

УСОВЕРШЕНСТВОВАННАЯ МОДЕЛЬ ТРЕЩИНЫ ГРИФФИТСА

Е. Е. Дерюгин, Г. В. Ласко

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, 634055 Томск

С использованием элементов релаксации определено плосконапряженное состояние сплошной среды с трещиной при растяжении. Проведен анализ напряженного состояния у вершины трещины, окруженной пластически деформированным материалом в виде полосы локализованной пластической деформации (ЛПД) в форме вытянутого эллипса. Пластическая деформация существенно уменьшает концентрацию напряжений в вершине трещины. По мере увеличения локализации пластической деформации напряжения у берегов трещины уменьшаются до нуля. Падение напряжений у вершины трещины сопровождается увеличением концентрации и градиентов напряжений на конце полосы ЛПД. Там область возмущения поля напряжений соизмерима с шириной полосы.

Введение. Инженерные расчеты на прочность и долговечность элементов конструкций нередко основываются на принципах и критериях линейной механики разрушения [1–5]. Критерии рассчитывают с учетом свойств классической модели трещины Гриффитса, несмотря на два существенных ее недостатка. Первый связан с наличием сингулярной точки на конце разреза, приближение к которой обнаруживает неограниченный рост напряжения. В связи с этим в механике разрушения не используется физическое понятие коэффициента концентрации напряжения у вершины трещины, а в качестве характеристики неоднородного поля напряжения наиболее часто употребляется коэффициент интенсивности напряжения в окрестности сингулярной точки. Для того чтобы сформулировать критерий распространения трещины, Гриффитс дополнительно предположил, что образование поверхности трещины связано с затратой энергии. Высвобожденная упругая энергия при увеличении длины трещины должна быть больше затрат на образование новых поверхностей. Добавочную энергию γ , введенную Гриффитсом, нельзя получить из уравнений теории упругости для твердого тела с разрезом, что можно рассматривать как второй принципиальный недостаток теории Гриффитса.

Предположения о нелинейном поведении материала у концов трещины позволили для расчета взять на вооружение ряд известных моделей [2–6]. Однако их применение ограничено. Они справедливы в случае, когда зона пластической деформации чрезвычайно мала по сравнению с длиной трещины. Описание напряженного состояния вблизи вершины трещины с протяженной зоной пластической деформации связано с большими математическими и вычислительными трудностями [2–5].

В данной работе предлагается усовершенствованная модель трещины Гриффитса, которая не имеет указанных недостатков вследствие предположения, что эффективные модули упругости в непосредственной близости от реальной поверхности твердого тела иные, чем в объеме материала, и учета эффектов релаксации (падения напряжения) в зоне пластической деформации. Это позволило характеризовать трещину в твердом теле как дефект со своим полем внутренних напряжений и связать образование свободной поверхности с работой внешних сил.

Построение модели трещины с очагом пластической деформации в сплошной среде и расчет напряженного состояния такой среды производились методом элементов релаксации [7–9]. Для случая плосконапряженного состояния получены аналитические выражения, которые можно использовать для инженерных расчетов концентрации напряжений и получения критериев разрушения в материалах с трещинами и зонами пластической деформации.

1. Учет физической ширины поверхности трещины. Рассмотрим трещину отрыва, ориентированную перпендикулярно оси растяжения, в виде разреза в изотропной сплошной среде. Свободную поверхность разреза представим как слой градиентного материала, в пределах которого модуль Юнга непрерывно изменяется от нуля до значения E_0 в объеме материала. Толщину поверхностного слоя далее будем называть физической шириной поверхности трещины. Толщина слоя должна быть много меньше длины трещины, так как число связей между атомами и, следовательно, силы взаимодействия между ними в реальном поверхностном слое уменьшаются в направлении к внешнему слою атомов [10]. Это можно смоделировать, представляя поверхность в виде тонкого слоя сплошного материала, у которого упругие модули непрерывно уменьшаются до нуля при приближении к границе поверхности.

Известно, что уменьшение модуля упругости в локальной области сплошной среды под внешней нагрузкой приводит к падению напряжения в этой области и росту концентрации напряжений вне данной области в окрестности ее границы. Если в упругодеформирующейся пластине с модулем Юнга E_0 существует локальная область в форме эллипса с модулем Юнга E_1 и центром в начале декартовой системы координат, то можно показать, что внутри эллипса при растяжении усилием σ вдоль малой его полуоси b , направленной по оси y , напряжение равно $\sigma - \Delta\sigma$, где $\Delta\sigma = \sigma(E_0 - E_1)b/(2aE_1 + bE_0)$; $E_0 > E_1$; a — другая полуось эллипса. Дополнительное изменение формы эллипса в результате падения напряжения на величину $\Delta\sigma$ определяется тензором деформации с компонентами [7–9] $\Delta\varepsilon_x = \Delta\sigma/E_0$, $\Delta\varepsilon_y = (1 + 2a/b)\Delta\sigma/E_0$, $\Delta\tau_{xy} = 0$. Заданием E_1 либо $\Delta\sigma$ полностью определяется напряженно-деформированное состояние плоскости под действием напряжения σ . Модуль Юнга E_0 в объеме материала считается заданным.

