

УДК 536.3

**Определение температуры и излучательной способности непрозрачных нагретых тел по спектру теплового излучения: моделирование измерений в спектральном окне**

**С.П. Русин**

*Объединенный институт высоких температур РАН, Москва*

E-mail: sprusin@rambler.ru

Проведено компьютерное моделирование спектра интенсивностей свободно излучающего объекта из тантала. Моделирование измерений происходило в узком спектральном окне, которое передвигалось по спектру с заданным шагом. Таким способом осуществлялся поиск спектральных интервалов, на которых зависимость излучательной способности (или ее логарифма) от длины волны наиболее проста и достаточно точна, в частности, линейна. В случае успешного поиска указанного спектрального интервала искомая температура определялась в спектральном окне по методу наименьших квадратов. Если излучательная способность (или ее логарифм) линейно зависит от длины волны, то возможна альтернативная оценка искомой температуры. В этом случае искомая температура определяется по смене выпуклости спектральной зависимости излучательной способности в процессе подбора ее численной величины от значений меньших, чем величина истинной температуры, до значений больших, чем величина истинной температуры. Этот способ прост, не требует решения системы уравнений и может значительно сузить температурный интервал, к которому принадлежит искомая температура.

**Ключевые слова:** температура, излучательная способность, спектр теплового излучения, спектральное окно.

**ВВЕДЕНИЕ**

Бесконтактные оптические методы определения термодинамической температуры  $T$  непрозрачных нагретых тел в конденсированном состоянии по спектру интенсивностей теплового излучения получают все большее распространение. Это объясняется в частности тем, что по тепловому излучению могут быть зарегистрированы и затем проанализированы быстропротекающие процессы. Кроме того, бесконтактные оптические методы используются, когда контакт с объектом либо недоступен (объект измерения движется относительно регистрирующего прибора, находится на значительном расстоянии и т. п.), либо нежелателен (объект химически агрессивен, радиоактивен, находится под высоким электрическим или магнитным напряжением, контактное взаимодействие искажает величину измеряемой температуры и т. п.). Важно отметить возросшие точность и быстродействие регистрирующих приборов. Так, например, современный спектрометр регистрирует

тепловое излучение объекта при сотнях длин волн за секундные и субсекундные интервалы времени с шагом 0,001–0,005 мкм. Однако по зарегистрированному спектру излучения искомая термодинамическая (истинная) температура  $T$  не может быть определена непосредственно, т. к. во многих случаях спектральная излучательная способность  $\varepsilon(\lambda, T)$  в направлении визирования (здесь и далее опущено обозначение направления визирования) неизвестна и, следовательно, задача физически недоопределена и некорректно поставлена. В настоящее время методы решения некорректных нелинейных задач весьма подробно разработаны и широко используются в вычислительной практике [1,2]. Один из способов доопределить задачу — это предположить, что функция  $\varepsilon(\lambda, T)$  зависит от небольшого числа параметров, которые, вместе с истинной температурой  $T$ , рассчитываются на основании зарегистрированных данных спектра излучения.

Из физических соображений следует, что параметрические модели должны быть такими, чтобы при использовании различных спектральных участков величина рассчитанной температуры была одна и та же, то есть постоянной — это необходимое условие. Если требования по точности воспроизведения результатов выполнены, то в этом случае становится возможным принять эту расчетную температуру  $T_p$  за искоемую термодинамическую температуру объекта, не прибегая к контрольным измерениям с помощью модели черного тела или контактных датчиков.

Существует несколько подходов для реализации этой цели.

Первый — увеличение числа параметров предполагаемой зависимости излучательной способности (модели) места визирования от длины волны излучения [3]. Однако при этом подходе возникают следующие трудности:

1) при большом количестве параметров и наличии погрешностей измерения исходная матрица становится плохо обусловленной, точность определения искомой температуры ухудшается при решении соответствующей системы линейной или нелинейной по параметрам системы уравнений (величина возникающих при этом погрешностей проанализирована в [4, 5]);

2) чем больше параметров имеет модель, тем точнее аппроксимация в экспериментальных точках и тем менее точная аппроксимация в промежуточных точках.

Как известно, наилучшая точность определения истинной температуры  $T$  непрозрачного объекта по зарегистрированному спектру теплового излучения имеет место, когда излучательная способность  $\varepsilon$  и, следовательно,  $\ln \varepsilon$  не зависят от длины волны излучения («серое» излучение). В работе [4] показано, что если  $\varepsilon$  линейно зависит от  $\lambda$ , то при наличии погрешностей измерения, определение  $T$  дает большую точность, чем при аппроксимации  $\varepsilon$  полиномами более высокой степени. Такая же ситуация имеет место и для функции вида  $\ln \varepsilon$ . Однако чтобы обнаружить эти простые зависимости, необходимо осуществить их поиск, и при том успешный, по всему зарегистрированному спектру излучения. Поэтому правомерен второй подход, когда аппроксимация излучательной способности места визирования происходит в узком спектральном интервале (спектральном окне) с помощью простой модели (например, линейной), которая содержит небольшое число параметров. Полагается, что это спектральное окно продвигается по зарегистрированному спектру излучения с определенным шагом. Этот подход во многом аналогичен локальной аппроксимации (как правило, линейной или квадратичной) сложной функции в локальной области изменения аргументов, который широко применяется в вычислительной практике. Недостатком этого метода является то,

что поиск линейного участка зависимости  $\varepsilon(\lambda, T)$  от  $\lambda$  будет успешным только в том случае, когда этот участок действительно существует.

