde{c}^- — молярные концентрации катионов и анионов соответственно; $\tilde{\mathbf{U}}$ — вектор скорости жидкости; \tilde{D} — коэффициент диффузии ионов; \tilde{F} — число Фарадея; \tilde{R} — универсальная газовая постоянная; \tilde{T} — температура, К; $\tilde{\Phi}$ — потенциал электрического поля; $\tilde{\varepsilon}$ — абсолютная диэлектрическая проницаемость жидкости; \tilde{p} — давление; $\tilde{\mu}$ — динамическая вязкость; $\tilde{\rho}$ — плотность жидкости. Вдали от границы раздела фаз раствор считается электронейтральным:

$$\tilde{c}^\pm = \tilde{c}_\infty. \quad (2)$$

Окружающий струю газ предполагается диэлектриком. Потенциал электрического поля в газовой фазе удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\tilde{\nabla}^2 \tilde{\Phi} = 0. \quad (3)$$

Здесь и далее чертой отмечены величины, соответствующие внешней задаче для газа.

В данной работе исследуется наиболее важный случай осесимметричных возмущений струи. Вводятся цилиндрические координаты: \tilde{x} — координата вдоль оси невозмущенной струи, \tilde{y} — радиальная координата. Для описания процесса вблизи свободной границы жидкой фазы целесообразно использовать координаты \tilde{n} , $\tilde{\tau}$ (\tilde{n} — координата вдоль единичной внешней нормали \mathbf{n} к поверхности раздела; $\tilde{\tau}$ — координата вдоль единичной касательной $\boldsymbol{\tau}$, лежащей в плоскости (\tilde{x}, \tilde{y}) (рис. 1)). Ниже приведены краевые условия на границе раздела фаз.

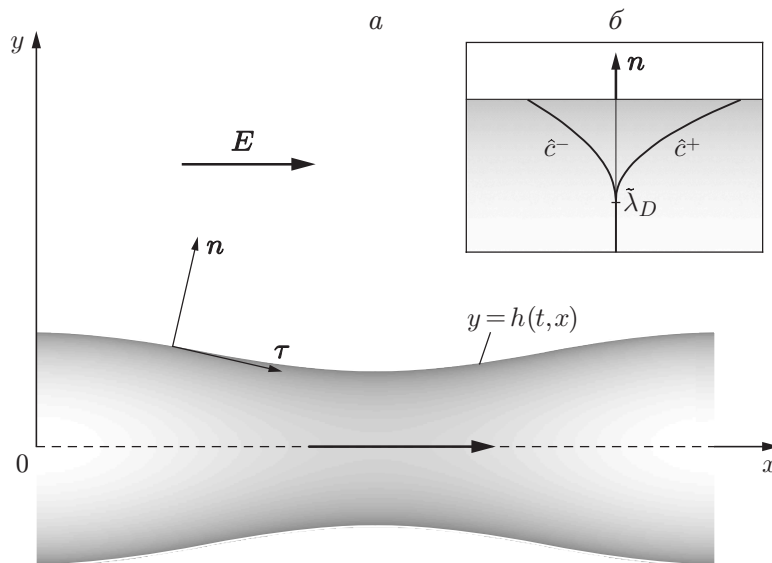


Рис. 1. Схема задачи:

a — системы координат в задаче о движении струи жидкости под действием внешнего тангенциального электрического поля E_∞ ; *b* — пограничный слой вблизи свободной границы жидкости

Газ полагается непроводящим, поэтому поток отрицательных и положительных ионов через свободную поверхность равен нулю:

$$\tilde{n} = 0: \quad \pm \frac{\tilde{c}^\pm \tilde{F}}{\tilde{R}\tilde{T}} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{n}} + \frac{\partial \tilde{c}^\pm}{\partial \tilde{n}} = 0. \quad (4)$$

При переходе через границу раздела фаз потенциал является непрерывным:

$$\tilde{n} = 0: \quad \tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}. \quad (5)$$

Вследствие разности диэлектрических проницаемостей сред производная потенциала по нормали претерпевает разрыв:

$$\tilde{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{n}} = \tilde{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{n}} \quad (6)$$

($\tilde{\varepsilon}$ — диэлектрическая проницаемость окружающего струю газа). Условия баланса нормальных и касательных напряжений соответственно имеют вид

$$[\mathbf{n}\tilde{T}^F\mathbf{n}] + [\mathbf{n}\tilde{T}^E\mathbf{n}] = \tilde{\gamma}\tilde{K}, \quad [\mathbf{n}\tilde{T}^F\boldsymbol{\tau}] + [\mathbf{n}\tilde{T}^E\boldsymbol{\tau}] = 0, \quad (7)$$

где квадратные скобки означают скачок величины при переходе через границу раздела; $\tilde{\gamma}$ — поверхностное натяжение; \tilde{K} — средняя кривизна поверхности раздела; \tilde{T}^F — тензор гидродинамических напряжений; \tilde{T}^E — тензор Максвелла — Вагнера электрических напряжений, компоненты которого в любой ортогональной системе координат имеют вид

$$\tilde{T}_{ij}^E = \tilde{\varepsilon}(-\tilde{E}^2\delta_{ij}/2 + \tilde{E}_i\tilde{E}_j).$$

В частности, в координатах \tilde{n} , $\tilde{\tau}$ нормальное электрическое напряжение (электрическое давление) и касательное электрическое напряжение (электрический сдвиг) записываются следующим образом:

$$\mathbf{n}\tilde{T}^E\mathbf{n} = \tilde{T}_{nn}^E = \tilde{\varepsilon}(\tilde{E}_n^2 - \tilde{E}_\tau^2)/2, \quad \mathbf{n}\tilde{T}^E\boldsymbol{\tau} = \tilde{T}_{n\tau}^E = \tilde{\varepsilon}\tilde{E}_n\tilde{E}_\tau. \quad (8)$$

Кинематическое условие имеет вид

$$\tilde{v} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}}, \quad (9)$$

где $\tilde{y} = \tilde{h}(\tilde{t}, \tilde{x})$ — уравнение поверхности раздела в цилиндрических координатах; \tilde{u} , \tilde{v} — соответственно компоненты \tilde{x} , \tilde{y} скорости жидкости.

Замыкает задачу краевое условие на бесконечности. Колебания внешнего поля предполагаются гармоническими:

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_\infty = -\tilde{x}\tilde{E}_\infty e^{i\tilde{\omega}\tilde{t}} + \text{к. с.} \quad (10)$$

(к. с. — комплексно-сопряженная величина).