Вне эллиптической области существует неоднородное поле напряжений. Компоненты тензора напряжений вдоль оси x определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \Delta\sigma \frac{c^2}{(a-b)^2} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2 + b^2}} - 1 - \frac{b^2 x(1 - b/c)}{(x^2 - a^2 + b^2)^{3/2}} \right], \\ \sigma_y &= \sigma - \Delta\sigma + \Delta\sigma \frac{a^2}{(a-b)^2} \left[\frac{b^2}{a^2} + \frac{x(1 - 2b/a)}{\sqrt{x^2 - a^2 + b^2}} + \frac{b^2 x(1 - b/a)}{(x^2 - a^2 + b^2)^{3/2}} \right], \quad \sigma_{xy} = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Заметим, что без однородного поля напряжения $\sigma - \Delta\sigma$ (см. выражение для σ_y) уравнения (1.1) описывают напряженное состояние пластины с эллиптическим вырезом под действием внешнего напряжения $\Delta\sigma$. К такому же результату придем, если вместо отверстия рассматривать область, заполненную материалом с модулем Юнга, стремящимся к нулю ($E_1 \rightarrow 0$). При этом $\Delta\sigma \rightarrow \sigma$, т. е. наблюдается полная релаксация напряжений. Таким образом, уменьшение модуля приводит к эффекту релаксации (падения) напряжения и возникновению неоднородного поля напряжения вокруг области релаксации. Влияние плавного изменения модуля упругости в слое перед границей эллиптического контура на напряженное состояние плоскости будем учитывать методом элементов релаксации [7–9].

Представим трещину в виде эллиптической полости со слоем по контуру, в пределах которого модуль упругости E непрерывно увеличивается от 0 до значения E_0 в объеме материала. На рис. 1 изображены вложенные друг в друга элементы релаксации (ЭР) в виде

эллипса. Предполагается, что вне этого слоя матрица однородна, изотропна и деформируется упруго под действием растягивающего напряжения σ вдоль оси y . Для определенности необходимо охарактеризовать геометрические параметры каждого ЭР из семейства. Кроме того, внутри каждого ЭР из данного семейства надо задать величину элементарного уменьшения напряжения (элементарного тензора релаксации) так, чтобы при внешнем напряжении σ суммарное уменьшение напряжения от всех ЭР уничтожало бы все напряжения во внутренней области (полости).

Сделаем это следующим образом. Примем, что все эллипсы имеют общий центр в начале координат и полуоси, совпадающие с осями координат. Длины полуосей (рис. 1) определим равенствами $a(t) = a_0 + h(1 - t)$, $b(t) = b_0 + h(1 - t)$, где h — толщина слоя, одинаковая вдоль осей x и y ; t — переменная, изменяющаяся от 0 до 1. Изменением толщины слоя в других направлениях пренебрегаем. При $t = 0$ полуоси максимальны. Следовательно, увеличение t соответствует последовательному переходу от внешнего эллипса к границе полости. Конкретное значение t соответствует определенному контуру семейства. При $b_0 \rightarrow 0$ полость превращается в трещину. Предположим, что для трещины $a_0 \gg h$ точка на оси x будет соответствовать контуру ЭР со значением

$$t = 1 - (x - a_0)/h. \quad (1.2)$$

Величину элементарного тензора релаксации для каждого ЭР выразим в виде функции переменной t :

$$d\sigma^r = (\beta + 1)\sigma t^\beta dt, \quad -1 \leq \beta \leq \infty. \quad (1.3)$$

Видно, что параметр β регулирует изменение величины релаксации при непрерывном переходе от контура к контуру. Чем больше t , тем больше величина элементарного тензора релаксации. Для ЭР справедлив принцип суперпозиции, так как суммируются элементарные поля (решения) для напряжений в приближении линейной теории упругости. Коэффициент нормировки $\beta + 1$ обеспечивает внутри полости отсутствие напряжений, поскольку он при интегрировании $d\sigma^r$ от 0 до 1 дает уменьшение напряжения, равное внешнему приложенному напряжению σ . При интегрировании $d\sigma^r$ от 0 до $t = 1 - (x - a_0)/h$ внутри выделенного слоя величина падения напряжения становится тем больше, чем ближе к полости находится точка. Параметр β регулирует скорость изменения данной величины: чем больше β , тем быстрее происходит падение напряжения у границы полости. Так моделируется соответствующее уменьшение эффективных модулей упругости в направлении к границе разреза.