Для поиска участков спектра, в которых излучательная способность линейно зависит от длины волны, возможен и альтернативный подход, основанный не на численном решении линейных или нелинейных систем уравнений, а на анализе формы зависимостей излучательной способности в спектральном окне при различных предполагаемых (или фиктивных) температурах  $T_f$ . Этот эффект изменения выпуклости (вогнутости) упомянутых зависимостей при изменении  $T_f$  от значений меньших  $T$  до значений больших  $T$  на качественном уровне был рассмотрен в работе [6].

В настоящей работе на основании компьютерного моделирования спектра интенсивностей свободно излучающего объекта из тантала показана возможность поиска с помощью узкого спектрального окна такого спектрального участка, на котором излучательная способность  $\varepsilon$  (или  $\ln \varepsilon$ ) площадки визирования линейно зависит от длины волны излучения  $\lambda$ . В случае успешного поиска указанного спектрального интервала искомая температура определялась в спектральном окне по методу наименьших квадратов (МНК). Показано также, что при линейной зависимости излучательной способности  $\varepsilon$  (или  $\ln \varepsilon$ ) от  $\lambda$  возможна альтернативная оценка термодинамической температуры по смене выпуклости (вогнутости) спектральной зависимости излучательной способности в процессе подбора численной величины искомой температуры от значений меньших термодинамической температуры поверхности до значений больших значений термодинамической температуры. Этот подход не требует большого массива данных и решения системы линейной или нелинейной системы уравнений и может значительно сузить температурный интервал, к которому принадлежит искомая температура.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Полагалось, что визируемые поверхностные элементы непрозрачного объекта в процессе регистрации спектра интенсивностей  $I_c(\lambda_i)$  собственного теплового излучения при длинах волн излучения  $\lambda_i$  изотермичны и находятся в состоянии локального термодинамического равновесия при температуре  $T$ . Полагалось также, что в заданном спектральном диапазоне излучательная способность  $\varepsilon(\lambda, T)$  объекта в направлении визирования является непрерывной и монотонной функцией длины волны  $\lambda$ . Среда, разделяющая прибор и объект измерения, прозрачна для излучения.

### 1.1. Исходные системы уравнений

Для зарегистрированного спектра излучения в спектральном интервале  $[\lambda_a, \lambda_b]$ , состоящего из набора интенсивностей  $I_c(\lambda_i)$  собственного излучения при  $m$  длинах волн, можно записать систему из  $m$  нелинейных уравнений с  $m + 1$  неизвестными (неизвестны величины  $\varepsilon(\lambda_i, T)$  и термодинамическая температура  $T$ ):

$$\varepsilon(\lambda_i, T) I_0(\lambda_i, T) = I_c(\lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

где в соответствии с формулой Планка  $I_0(\lambda_i, T) = C_1 / (\lambda_i^5 [\exp(c_2/(\lambda_i T)) - 1])$  — интенсивность черного излучения при длине волны  $\lambda_i$  и термодинамической

температуре  $T$ ,  $C_1$  и  $c_2$  — первая и вторая постоянные излучения соответственно ( $c_2 = 14388$  мкм  $\times$  К).

Полагалось, что интенсивность собственного излучения может определяться экспериментально или непосредственно, или с помощью яркостных температур  $T_{br}(\lambda_i)$ . Тогда  $I_c(\lambda_i) \equiv I_0[T_{br}(\lambda_i)]$ .

Поскольку задача физически недоопределена, то чтобы дополнить определение задачи, как и в работе [7], вводится соотношение связи в виде предположения, что функция  $\varepsilon(\lambda, T)$  при  $T = \text{const}$  зависит от вектора параметров  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , т. е.  $\varepsilon(\lambda, T) \equiv \varepsilon(\lambda, \mathbf{a})$ , причем  $n+1 < m$ . В этом случае задача является корректно поставленной и может быть решена каким-либо численным методом, например, МНК [4].

Система (1) может быть записана в безразмерном виде, если каждое  $i$ -ое уравнение системы почленно разделить на  $C_1/\lambda_i^5$  соответственно. Тогда

$$\varepsilon(\lambda_i, T) / \{ \exp[c_2/(\lambda_i T)] - 1 \} = I_c(\lambda_i) \lambda_i^5 / C_1. \quad (1')$$

Если предположить, что в спектральном диапазоне  $[\lambda_a, \lambda_b]$  справедлива полиномиальная аппроксимация вида

$$\varepsilon(\lambda, T) \cong \sum_{j=1}^n a_j \lambda^{j-1}, \quad (2)$$

то (1') можно записать как

$$\sum_{j=1}^n a_j \lambda_i^{j-1} / \{ \exp[c_2/(\lambda_i T)] - 1 \} = I_c(\lambda_i) \lambda_i^5 / C_1. \quad (3)$$

В настоящей работе была рассмотрена возможность поиска простой, в частности линейной ( $n = 2$ ), зависимости  $\varepsilon(\lambda, T)$  от  $\lambda$  в узком спектральном окне, которое перемещается по зарегистрированному спектру интенсивностей  $I_c(\lambda)$  собственного излучения объекта с определенным, достаточно малым, шагом. Индикатором того, что искомый спектральный интервал найден, являлось постоянство величины искомой температуры на значимом спектральном интервале.