Система (1)–(10) приводится к безразмерному виду отнесением длин, концентраций, электрического потенциала, скоростей, времени и давления соответственно к величинам

$$\tilde{r}_0, \quad \tilde{c}_\infty, \quad \tilde{\Phi}_0 = \left(\frac{\tilde{\gamma}\tilde{r}_0}{\tilde{\varepsilon}}\right)^{1/2}, \quad \tilde{U}_0 = \left(\frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\rho}\tilde{r}_0}\right)^{1/2}, \quad \tilde{t}_0 = \frac{\tilde{r}_0}{\tilde{U}_0}, \quad \tilde{p}_0 = \tilde{\rho}\tilde{U}_0^2,$$

где \tilde{r}_0 — радиус невозмущенной струи.

Запишем систему (1) в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial c^\pm}{\partial t} + u \frac{\partial c^\pm}{\partial x} + v \frac{\partial c^\pm}{\partial y} \right) = \\ = \pm \Lambda \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(c^\pm \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y c^\pm \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right\} + \frac{\partial^2 c^\pm}{\partial x^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial c^\pm}{\partial y} \right); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\operatorname{Re}} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} + \frac{1}{\varepsilon^2} (c^- - c^+) \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\operatorname{Re}} \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} y v \right) \right\} + \frac{1}{\varepsilon^2} (c^- - c^+) \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} (y v) = 0; \quad (13)$$

$$\varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right\} = c^- - c^+, \quad y < h; \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} \right) = 0, \quad y > h; \quad (15)$$

при $y = h$

$$\pm \Lambda c^\pm \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{\partial c^\pm}{\partial n} = 0; \quad (16)$$

$$\Phi = \bar{\Phi}, \quad \delta \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n}, \quad [\mathbf{n} T^F \mathbf{n}] + [\mathbf{n} T^E \mathbf{n}] = K, \quad [\mathbf{n} T^F \boldsymbol{\tau}] + [\mathbf{n} T^E \boldsymbol{\tau}] = 0; \quad (17)$$

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}; \quad (18)$$

при $y = \infty$

$$\bar{\Phi} = -x E_\infty e^{i\omega t} + \text{к. с.} \quad (19)$$

Здесь параметры системы

$$\operatorname{Re} = \frac{\tilde{U}_0 \tilde{r}_0}{\tilde{D}}, \quad \operatorname{Re} = \frac{\tilde{\rho} \tilde{r}_0 \tilde{U}_0}{\tilde{\mu}}, \quad \varepsilon^2 = \frac{\tilde{\lambda}_D^2}{\tilde{r}_0^2} = \frac{\tilde{\varepsilon} \tilde{\Phi}_0}{\tilde{F} \tilde{c}_\infty \tilde{r}_0^2}, \quad \Lambda = \frac{\tilde{F} \tilde{\Phi}_0}{\tilde{R} \tilde{T}}, \quad \delta = \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon}}$$

являются безразмерными; $\tilde{\lambda}_D = (\tilde{\varepsilon} \tilde{\Phi}_0 / \tilde{F} \tilde{c}_\infty)^{1/2}$ — толщина дебаевского слоя. Вдали от границы раздела фаз $c^\pm = 1$. Обычно в экспериментах параметр ε изменяется в диапазоне $10^{-6} \div 10^{-2}$. Задача решается в предположении $\varepsilon \ll 1$, $\varepsilon^2 \operatorname{Re} \ll 1$. Из (14) следует, что в этом случае возникает малый параметр при старшей производной, порождающий пограничный слой в окрестности свободной поверхности жидкости. Таким образом, в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ задача распадается на внешнюю (вдали от поверхности раздела) и внутреннюю (вблизи границы раздела фаз).

2. Внутренняя задача. Следуя работе [13], рассмотрим решение системы (11)–(19) в тонком дебаевском слое толщиной порядка $O(\varepsilon)$. Далее показано, что при некоторых дополнительных предположениях в этой области можно пренебречь гидродинамическими эффектами и независимо решать электродинамическую задачу.

Во внутренних координатах $\xi = x$, $\eta = (y - h)/\varepsilon$ уравнения (11), (14) записываются в виде

$$\varepsilon^2 \operatorname{Re} \frac{\partial c^\pm}{\partial t} + \varepsilon^2 \operatorname{Re} \left(u \frac{\partial c^\pm}{\partial \xi} + v \frac{\partial c^\pm}{\partial \eta} \right) = \pm \Lambda \left\{ \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(c^\pm \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{h + \varepsilon \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((h + \varepsilon \eta) c^\pm \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \right\} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 c^\pm}{\partial \xi^2} + \frac{1}{h + \varepsilon \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((h + \varepsilon \eta) \frac{\partial c^\pm}{\partial \eta} \right); \quad (20)$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{h + \varepsilon \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left((h + \varepsilon \eta) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) = c^- - c^+. \quad (21)$$

Уравнения (20), (21) дополняются безразмерными краевыми условиями (2), (16), записанными во внутренних переменных:

$$\eta \rightarrow -\infty: \quad c^\pm \rightarrow 1, \\ \eta = 0: \quad \pm \Lambda c^\pm \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \frac{\partial c^\pm}{\partial \eta} = 0.$$

Основными предположениями данной работы являются следующие:

$$\varepsilon \ll 1, \quad \varepsilon^2 \operatorname{Re} \ll 1, \quad \Omega \equiv \Delta / (2\Lambda) = O(1) \quad (22)$$

($\Delta = \varepsilon^2 \omega \operatorname{Re}$; $\omega = \tilde{\omega} \tilde{t}_0$ — безразмерная частота колебаний электрического поля). Первое предположение позволяет считать поверхность раздела во внутренних координатах локально-плоской. В силу второго предположения конвективными членами в уравнении (20) можно пренебречь, следовательно, электродинамическая часть задачи не содержит неизвестных скоростей жидкости. Третье предположение фактически задает диапазон допустимых частот: размерная частота колебаний $\tilde{\omega}$ должна быть порядка $\tilde{\kappa}/\tilde{\varepsilon}$, где $\tilde{\kappa} = 2\tilde{F}^2 \tilde{D} \tilde{c}_\infty / (\tilde{R} \tilde{T})$ — электрическая проводимость жидкости. В сделанных предположениях величина $\tilde{\kappa}/\tilde{\varepsilon}$ имеет значение порядка значения частоты в диапазоне $10^3 \div 10^7$ кГц [14], если концентрация ионов \tilde{c}_∞ меняется в диапазоне значений $10^{-3} \div 10$ моль/м³.

Таким образом, в узком дебаевском слое в некотором диапазоне частот общая задача разделяется на две, и электродинамическая задача может быть решена раньше. При $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon^2 \operatorname{Re} \rightarrow 0$ уравнения (20), (21) имеют вид

$$\varepsilon^2 \operatorname{Re} \frac{\partial c^\pm}{\partial t} = \pm \Lambda \frac{\partial}{\partial \eta} \left(c^\pm \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial^2 c^\pm}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = c^- - c^+. \quad (23)$$

При этом производной по времени пренебрегать не следует в силу третьего условия в (21), согласно которому частота колебаний внешнего электрического поля является достаточно большой. Для решения системы (23) используется приближение Дебая

$$c^\pm = 1 + \hat{c}^\pm e^{i\omega t} + \text{к. с.}, \quad \hat{c}^\pm \ll 1, \quad \Phi = \hat{\Phi}^\pm e^{i\omega t} + \text{к. с.} \quad (24)$$

Вводя объемную плотность распределения зарядов $\rho = c^+ - c^-$, $\rho = \hat{\rho} e^{i\omega t} + \text{к. с.}$, подставляя (24) в уравнения (23) и линеаризуя их, получаем линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 \hat{\rho}}{d\eta^2} - (2\Lambda + i\Delta) \hat{\rho} = 0, \quad \frac{d^2 \hat{\Phi}}{d\eta^2} = -\hat{\rho}, \\ \eta = 0: \quad 2\Lambda \frac{d\hat{\Phi}}{d\eta} + \frac{d\hat{\rho}}{d\eta} = 0, \quad \hat{\Phi} = \hat{\hat{\Phi}}, \\ \eta = -\infty: \quad \hat{\rho} = 0$$

(потенциал $\hat{\Phi}$ берется из решения задачи для газа). Из данной системы уравнений находим связь между комплексными амплитудами плотности поверхностного заряда $\hat{\sigma}$ и напряженности электрического поля:

$$\hat{\sigma} = \int_{-\infty}^0 \hat{\rho} d\eta = \frac{i}{\Omega} \frac{d\hat{\Phi}}{d\eta} \Big|_{\eta=-\infty},$$

а также скачок амплитуды потенциала во внутренней зоне

$$\hat{\Phi} \Big|_{\eta=-\infty} - \hat{\Phi} = \frac{i}{\Omega(2\Lambda + i\Delta)^{1/2}} \frac{d\hat{\Phi}}{d\eta} \Big|_{\eta=-\infty}. \quad (25)$$

Во внешних координатах выражение для плотности поверхностного заряда запишем в размерном виде

$$\tilde{\sigma} = \frac{i\tilde{\chi}}{\tilde{\omega}} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \tilde{n}} \Big|_{\tilde{n} \ll -\varepsilon} e^{i\tilde{\omega}\tilde{t}} + \text{к. с.} \quad (26)$$

3. Внешняя задача. Предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$ в уравнении (14) равносильно предположению о том, что весь заряд располагается на поверхности раздела и, следовательно, создает дополнительное напряжение. Выражение в правой части формулы (25) во внешних координатах имеет порядок $O(\varepsilon/\sqrt{\Lambda})$, поэтому при $\varepsilon \rightarrow 0$ условие (5) можно оставить без изменений. С учетом выражения (26) для плотности поверхностного заряда условие (6) следует заменить условием

$$\tilde{n} = 0: \quad \tilde{\Phi} = \tilde{\tilde{\Phi}}, \quad \tilde{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{n}} = \tilde{\tilde{\varepsilon}} \frac{\partial \tilde{\tilde{\Phi}}}{\partial \tilde{n}} + \tilde{\sigma}. \quad (27)$$

Таким образом, необходимо уточнить лишь краевые условия (17) на границе раздела фаз (квадратные скобки теперь означают разность значений параметров газа и жидкости за пределами дебаевского слоя). С учетом (27) из (8) получаем

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}\tilde{T}^E\mathbf{n}] &= \frac{\tilde{\tilde{\varepsilon}} - \tilde{\varepsilon}}{2} \left\{ \frac{\tilde{\tilde{\varepsilon}}}{\tilde{\tilde{\varepsilon}}} \left(\frac{\partial \tilde{\tilde{\Phi}}}{\partial \tilde{n}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\tilde{\Phi}}}{\partial \tilde{\tau}} \right)^2 \right\} - \frac{\tilde{\tilde{\varepsilon}}}{\tilde{\tilde{\varepsilon}}} \frac{\partial \tilde{\tilde{\Phi}}}{\partial \tilde{n}} \tilde{\sigma} + \frac{1}{2\tilde{\varepsilon}} \tilde{\sigma}^2, \\ [\mathbf{n}\tilde{T}^E\boldsymbol{\tau}] &= -\frac{\partial \tilde{\tilde{\Phi}}}{\partial \tilde{\tau}} \tilde{\sigma}. \end{aligned} \quad (28)$$

В силу условия электронейтральности слагаемые порядка $O(1/\varepsilon^2)$ в уравнениях (12), содержащие кулоновскую силу, во внешней задаче отсутствуют. Уравнение Пуассона (14) переходит в уравнение Лапласа для потенциала внутри струи. Таким образом, при $\varepsilon \rightarrow 0$ внешняя задача имеет только гидродинамическую часть. Подставляя обезразмеренные выражения (26), (28) в краевые условия системы (11)–(19) и выполняя предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем внешнюю задачу в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} yv \right) \right\}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} (yv) &= 0; \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) &= 0, & y < h, \\ \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} \right) &= 0, & y > h;\end{aligned}\quad (30)$$

при $y = h$

$$\Phi = \bar{\Phi}, \quad \delta \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} + \sigma; \quad (31)$$

$$p - \frac{1}{\text{Re}} (\tau_{xx} n_x^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y + \tau_{yy} n_y^2) + \frac{\delta - 1}{2\delta} \left\{ \delta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right)^2 \right\} - \delta \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{1}{2} \sigma^2 = K, \quad (32)$$

$$\frac{1}{\text{Re}} \{ (\tau_{xx} - \tau_{yy}) n_x n_y + \tau_{xy} (n_y^2 - n_x^2) \} + \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = 0;$$

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}; \quad (33)$$

при $y = \infty$

$$\bar{\Phi} = -x E_\infty e^{i\omega t} + \text{к. с.} \quad (34)$$

Здесь n_x, n_y — компоненты вектора нормали \mathbf{n} :

$$\begin{aligned}n_x &= -\frac{h_x}{(1 + h_x^2)^{1/2}}, & n_y &= \frac{1}{(1 + h_x^2)^{1/2}}, \\ \frac{\partial}{\partial n} &= n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y}, & \frac{\partial}{\partial \tau} &= n_y \frac{\partial}{\partial x} - n_x \frac{\partial}{\partial y}, & K &= \frac{1}{h(1 + h_x^2)^{1/2}} - \frac{h_{xx}}{(1 + h_x^2)^{3/2}}, \\ \tau_{xx} &= 2 \frac{\partial u}{\partial x}, & \tau_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \tau_{yy} &= 2 \frac{\partial v}{\partial y}, & \sigma &= \frac{i\delta}{\Omega} \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial n} \Big|_{n=0} e^{i\omega t} + \text{к. с.},\end{aligned}$$

давление в газе $\tilde{p}_0 = 0$.