Если зарегистрированные значения  $I_c(\lambda)$  выражены через яркостные температуры  $T_{br}(\lambda_i)$ , то в пределах применимости формулы Вина система (1) в логарифмическом виде может быть записана как

$$c_2/T - \lambda_i \ln[\varepsilon(\lambda_i, T)] = c_2/T_{br}(\lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

В систему (4) искомая температура входит в явном виде. Однако по сравнению с (1) система (4) менее точна и универсальна. Так, в (1) переход от использования формулы Планка к формуле Вина осуществляется простой заменой этих формул. В то же время, при переходе от формулы Вина к формуле Планка в (4) необходимо менять структуру системы уравнений. Вместе с тем, при полиномиальной аппроксимации функции вида

$$\ln[\varepsilon_c(\lambda_i, T)] = \sum_{j=1}^n a_j \lambda_i^{j-1} \quad (5)$$

система (4) линейна относительно искомым неизвестных и может быть решена стандартными численными методами, например, методом наименьших квадратов (МНК).

Если вместо  $\lambda_i$  используется обратная величина  $\nu_i = 1/\lambda_i$ , то система (4) может быть записана в виде

$$\nu_i c_2/T - \ln[\varepsilon(\nu_i, T)] = c_2\nu_i/T_{br}(\nu_i), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4')$$

## 1.2. Об особенностях аппроксимации зависимости $\varepsilon(\lambda, T)$ от $\lambda$

Из термодинамических соображений следует, что при постоянстве температуры  $T$  интенсивность собственного излучения  $I_c(\lambda)$  места визирования в направлении визирования единственным образом можно представить в виде произведения излучательной способности  $\varepsilon(\lambda, T)$  в направлении визирования на функцию Планка  $I_0(\lambda, T)$ . Доказательство этого утверждения следует из единственности функции  $I_c(\lambda)$  и функции Планка при температуре  $T$  площадки визирования, так как площадка визирования может иметь только одно значение термодинамической температуры. Отсюда следует, что функция  $\varepsilon(\lambda, T)$  также имеет единственное представление.

Поскольку функция  $\varepsilon(\lambda, T)$  не известна и представляется приближенно параметрической моделью, то важно знать параметрический вид функции, которая искажает значение искомой термодинамической (истинной) температуры  $T$  и которую, в связи с этим, не следует применять при аппроксимации  $\varepsilon(\lambda, T)$ . Чтобы определить параметрический вид этой функции, полагалось, что вместо истинной температуры  $T$  зафиксирована некоторая предполагаемая (или фиктивная) температура  $T_f$ , отличная от  $T$ . Тогда

$$I_c(\lambda) = \varepsilon(\lambda, T)I_0(\lambda, T) = \varepsilon_f(\lambda, T_f)I_0(\lambda, T_f), \quad (6)$$

где функция  $\varepsilon_f(\lambda, T_f)$  отлична от  $\varepsilon(\lambda, T)$ .

Из (6) следует

$$\varepsilon_f(\lambda, T_f) = \varepsilon(\lambda, T)I_0(\lambda, T)/I_0(\lambda, T_f) = \varepsilon(\lambda, T)f_P(\lambda, T, T_f), \quad (7)$$

где

$$f_P(\lambda, T, T_f) = \frac{\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T_f}\right) - 1}{\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right) - 1} = f_W(\lambda, T, T_f) \alpha, \quad (7')$$

$$f_W(\lambda, T, T_f) = \exp\left[\frac{c_2}{\lambda} \left(\frac{1}{T_f} - \frac{1}{T}\right)\right], \quad \alpha = \frac{1 - \exp\left(-\frac{c_2}{\lambda T_f}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{c_2}{\lambda T}\right)}. \quad (7'')$$

Как правило, отличие  $T_f$  от  $T$  таково, что можно принять  $\alpha \cong 1$  для всех  $T_f$ .

В приближении Вина  $\alpha \equiv 1$  и выражение для  $\varepsilon_f$  на основании (6) запишется как

$$\varepsilon_f(\lambda, T_f) = \varepsilon(\lambda, T) \exp(p/\lambda), \quad (8)$$

где  $p = c_2(1/T_f - 1/T)$ .

Предполагаемая температура  $T_f$  принадлежит некоторому отрезку  $[T_a^f, T_b^f]$ , который может быть определен из условия  $\varepsilon_f < 1$ .

При  $T_f \rightarrow T$  функция  $\varepsilon_f(\lambda, T_f) \rightarrow \varepsilon(\lambda, T)$ .

Отметим важные следствия:

1) наличие в зависимости  $\varepsilon(\lambda, T)$  от  $\lambda$  в качестве сомножителя функции  $f_p(\lambda)$  при использовании функции Планка или функции  $f_W(\lambda)$  при использовании функции Вина является свидетельством того, что данная температура  $T_f$  отличается от термодинамической температуры  $T$ . При  $T_f > T$  функции  $f_p(\lambda)$  и  $f_W(\lambda)$  меньше 1, при  $T_f < T$  функции  $f_p(\lambda)$  и  $f_W(\lambda)$  больше 1. Причем при  $T_f = \text{const}$ , чем короче длина волны  $\lambda$ , тем значительней отличие указанных функций от 1. При  $T_f = T$ ,  $f_p(\lambda) \equiv 1$  и  $f_W(\lambda) \equiv 1$  при всех  $\lambda$ ;

2) параметрическая формула для аппроксимации излучательной способности  $\varepsilon(\lambda, T)$  в качестве сомножителя (или единственного члена) не должна содержать функцию типа  $f_W = \exp(p/\lambda)$ , поскольку такая аппроксимация изменяет искомое значение термодинамической температуры  $T$ .

Для функции  $\varepsilon_f(\lambda, T_f)$  справедливо следующее утверждение. Пусть искомая температура  $T \in [T_f^a, T_f^b]$ , функция  $\varepsilon(\lambda, T)$  монотонна по  $\lambda$ ,  $\alpha \equiv 1$ . Тогда приближенное значение  $T_f^*$  к искомой температуре может быть найдено путем перебора предполагаемых температур  $T_f$  из интервала  $[T_f^a, T_f^b]$  при условии, что на выбранном, достаточно узком, спектральном интервале функция  $\varepsilon(\lambda, T)$  линейно зависит от  $\lambda$ , при этом функция  $\varepsilon_f(\lambda, T_f^-)$  выпукла вниз, а функция  $\varepsilon_f(\lambda, T_f^+)$  выпукла вверх (где  $T_f^- = T_f^* - h_f$ ,  $T_f^+ = T_f^* + h_f$ ,  $h_f$  — шаг по  $T_f$ ).

Доказательство следует из анализа поведения функции  $\varepsilon_f(\lambda, T_f)$ . Как известно, выпуклость (вогнутость) кривой по независимой переменной определяется знаком второй производной по этой переменной. Тогда

$$\begin{aligned} (\varepsilon_f)_\lambda'' &= \{\varepsilon(\lambda, T) \exp(p/\lambda)\}_\lambda'' = \exp(p/\lambda) \{ \varepsilon''(\lambda, T) + \\ &+ p \left[ \frac{p \varepsilon(\lambda, T)}{\lambda^4} + 2 \frac{\varepsilon(\lambda, T) - \varepsilon'(\lambda, T) \lambda}{\lambda^3} \right] \}. \end{aligned} \quad (9)$$

В соответствии с предположением:  $\varepsilon(\lambda, T) = a_1 + a_2\lambda$ ,  $\varepsilon''(\lambda, T) \equiv 0$  и на основании (9) получаем

$$(\varepsilon_f)''_{\lambda} = \exp(p/\lambda) p \left[ \frac{p\varepsilon(\lambda, T)}{\lambda^4} + 2\frac{a_1}{\lambda^3} \right]. \quad (10)$$

Как следует из (10), при изменении  $T_f$  зависимость  $(\varepsilon_f)''_{\lambda}$  проходит через ноль, то есть имеет точку перегиба, при этом  $p = 0$  и, следовательно,  $T_f$  равно искомой температуре  $T$ . Именно интервал изменения  $T_f$ , при котором  $(\varepsilon_f)''_{\lambda}$  проходит через ноль, является предметом поиска при предлагаемом подходе. Вторая точка перегиба при  $(\varepsilon_f)''_{\lambda} = \left[ \frac{p\varepsilon(\lambda, T)}{\lambda^4} + 2\frac{a_1}{\lambda^3} \right] = 0$  в данном случае не представляет интереса, т. к. тогда  $p \neq 0$  и, следовательно,  $T_f \neq T$ .

Этот подход обладает свойством локальности спектрального окна, не требует численного решения линейной или нелинейной системы уравнений и, в принципе, тем точнее, чем меньше шаг по  $\lambda$  и по  $T_f$ .

В ряде случаев удобно рассматривать не саму функцию  $\varepsilon_f(\lambda, T_f)$ , а ее логарифм. Тогда, в соответствии с (7), имеем:

$$\ln \varepsilon_f(\lambda, T_f) = \ln \varepsilon(\lambda, T) + p/\lambda + \ln \alpha. \quad (11)$$

Поскольку  $\alpha \cong 1$ , слагаемое  $\ln \alpha \cong 0$  и им можно пренебречь.

В приближении Вина

$$\ln \varepsilon_f(\lambda, T_f) = \ln \varepsilon(\lambda, T) + p/\lambda. \quad (12)$$

При  $T_f > T$   $p < 0$ , при  $T_f < T$   $p > 0$ , при  $T_f = T$   $p \equiv 0$  для всех  $\lambda$ . Поскольку при линейной зависимости  $\ln \varepsilon(\lambda, T)$  от  $\lambda$  вторая производная  $(\ln \varepsilon_f)''_{\lambda} = 2p/\lambda^3$ , то выпуклость функции  $\ln \varepsilon_f(\lambda, T_f)$  от  $\lambda$  будет меняться при изменении  $T_f$  от значений меньших  $T$  до значений больших  $T$ .

Как следует из (12), параметрическая формула для аппроксимации  $\ln \varepsilon(\lambda, T)$  в качестве слагаемого (или единственного члена) не должна содержать функцию типа  $p/\lambda$ , поскольку такая аппроксимация изменяет искомое значение термодинамической температуры  $T$ .