Возвращаясь к исходной постановке (11)–(19), заметим, что, хотя средние электрического потенциала и концентраций равны нулю, в уравнения Навье — Стокса в силу нелинейности входит электрическая сила с ненулевым средним. Таким образом, движение жидкости можно разделить на среднее и колебательное. Следуя классической теории осреднения [12], нетрудно показать, что поле скоростей с точностью до малых высшего порядка по частоте может быть представлено в виде

$$\mathbf{U}(t, x) = \bar{\mathbf{U}}_0(t, x) + \frac{1}{\omega} \tilde{\mathbf{U}}_1(t, x) e^{i\omega t} + \text{к. с.},$$

где $\bar{\mathbf{U}}_0, \tilde{\mathbf{U}}_1$ — средняя и колебательная составляющие скорости. Далее индекс 0 опускается. Таким образом, при $\omega \rightarrow \infty$ членом, содержащим $\tilde{\mathbf{U}}_1$, можно пренебречь.

Электрические величины содержат только колебательную составляющую. Вклад в среднее движение системы дают нелинейные члены с ненулевым средним:

$$\begin{aligned}\left\langle \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right)^2 \right\rangle &= 2 \left| \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \tau} \right|^2, & \left\langle \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 \right\rangle &= 2 \left| \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial n} \right|^2, \\ \langle \sigma^2 \rangle &= \frac{2\delta^2}{\Omega^2} \left| \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial n} \right|^2, & \left\langle \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right\rangle &= -\frac{2\delta}{\Omega} \text{Im} \left(\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial n} \frac{\partial \hat{\Phi}^*}{\partial \tau} \right), & \left\langle \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right\rangle &= 0.\end{aligned}\quad (35)$$

Здесь знак “*” означает комплексное сопряжение; угловые скобки — усреднение по быстрому времени ωt :

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt.$$

Краевые условия (32), усредненные с учетом соотношений (35), принимают вид

$$p - \frac{1}{\text{Re}} (\tau_{xx} n_x^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y + \tau_{yy} n_y^2) + \left(\frac{\delta^2}{\Omega^2} + \delta - 1 \right) \left| \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial n} \right|^2 + \left(1 - \frac{1}{\delta} \right) \left| \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \tau} \right|^2 = K, \quad (36)$$

$$\frac{1}{\text{Re}} \{ (\tau_{xx} - \tau_{yy}) n_x n_y + \tau_{xy} (n_y^2 - n_x^2) \} - \frac{2\delta}{\Omega} \text{Im} \left(\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial n} \frac{\partial \hat{\Phi}^*}{\partial \tau} \right) = 0.$$

4. Линейная устойчивость. Задача (19)–(34) имеет тривиальное решение

$$h = 1, \quad u = v = 0, \quad p = 0, \quad \hat{\Phi} = \hat{\Phi} = -E_\infty x.$$

На компоненты скорости и свободную границу налагаются малые возмущения:

$$u \sim \hat{u}(y) e^{i\alpha x + \lambda t}, \quad v \sim \hat{v}(y) e^{i\alpha x + \lambda t}, \quad p \sim \hat{p}(y) e^{i\alpha x + \lambda t}, \quad h \sim 1 + \hat{h} e^{i\alpha x + \lambda t}. \quad (37)$$

В силу уравнений (30)–(34) возмущения потенциала имеют параметрический по времени характер и порождаются возмущением свободной границы (37). В частности, на границе раздела с точностью до членов высшего порядка малости имеем

$$\hat{\Phi}|_{y=h} = \hat{\Phi}|_{y=1} + \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial y} \Big|_{y=1} \hat{h} e^{i\alpha x + \lambda t} + \dots$$

Таким образом, для возмущений амплитуд потенциала следует положить

$$\hat{\Phi} \sim -E_\infty x + \varphi(y) \hat{h} e^{i\alpha x + \lambda t}, \quad \hat{\Phi} \sim -E_\infty x + \bar{\varphi}(y) \hat{h} e^{i\alpha x + \lambda t}. \quad (38)$$

Рассмотрим электростатическую часть задачи. Подставляя выражения (38) в уравнения (30), получаем уравнения Бесселя для величин φ и $\bar{\varphi}$. Требуя выполнения условия регулярности потенциала при $y = 0$ и $y = \infty$, находим

$$\varphi(y) = C_1 I_0(\alpha y), \quad \bar{\varphi}(y) = C_2 K_0(\alpha y), \quad (39)$$

где I_0, K_0 — модифицированные функции Бесселя нулевого порядка. Для определения неизвестных постоянных C_1, C_2 линеаризуем условия (31):

$$y = 1: \quad \varphi = \bar{\varphi}, \quad \delta(1 - i/\Omega)(i\alpha E_\infty + \varphi') = i\alpha E_\infty + \bar{\varphi}'.$$

Отсюда следует

$$C_1 = \frac{iE_\infty}{I_0} \Pi, \quad C_2 = \frac{iE_\infty}{K_0} \Pi, \quad (40)$$

$$\Pi = \Pi(\delta, \alpha, \Omega) = \frac{1 - \delta(1 - i/\Omega)}{\delta(1 - i/\Omega)I_1(\alpha)/I_0(\alpha) - K_1(\alpha)/K_0(\alpha)}$$

($I_1 = I'_0, K_1 = K'_0$ — модифицированные функции Бесселя первого порядка). Из формул (38)–(40) получаем решение электростатической части задачи линейной устойчивости.