Из изложенного, в частности, следует правило: при аппроксимации излучательной способности  $\varepsilon(\lambda, T)$  или функции от  $\varepsilon(\lambda, T)$  не должно возникать комплексов, тождественных комплексу, содержащему искомую температуру  $T$ . Это правило справедливо также при использовании систем уравнений (1), (4), (4'). Так, например, для системы (1) при аппроксимации  $\varepsilon(\lambda, T)$  нельзя использовать функцию вида  $\exp(d/\lambda)$  ( $d = \text{const}$ ) в качестве множителя или единственного члена; для системы (4) при аппроксимации  $\ln \varepsilon(\lambda, T)$  нельзя использовать функцию вида  $d/\lambda$

в качестве слагаемого; для системы (4') при аппроксимации  $\ln \varepsilon(\nu, T)$  нельзя использовать функцию вида  $\nu d$  в качестве слагаемого (линейная аппроксимация запрещена).

Отметим, что функции  $f_P(\lambda)$  и  $f_W(\lambda)$  представляют собой отношение двух интенсивностей абсолютно черного тела при двух различных температурах в соответствии с формулами Планка и Вина и не имеют физического смысла.

### 1.3. Определение интервала, к которому принадлежит искомая температура, по выпуклости функции $\varepsilon_f(\lambda, T_f)$ от $\lambda$

Из определения выпуклости линии следует, что зависимость  $\varepsilon_f(\lambda, T_f)$  от  $\lambda$  будет выпукла вверх (или вниз, т. е. вогнута), если на незамкнутом спектральном интервале  $(\lambda_{a,k}, \lambda_{b,k})$  ординаты  $\varepsilon_f(\lambda, T_f)$  больше (или меньше) ординат прямой, соединяющей точки  $\varepsilon_f(\lambda_{a,k}, T_f)$ ,  $\varepsilon_f(\lambda_{b,k}, T_f)$  соответственно. Схематично это проиллюстрировано на рис. 1, где видно, что при изменении предполагаемой температуры от  $T_{f1} < T$  до  $T_{f2} > T$  функция  $\varepsilon_f(\lambda, T_f)$  выпуклая вниз становится функцией выпуклой вверх.

Был использован следующий алгоритм выделения двух соседних линий графика  $\varepsilon_f(\lambda, T_f)$  от  $\lambda$  при изменении  $T_{f,i}$  с шагом  $h_f$  от значений меньших  $T$  до значений больших  $T$  в спектральном окне  $[\lambda_{a,k}, \lambda_{b,k}]$ .

В интервале предполагаемых температур  $[T_f^a, T_f^b]$ , которому по предварительным оценкам принадлежит искомая температура, создавался набор значений  $T_{f,i}$  с постоянным шагом  $h_f$  и набор значений  $\lambda_j$  для  $k$ -го спектрального окна с постоянным шагом  $h_\lambda$ . По соотношению (7) с помощью этих двух наборов вычислялся двумерный набор значений  $\varepsilon_f(\lambda_j, T_{f,i})$ . Графически этот двумерный набор  $\varepsilon_f(\lambda_j, T_{f,i})$  может быть выражен совокупностью линий в спектральном окне для каждого фиксированного значения  $T_{f,i}$ . При этом одна из этих ли-

ний будет наиболее близка к зависимости  $\varepsilon(\lambda, T)$  от  $\lambda$ , т. е. можно видеть приближенный образ искомой зависимости.

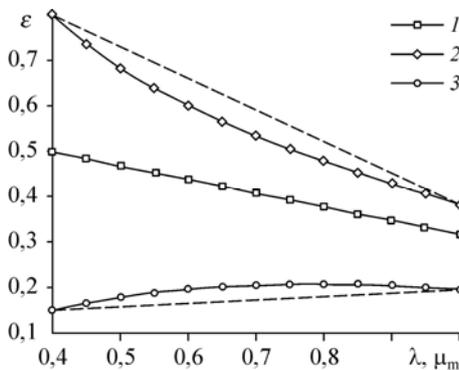


Рис. 1. Зависимости  $\varepsilon_f(\lambda, T_f)$  от  $\lambda$ .

1 —  $T_f = T = 2400\text{ K}$  (выпуклость отсутствует),  
 2 —  $T_{f1} = 2326\text{ K}$  (линия выпукла вниз), 3 —  
 $T_{f2} = 2609\text{ K}$  (линия выпукла вверх). Штриховыми линиями обозначены хорды, которые стягивают концы кривых 2 и 3 соответственно.

Для каждой  $i$ -ой линии  $\varepsilon_f(\lambda_j, T_{f,i})$  определялась ее длина в спектральном окне шириной  $d_{ab}$  по соотношению

$$L_{k,i} = \sum_{j=1}^{n_k} \left\{ (\Delta\varepsilon_{f,j})^2 + h_\lambda^2 \right\}^{1/2}, \quad (13)$$

где  $n_k$  — число разбиений интервала  $[\lambda_{a,k}, \lambda_{b,k}]$ ,  $h_\lambda = (\lambda_{b,k} - \lambda_{a,k})/n_k$ ,  $\Delta\varepsilon_{f,j} = \varepsilon_f(\lambda_j, T_{f,i}) - \varepsilon_f(\lambda_{j+1}, T_{f,i})$ .

Для каждой  $i$ -той линии определялась длина  $D_{k,i}$  прямолинейного отрезка, соединяющего концы этой линии по соотношению

$$D_{k,i} = \left\{ \left[ \varepsilon_f(\lambda_{a,k}, T_{f,i}) - \varepsilon_f(\lambda_{b,k}, T_{f,i}) \right]^2 + (\lambda_{a,k} - \lambda_{b,k})^2 \right\}^{1/2}. \quad (14)$$

Затем вычислялся параметр

$$q_{k,i} = |L_{k,i}/D_{k,i} - 1|, \quad (15)$$

который характеризует отклонение  $i$ -ой линии от прямолинейного отрезка.

Выпуклость (вогнутость)  $i$ -ой линии определялась из сравнения ординаты этой линии с ординатой прямой, соединяющей концы линии при  $\lambda = (\lambda_{a,k} + \lambda_{b,k})/2$ .

После получения значений  $q_{k,i}$  для всего набора  $T_{f,i}$  выбиралось то значение  $q_{\min}$ , которое наименее отклонялось от нуля, то есть от прямолинейной зависимости. При этом  $p_{\min} \approx 0$ ,  $T_f(p_{\min}) \approx T$ , и обе соседние кривые должны сменить выпуклость (вогнутость) на вогнутость (выпуклость).

Спектральное окно передвигалось на шаг  $h_{ab}$  по  $\lambda$  и алгоритм повторялся в новом спектральном окне. Этот процесс происходил до тех пор, пока не был пройден весь зарегистрированный спектр интенсивностей  $I_c(\lambda)$ .

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

В качестве модельного примера был выбран свободно излучающий объект из тантала при термодинамической температуре  $T = 2400$  К. Полагалось, что измерения проводились в направлении нормали к поверхности визирования. Для формирования модельного спектра излучения  $I_c(\lambda) = \varepsilon(\lambda, T = 2400\text{К})I_0(\lambda, T = 2400\text{К})$  использовались табличные данные по излучательной способности тантала, опубликованные в справочнике [8]. С помощью кубических сплайнов эти данные были протабулированы в интервале от 0,4 до 1 мкм с шагом 0,001 мкм. Полученный таким образом набор данных был принят за зарегистрированный спектр излучения объекта (рис. 2).

Спектральное окно шириной  $d_{ab}$  передвигалось по спектру, начиная с какого либо значения  $\lambda$ , с шагом  $h_{ab}$ . При каждом передвижении спектральные координаты начала и конца окна определялась значениями  $a_k$  и  $b_k$  соответственно.

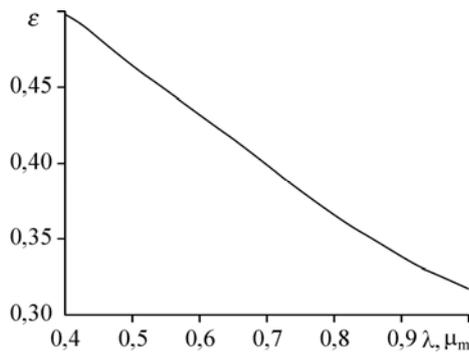


Рис. 2. Зависимость излучательной способности  $\varepsilon(\lambda, T)$  тантала при  $T = 2400$  К от длины волны излучения  $\lambda$  (на основании данных [8]).

Во всех случаях ширина спектрального окна  $d_{ab} = b_k - a_k$  для каждого  $k$ -го положения была постоянной.

### 2.1. Определение искомой температуры в заданном спектральном окне по МНК

Система (3) при  $n = 2$  решалась по МНК (линейное приближение). Использовался вариант МНК, в котором полагалось, что искомые неизвестные положительны. В связи с этим была принята аппроксимация вида  $\varepsilon(\lambda, T = 2400\text{К}) = a_1 - a_2\lambda$ . Вычислительный алгоритм подробно описан в работе [4]. Для каждого значения температуры из заданного набора решалась линейная задача по МНК. Температура, которая дает минимальную невязку для системы (3), принималась за  $T_p$ . Затем, по полученному значению  $T_p$  определялась зависимость  $\varepsilon(\lambda, T)$ , которая сравнивалась с принятой аппроксимацией. По расчетным значениям  $\varepsilon(\lambda, T)$  определялись набор температур для заданных  $\lambda$ , среднее значение и дисперсия набора.

Вычислительный эксперимент был выполнен для ширины спектрального окна  $d_{ab} = 0,05$  мкм, которое передвигалось по спектру с шагом  $h_{ab}$ , шаг по  $\lambda$  внутри окна составлял  $h_\lambda = 0,001$  мкм. Стартовая величина спектральной координаты левого края окна  $a_k = 0,55$  мкм. Искомая расчетная температура  $T_p$  определялась в интервале от 2350 до 2450 К с шагом 1 К. Зависимости температуры  $T_p$  от координаты  $a_k$  для различных значений  $h_{ab}$  представлены на рис. 3,  $a, b$  соответственно.

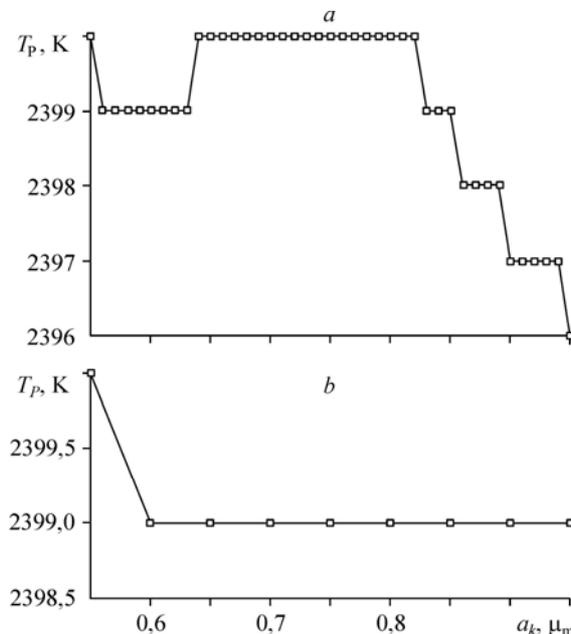


Рис. 3. Зависимость  $T_p$  от  $a_k$  при различной ширине  $d_{ab}$  спектрального окна (расчет по МНК).