Полученные выражения для комплексных амплитуд потенциала используются для линеаризации условий (36):

$$\left| \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \tau} \right|^2 \approx E_\infty^2 (1 + 2\alpha \Pi_R \hat{h} e^{i\alpha x + \lambda t}), \quad \left| \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial n} \right|^2 \approx 0, \quad (41)$$

$$\text{Im} \left(\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial n} \frac{\partial \hat{\Phi}^*}{\partial \tau} \right) \approx -iE_\infty^2 \alpha \Pi_I \frac{I_1}{I_0} \hat{h} e^{i\alpha x + \lambda t}.$$

Здесь $\Pi_R = (\Pi + \Pi^*)/2$; $\Pi_I = (\Pi - \Pi^*)/(2i)$. Подставляя выражения (37), (41) в уравнения (29) и условия (33), (36) и линеаризуя эти уравнения и условия, получаем задачу на собственные значения

$$\begin{aligned}\lambda \hat{u} &= -i\alpha \hat{p} + \frac{1}{\text{Re}} \left\{ -\alpha^2 \hat{u} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \right) \right\}, \\ \lambda \hat{v} &= -\hat{p}' + \frac{1}{\text{Re}} \left\{ -\alpha^2 \hat{v} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} y \hat{v} \right) \right\}, \\ i\alpha \hat{u} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} (y \hat{v}) &= 0;\end{aligned}\tag{42}$$

$$\begin{aligned}y = 1: \quad \hat{p} - \frac{2}{\text{Re}} \hat{v}' + (1 - \alpha^2) \hat{h} + \left(1 - \frac{1}{\delta}\right) 2E_\infty^2 \alpha \Pi_R \hat{h} &= 0, \\ \frac{1}{\text{Re}} (\hat{u}' + i\alpha \hat{v}) + \frac{2i\delta}{\Omega} E_\infty^2 \alpha \Pi_I \frac{I_1}{I_0} \hat{h} &= 0, \quad \hat{v} = \lambda \hat{h}.\end{aligned}\tag{43}$$

Вводя функцию тока Стокса ψ :

$$u = \frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

систему (42) сведем к одному уравнению. В терминах возмущений функции тока $\hat{\psi} = iy\hat{v}/\alpha$, $\hat{\psi}' = y\hat{u}$ задача (42), (43) записывается в виде

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - \frac{1}{y} \frac{d}{dy} - \beta^2 \right) \left(\frac{d^2}{dy^2} - \frac{1}{y} \frac{d}{dy} - \alpha^2 \right) \hat{\psi} = 0;\tag{44}$$

$$\begin{aligned}y = 1: \quad -\lambda \hat{\psi}' + \frac{1}{\text{Re}} (\hat{\psi}''' - \hat{\psi}'' + (1 - 3\alpha^2) \hat{\psi}' + 2\alpha^2 \hat{\psi}) + i\alpha(1 - \alpha^2) \hat{h} + 2 \left(1 - \frac{1}{\delta}\right) iE_\infty^2 \alpha^2 \Pi_R \hat{h} &= 0, \\ \frac{1}{\text{Re}} (\hat{\psi}'' - \hat{\psi}' + \alpha^2 \hat{\psi}) + \frac{2i\delta}{\Omega} E_\infty^2 \alpha \Pi_I \frac{I_1}{I_0} \hat{h} &= 0, \quad \alpha \hat{\psi} = i\lambda \hat{h},\end{aligned}\tag{45}$$

где $\beta^2 = \alpha^2 + \lambda \text{Re}$. Общее решение уравнения (44), регулярное при $y = 0$, имеет вид

$$\alpha \neq \beta: \quad \hat{\psi}(y) = i\hat{A}yI_1(\beta y) + i\hat{B}yI_1(\alpha y);\tag{46}$$

$$\alpha = \beta: \quad \hat{\psi}(y) = i\hat{A}y^2I_0(\alpha y) + i\hat{B}yI_1(\alpha y).\tag{47}$$

5. Случай $\alpha \neq \beta$. Асимптотическая устойчивость. Условие $\alpha \neq \beta$ равносильно тому, что $\lambda \neq 0$. Следовательно, в этом случае возмущения могут либо экспоненциально возрастать, либо затухать. Подставляя представление (46) в краевые условия (45) с учетом известных рекуррентных свойств функций Бесселя, получаем линейную однородную систему уравнений относительно неизвестных постоянных \hat{A} , \hat{B} , \hat{h}

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \\ \hat{h} \end{pmatrix} = 0,\tag{48}$$

где

$$\begin{aligned}a_{11} &= 2\alpha^2(I_1(\beta) - \beta I_0(\beta))/\text{Re}, & a_{12} &= -\alpha\lambda I_0(\alpha) + 2\alpha^2(I_1(\alpha) - \alpha I_0(\alpha))/\text{Re}, \\ a_{13} &= \alpha(1 - \alpha^2) + (1 - 1/\delta)2E_\infty^2 \alpha^2 \Pi_R, \\ a_{21} &= (\lambda + 2\alpha^2/\text{Re})I_1(\beta), & a_{22} &= 2\alpha^2 I_1(\alpha)/\text{Re}, & a_{23} &= (2\delta/\Omega)E_\infty^2 \alpha \Pi_I I_1(\alpha)/I_0(\alpha), \\ a_{31} &= \alpha I_1(\beta), & a_{32} &= \alpha I_1(\alpha), & a_{33} &= -\lambda.\end{aligned}$$

Наличие нетривиальных решений системы (48) равносильно выполнению дисперсионного соотношения

$$D(\lambda, \alpha) = \det(a_{ij}) = 0.\tag{49}$$

6. Случай $\alpha = \beta$. Нейтральная устойчивость. При $\lambda \rightarrow 0$ $\beta \rightarrow \alpha$ и первые два столбца дисперсионной матрицы (a_{ij}) становятся линейно зависимыми. При этом дисперсионное соотношение (49) следует заменить соотношением

$$\frac{\partial D}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = 0$$

либо использовать представление (47) для построения новой дисперсионной матрицы.

Задача нейтральной устойчивости имеет вид

$$\frac{2\delta}{\Omega} E_\infty^2 \alpha \Pi_I \left\{ 1 + \alpha \left(\frac{I_1(\alpha)}{I_0(\alpha)} - \frac{I_0(\alpha)}{I_1(\alpha)} \right) \right\} + 2 \left(1 - \frac{1}{\delta} \right) E_\infty^2 \alpha \Pi_R + 1 - \alpha^2 = 0. \quad (50)$$

Число Рейнольдса не входит в (50) в явном виде. Следовательно, нейтральная устойчивость полностью определяется параметрами α , δ , E_∞ , Ω .

Отметим, что при $\Omega = \infty$ (что соответствует $\omega = \infty$) задача нейтральной устойчивости переходит в аналогичную задачу для невязкой жидкости [15]. Таким образом, при больших частотах колебаний вязкость не оказывает влияния на нейтральную устойчивость. Этот эффект можно рассматривать как аналог известного в классической механике эффекта исчезновения трения при высокочастотных колебаниях.