$h_{ab} = 0,01$  (a),  $0,05$  (b) мкм.

Как следует из рис. 3, *a*, при  $T = 2400$  К в интервале длин волн от 0,55 до 1 мкм, значения расчетных температур  $T_p$  находятся в интервале 2396–2400 К. Как следует из рис. 3, *b*, при  $h_{ab} = 0,05$  мкм в том же интервале длин волн были получены значения  $T_p$ , равные 2399–2400 К, для всех не перекрывающих друг друга положений спектрального окна. По-видимому, это объясняется удачным попаданием спектрального окна на линейные участки зависимости  $\varepsilon$  от  $\lambda$  и осредняющим действием МНК.

Важно отметить, что при записи формулы Вина в логарифмической форме  $c_2/T_{br}(\lambda) = c_2/T - \lambda \ln \varepsilon(\lambda, T)$  алгоритм поиска спектрального окна, в котором функция  $\ln \varepsilon$  от  $\lambda$  будет постоянной или линейной, выглядит особенно просто. В этом случае при постоянной величине  $\ln \varepsilon$  зависимость  $c_2/T_{br}(\lambda)$  обратных яркостных температур от  $\lambda$  будет линейной, а при линейной зависимости  $\ln \varepsilon$  от  $\lambda$  — квадратичной. Тогда соответствующие спектральные участки для табличной функции  $c_2/T_{br}(\lambda)$  можно определить по постоянству конечных разностей первого и второго порядка соответственно. Для тантала, например, зависимость  $\ln \varepsilon$  будет линейной на спектральном отрезке от 0,55 до 0,65 мкм. В этом случае для определения величины  $T_p$  следует использовать систему уравнений вида (4) и аппроксимацию (5) при  $n = 2$ .

## 2.2. Определение искомой температуры в заданном спектральном окне по выпуклости зависимостей $\varepsilon_f(\lambda, T_f)$ от $\lambda$

*Определение искомого интервала температур по знаку разности  $\Delta \varepsilon_{f,i}$ .*

Для линейной зависимости  $\varepsilon(\lambda, T)$  от  $\lambda$ , как уже отмечалось, интервал, которому принадлежит искомая температура, можно определить по смене выпуклости вниз на выпуклость вверх функции  $\varepsilon_f(\lambda, T_f)$  от  $\lambda$  при изменении  $T_f$  от значений меньших  $T$  до значений больших  $T$ . Выпуклость (вогнутость)  $i$ -ой линии в  $k$ -ом положении спектрального окна определялась по знаку разности  $\Delta \varepsilon_{f,i}$  ординаты этой линии и ординаты хорды, соединяющей концы линии при  $\lambda = (\lambda_{a,k} + \lambda_{b,k})/2$ .

Вычислительный эксперимент был выполнен для спектрального окна, которое передвигалось по спектру с шагом  $h_{ab} = 0,002$  мкм. Шаг по  $\lambda$  внутри окна составлял  $h_\lambda = 0,001$  мкм, ширина окна  $d_{ab} = 0,05$  мкм. Стартовая величина спектральной координаты левого края окна  $a_k = 0,5$  мкм. Искомая температура определялась в интервале значений  $T_{f,i}$  от 2350 до 2450 К с шагом 1 К. За величину расчетной температуры  $T_p$  принималась полусумма значений температур  $T_{f,i}$  двух соседних зависимостей, величины которых  $\Delta \varepsilon_{f,i-1}$  и  $\Delta \varepsilon_{f,i}$  имеют разные знаки. Зависимость температуры  $T_p$  от координаты  $a_k$  представлена на рис. 4.

*Определение искомого интервала температур по наименьшей длине отрезка линии функции  $\varepsilon_{f,i}$  в спектральном окне.*

Исходные данные для вычислительного эксперимента были те же, что и в предыдущем примере, за исключением стартовой величины  $a_k$ , которая равнялась 0,55 мкм.

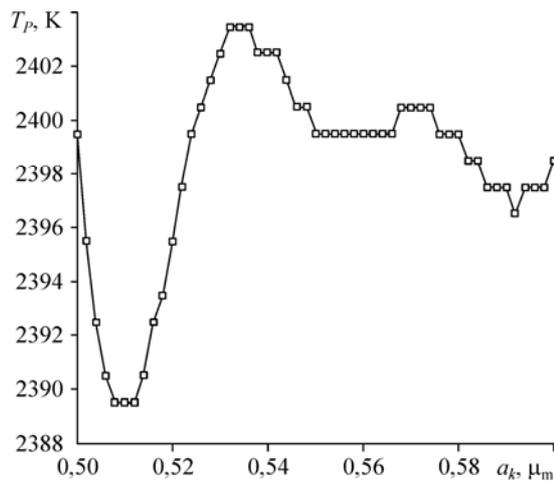


Рис. 4. Зависимость  $T_p$  от  $a_k$ . Ширина спектрального окна  $d_{ab} = 0,05$  мкм, шаг  $h_{ab} = 0,002$  мкм (выбор  $T_p$  при смене знака  $\Delta\varepsilon_{f,i}$ ).

Расчет проводился по алгоритму п. 1.3. Зависимость  $T_p$  от  $a_k$  представлена на рис. 5. Как следует из графиков рис. 3–5, на спектральном интервале от 0,55 до 0,65 мкм излучательная способность тантала  $\varepsilon(\lambda, T)$  линейно зависит от  $\lambda$ . Анализ численных данных графика  $\varepsilon(\lambda, T)$  (см. рис. 2) показал, что в пределах вычислительной погрешности в этом интервале конечные разности первого порядка табличной функции  $\varepsilon(\lambda, T)$  постоянны. Отметим, что определение истинной температуры по выпуклости (вогнутости) зависимости  $\varepsilon_f(\lambda, T_f)$  от  $\lambda$  прост в реализации, однако требует локальной монотонности функции  $\varepsilon_f(\lambda, T_f)$  и, соответственно, предварительного сглаживания экспериментальных данных. Кроме того, точность этого способа ухудшается при увеличении длины волны.

#### ВЫВОДЫ

1. На основании данных вычислительного эксперимента показана целесообразность использования передвигающегося по спектру спектрального окна для поиска спектральных участков, на которых излучательная способность непрозрачного, свободно излучающего объекта моделируется простыми параметрическими

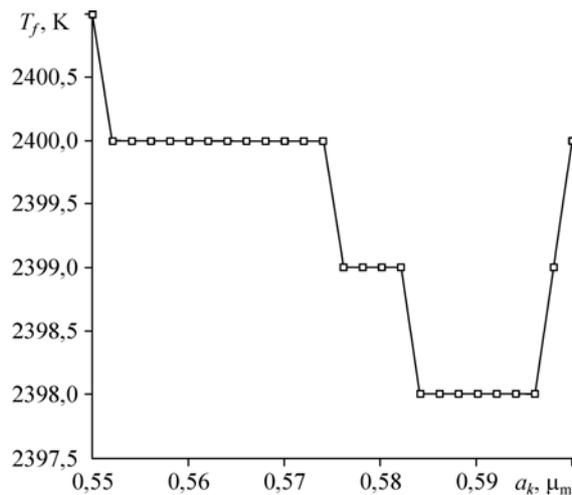


Рис. 5. Зависимость  $T_p$  от  $a_k$ . Ширина спектрального окна  $d_{ab} = 0,05$  мкм, шаг  $h_{ab} = 0,002$  мкм (выбор  $T_p$  по наименьшей длине линии функции  $\varepsilon_{f,i}$  в спектральном окне).

зависимостями. Причем при использовании формулы Вина в логарифмической форме поиск указанных спектральных участков может быть осуществлен наиболее просто с помощью вычисления конечных разностей зависимости обратных яркостных температур от длины волны излучения.

2. При использовании спектрального окна наилучшие результаты по определению истинной температуры объекта показал метод наименьших квадратов, который не требует предварительной обработки экспериментальных данных.

3. Показано, что при линейной зависимости излучательной способности  $\varepsilon$  (или  $\ln\varepsilon$ ) от  $\lambda$  возможна альтернативная оценка термодинамической температуры  $T$  поверхности объекта по смене выпуклости (вогнутости) спектральной зависимости излучательной способности в процессе подбора численной величины искомой температуры от значений меньших  $T$  до значений больших  $T$ . Этот способ прост в реализации, не требует решения линейной или нелинейной системы уравнений и может быть использован для сужения температурного интервала, к которому принадлежит искомая истинная температура.

Работа выполнена по теме Президиума РАН «Теплофизика и механика экстремальных энергетических воздействий и физика сильно сжатого вещества».

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука. Физматлит, 1995. 312 с.
2. Леонов А.С. Решение некорректно поставленных обратных задач: очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. М.: Либроком. 2010. 336 с.
3. Свет Д.Я., Пыркков Ю.Н., Плотниченко В.Г. Определение температуры и спектральной излучательной способности веществ, недоступных для непосредственного контакта // Докл. РАН. 1998. Т. 361, № 5. С. 626–629.
4. Русин С.П. Восстановление истинной температуры нагретого тела по интегроспектральным характеристикам теплового излучения // Теплофизика и аэромеханика. 2006. Т. 13, № 1. С. 129–139.
5. Rusin S.P., Leonov A.S. On the recovery of true temperature from thermal radiation spectrum: computer experiment // Physics of Extreme States of Matter / Ed. by V.E. Fortov etc.; Chernogolovka: Inst. of Problem of Chem. Physics, RAS, 2009. P. 80–82.
6. Русин С.П. Об определении температуры по спектру теплового излучения в системе непрозрачных поверхностей // Теплофизика и аэромеханика. 2001. Т. 8, № 1. С. 115–122.
7. Леонов А.С., Русин С.П. О решении обратной задачи определения температуры по спектру излучения нагретых тел // Теплофизика и аэромеханика. 2001. Т. 8, № 3. С. 475–486.
8. Излучательные свойства твердых материалов: справочник / Под ред. А. Е. Шейндлина. М.: Энергия, 1974. 472 с.

*Статья поступила в редакцию 10 августа 2010 г.*