7. Численный анализ дисперсионных соотношений. Внутренним параметром задачи является волновое число возмущения α , внешними — отношение диэлектрических проницаемостей δ , число Рейнольдса Re , напряженность электрического поля E_∞ и параметр $\Omega = \varepsilon^2 \omega Re / (2\Lambda)$, пропорциональный безразмерной частоте колебаний поля ω . Все расчеты проводились для значения $\delta = 24$, соответствующего спирту, использовавшемуся в экспериментах [9]. Результаты расчетов для других значений δ , в частности для значения $\delta = 70$, соответствующего воде, качественно согласуются. Вычисления показывают, что при характерных для микроструй малых числах Рейнольдса движение струи слабо зависит от значения Re . Все расчеты проводились для значения $Re = 0,1$.

Из анализа результатов расчетов по соотношениям (49), (50) следует, что основные характеристики линейной устойчивости существенно зависят от контрольного параметра Ω . Существует два критических значения $\Omega_1 \approx 0,33$ и $\Omega_2 \approx 0,45$, при которых происходит бифуркация показателей линейного роста λ и кривых максимального роста. На рис. 2 представлены зависимости показателей линейного роста от волнового числа возмущений при различных значениях Ω . На рис. 3 показаны соответствующие кривые нейтральной устойчивости в плоскости параметров (α, E_∞) (сплошные линии) и кривые максимального роста (штриховые линии). Бифуркационное значение Ω_1 слабо зависит от числа Рейнольдса. Значение Ω_2 определяется из задачи нейтральной устойчивости.

При $\Omega < \Omega_1$ кривая максимального роста имеет две ветви I и II. Первый максимум при $E_\infty = 0$, возникший на ветви I, исчезает при больших значениях напряженности E_∞ . Таким образом, при достаточно малых и достаточно больших значениях E_∞ показатели линейного роста имеют единственный максимум. При промежуточных значениях напряженности наблюдаются два максимума. Сначала максимум на ветви I больше максимума на ветви II, затем становится меньше его и далее исчезает (см. рис. 3,а). При $\Omega < \Omega_1$ существует интервал волновых чисел, для которого коэффициент максимального роста отсутствует (рис. 4).

При первом критическом значении $\Omega = \Omega_1 \approx 0,33$ ветви I и II кривой максимального роста сливаются в одну (см. рис. 3,б), которая затем вновь распадается на две ветви. Соответствующие показатели максимального роста для ветви I меньше показателей для ветви II (см. рис. 3,в). При $\Omega = \Omega_2$ изменяется характер неустойчивости. Диапазон значений напряженности E_∞ , в котором имели место два интервала неустойчивости, отсутствует.

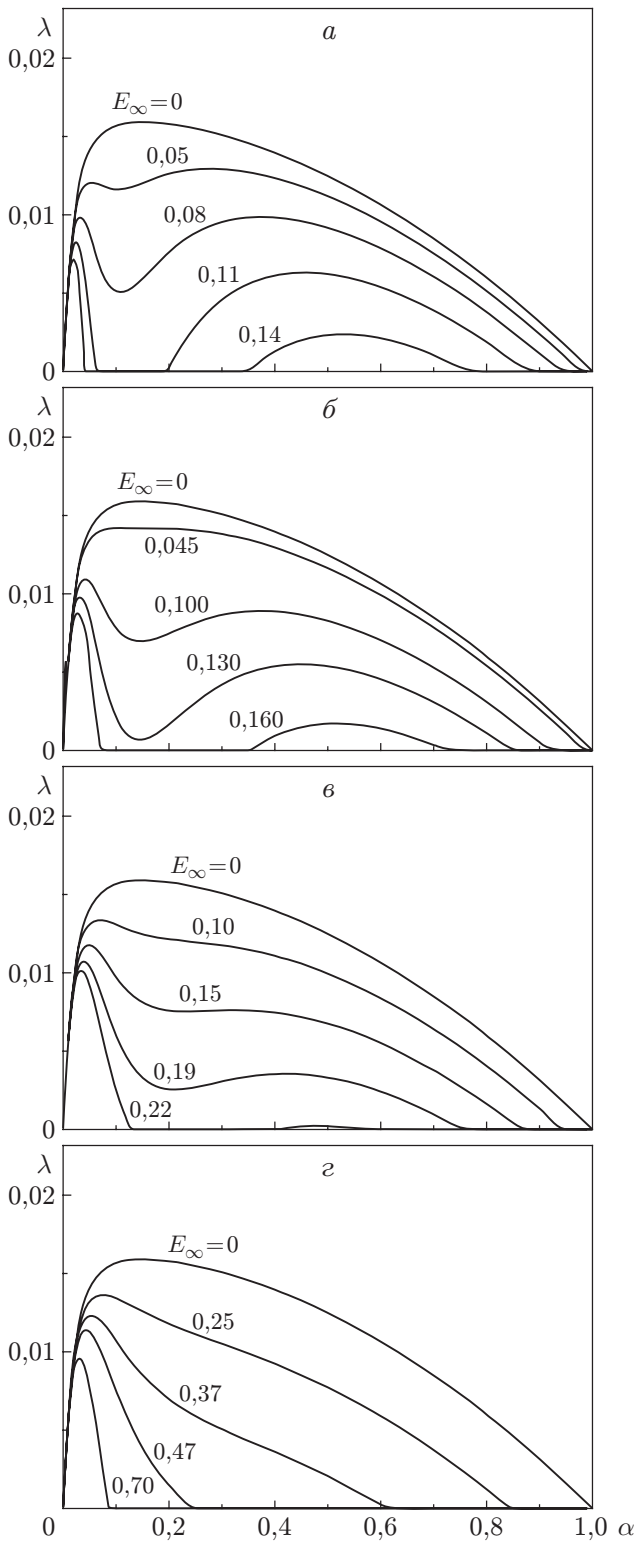


Рис. 2

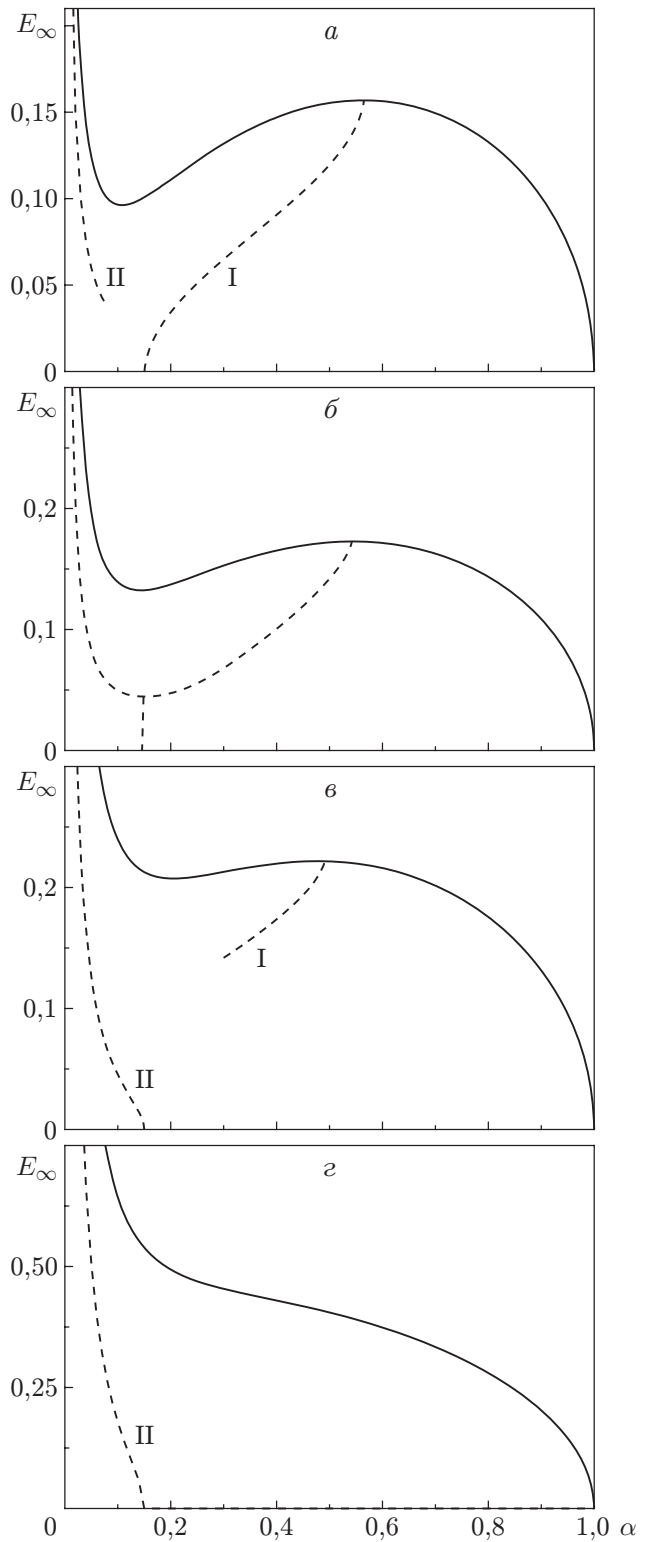


Рис. 3

Рис. 2. Бифуркации показателей линейного роста при $Re = 0,1$:

$a - \Omega = 0,2 (\Omega < \Omega_1)$; $б - \Omega = 0,33 (\Omega = \Omega_1)$; $в - \Omega = 0,4 (\Omega_1 < \Omega < \Omega_2)$; $г - \Omega = 1 (\Omega > \Omega_2)$

Рис. 3. Показатели максимального роста в плоскости (α, E_∞) при $Re = 0,1$:

$a - \Omega = 0,2 (\Omega < \Omega_1)$; $б - \Omega = 0,33 (\Omega = \Omega_1)$; $в - \Omega = 0,4 (\Omega_1 < \Omega < \Omega_2)$; $г - \Omega = 1 (\Omega > \Omega_2)$; сплошные линии — кривые нейтральной устойчивости; штриховые — кривые максимального роста

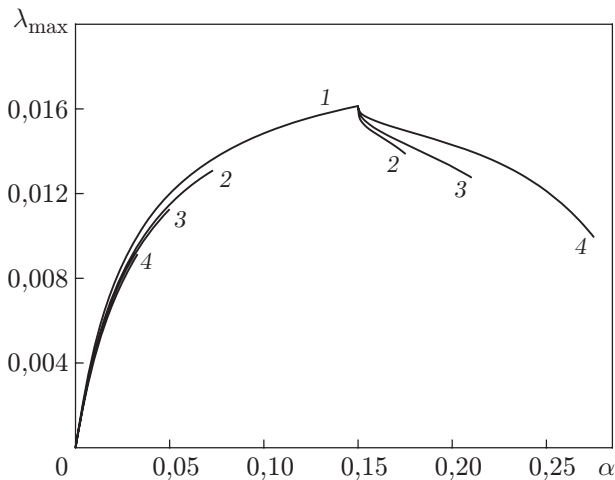


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость показателя максимального роста λ_{\max} от волнового числа возмущений α при различных значениях Ω :

1 — $\Omega = 0,35$; 2 — $\Omega = 0,3$; 3 — $\Omega = 0,25$; 4 — $\Omega = 0,2$

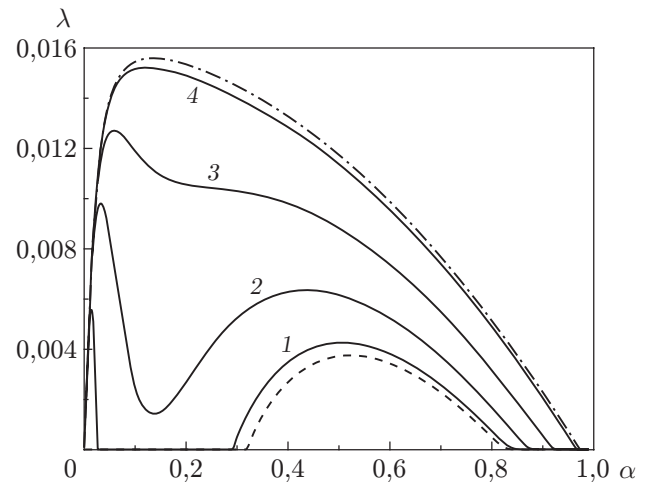


Рис. 5

Рис. 5. Зависимость показателя линейного роста от волнового числа возмущений при $E_{\infty} = 0,35$, $Re = 0,1$ и различных значениях Ω :

1 — $\Omega = 0,2$; 2 — $\Omega = 0,5$; 3 — $\Omega = 1$; 4 — $\Omega = 3$; штриховая линия — $\Omega = 0$; штрихпунктирная — $\Omega = \infty$

При $\Omega > \Omega_2$ и любом значении E_{∞} показатели линейного роста имеют единственный максимум, непрерывно зависящий от E_{∞} . При увеличении E_{∞} зона неустойчивости уменьшается до нуля, а кривая максимального роста имеет единственную непрерывную ветвь (см. рис. 3,2 и рис. 4). Более полное представление о характере зависимости показателей линейного роста от параметра Ω дает рис. 5.

На рис. 6 приведены кривые нейтральной устойчивости в плоскости параметров (α, E_{∞}) при различных значениях Ω . Видно, что внешнее тангенциальное электрическое поле стабилизирует струю. Увеличение напряженности E_{∞} приводит к сужению области неустойчивости, а также к уменьшению коэффициента линейного роста для волновых чисел, при которых возникает неустойчивость. При увеличении частоты колебаний ω наблюдается некоторая дестабилизация струи за счет незначительного сужения области устойчивости в пространстве определяющих параметров, которая, однако, всегда шире, чем в отсутствие электрического поля. Кроме того, из сказанного выше следует, что увеличение частоты колебаний также позволяет полностью подавить недлинноволновую неустойчивость, возникающую при низких частотах (при $\Omega < \Omega_1$).

Заключение. Интерес к исследованию струй жидкости, помещенных во внешнее электрическое поле, обусловлен использованием их в технологических процессах микро- и нанораспыления и при производстве ультратонкого волокна, а также изучением новых типов электрогидродинамических неустойчивостей, которым подвергаются струи [16, 17]. В частности, большое значение имеет случай нестационарного внешнего электрического поля.

В данной работе построена осесимметричная модель, описывающая потерю устойчивости струей жидкости-электролита, помещенного во внешнее осциллирующее электрическое поле, определяемое двумя контрольными параметрами — амплитудой и частотой колебаний. Показано, что в линейном приближении увеличение амплитуды колебаний при-

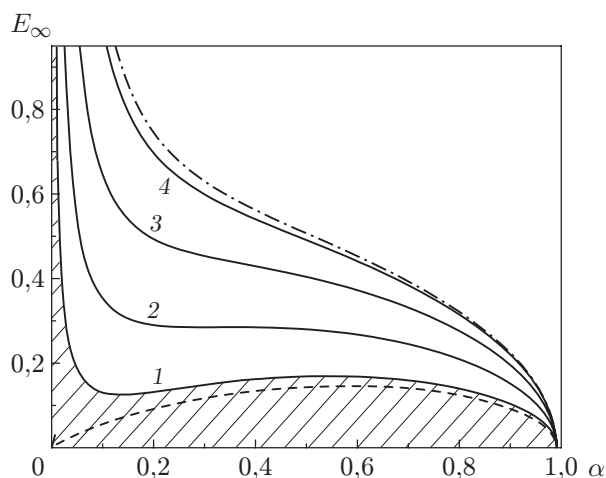


Рис. 6. Зависимость напряженности поля E_∞ от волнового числа возмущений α при различных значениях Ω :
 1 — $\Omega = 0,3$; 2 — $\Omega = 0,45$; 3 — $\Omega = 1$; 4 — $\Omega = 10$; штриховая линия — $\Omega = 0$;
 штрихпунктирная — $\Omega = \infty$; заштрихованная область — область неустойчивости при $\Omega = 0,3$

водит к стабилизации струи, тогда как увеличение частоты приводит к ее незначительной дестабилизации. Исследовано изменение основных характеристик линейной устойчивости в зависимости от внешних параметров задачи. Показано, что в исследуемом диапазоне частот имеется два бифуркационных значения, при достижении которых меняется характер устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рэлей Дж. В. Теория звука. М.: Гостехтеоретиздат, 1955. Т. 1, 2.
2. Шкадов В. Я., Шутов А. А. Устойчивость поверхностно-заряженных вязких струй в электрическом поле // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1996. Т. 33, № 2. С. 29–40.
3. Hohman M. M., Shin M., Rutledge G., Brenner M. P. Electrospinning and electrically forced jets. 1. Stability theory // Phys. Fluids. 2001. V. 13, N 8. P. 2201–2220.
4. Saville D. A. Electrohydrodynamic stability: fluid cylinder in longitudinal electric fields // Phys. Fluids. 1970. V. 13, N 12. P. 2987–2994.
5. Saville D. A. Stability of electrically charged viscous cilinder // Phys. Fluids. 1971. V. 14, N 5. P. 1095–1099.
6. Шкадов В. Я., Маркова М. Р. Нелинейное развитие капиллярных волн в жидкой струе // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1972. № 3. С. 30–34.
7. Zeleny J. The electrical discharge from liquid points, and a hydrostatic method of measuring the electric intensity at their surfaces // Phys. Rev. 1914. V. 3, N 2. P. 69–91.
8. Garcia F. J., Castellanos A. One-dimensional models for slender axisymmetrical viscous liquid jets // Phys. Fluids. 1994. V. 6. P. 2676–2689.
9. Yeo L. Y., Lastochkin D., Wang S.-C., et. al. A new ac electropray mechanism by Maxwell — Wagner polarization and capillary resonance // Phys. Rev. Lett. 2004. N 92. P. 133902.
10. Eggers J. Singularities in droplet pinching with vanishing viscosity // SIAM J. Appl. Math. 2000. V. 60, N 6. P. 1997–2008.

11. **Cherney L. T.** Structure of Taylor cone-jets: limit of low flow rates // J. Fluid Mech. 1999. V. 378. P. 167–196.
12. **Юдович В. И.** Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями. Ч. 2 // Успехи механики. 2006. Т. 4, № 3. С. 75–129.
13. **Демехин Е. А., Шапарь Е. М., Лапченко В. В.** О существовании конусов Тейлора в переменном электрическом поле высокой частоты // Докл. АН. 2006. Т. 406, № 4. С. 476–477.
14. **Gonzales A., Ramos A., Green N. G., et al.** Fluid flow induced by nonuniform AC electric fields in electrolytes on microelectrodes. 2. A linear double-layer analysis // Phys. Rev. E. 2003. V. 61, N 4. P. 4019.
15. **Демехин Е. А., Полянских С. В.** Неустойчивость струи жидкости в переменном электрическом поле высокой частоты // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 5. С. 56–66.
16. **Chang H. C., Demekhin E. A., Kalaidin E. N.** Iterated stretching of viscoelastic jets // Phys. Fluids. 1999. V. 11, N 7. P. 717–737.
17. **Chang H. C.** Complex wave dynamics on thin films / H. C. Chang, E. A. Demekhin. Amsterdam: Elsevier, 2002. (Studies in interface science; V. 14).

Поступила в редакцию 18/II 2009 г.