Поскольку между элементарным тензором релаксации внутри и элементарным полем напряжений вне ЭР существует однозначная связь (см. уравнения (1.1)), то заданием с помощью распределения ЭР величины релаксации в локальных областях автоматически определяется и результирующее неоднородное поле напряжений во всей плоскости, в том числе и в слое. В принятой системе координат (рис. 1) для компоненты σ_y элементарного поля напряжений произвольного ЭР вдоль оси x , согласно условиям (1.2) и (1.3), можно записать выражение

$$d\sigma_y = \sigma(\beta + 1)t^\beta \left[\frac{h^2(1-t)^2}{a_0^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - a_0^2}} + \frac{h^2(1-t)^2 \sigma}{(x^2 - a_0^2)^{3/2}} \right] dt. \quad (1.4)$$

Интегрируя выражение (1.4) по переменной t и учитывая, что вне слоя пределы интегрирования берутся от 0 до 1, а в точках, попадающих в слой, от t до 1, где t зависит от координаты точки, согласно определению (1.2), получим уравнение для профиля компоненты σ_y вдоль оси x :

$$\frac{\sigma_y}{\sigma} = \frac{2h^2}{(\beta + 2)(\beta + 3)} \left(\frac{1}{a_0^2} + \frac{x}{(x^2 - a_0^2)^{3/2}} \right) + \frac{x}{\sqrt{x^2 - a_0^2}} = A(x), \quad x \geq a_0 + h \quad \text{и}$$

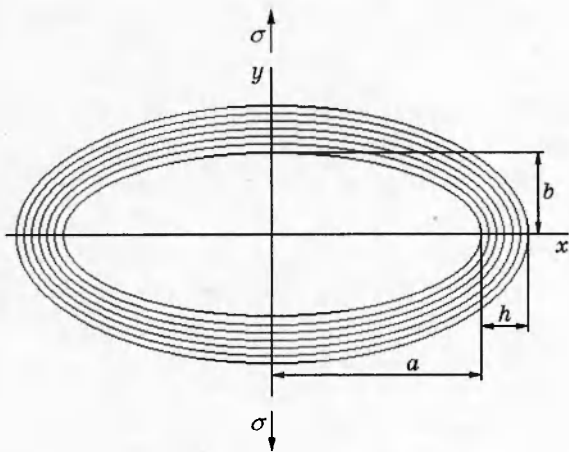


Рис. 1

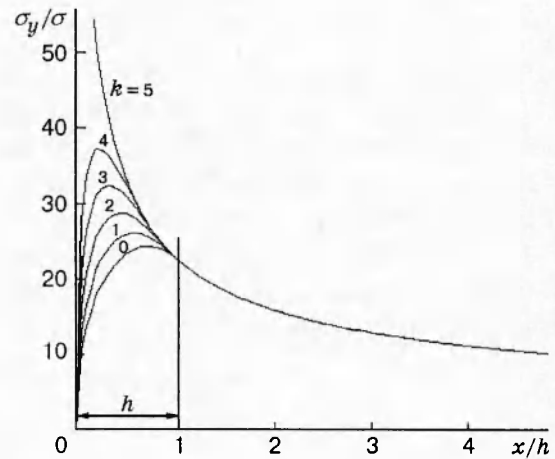


Рис. 2

$$\frac{\sigma_y}{\sigma} = A(x) \left[1 - \left(1 - \frac{x - a_0}{h} \right)^{\beta+1} \right] + \frac{\beta + 1}{\beta + 3} h^2 \left(\frac{1}{a_0^2} + \frac{x}{(x^2 - a_0^2)^{3/2}} \right) \left(\frac{\beta + 4}{\beta + 2} + \frac{x - a_0}{h} \right) \left(1 - \frac{x - a_0}{h} \right), \quad (1.5)$$

если $a_0 \leq x \leq a_0 + h$.

Изменение распределения напряжения σ_y в окрестности трещины, согласно уравнению (1.5), при $\beta = 1,5^k$, $a_0/h = 100^3$ показано на рис. 2. Видно, что в данном случае, в отличие от решения Гриффитса (кривая для $k = 5$), на конце трещины отсутствует сингулярность. В приповерхностном слое напряжение непрерывно увеличивается начиная от нуля на конце разреза, проходит через максимум, затем уменьшается, асимптотически приближаясь к величине внешнего напряжения σ . За пределами слоя качественное и количественное отличие кривых практически исчезает. Увеличение параметра β приводит к росту концентрации напряжения и смещению максимума к границе полости. В пределе при $\beta \rightarrow \infty$ получается кривая Гриффитса. Аналогичный эффект получается при уменьшении физической ширины поверхности h .

Преимущества рассматриваемого варианта очевидны, поскольку сингулярное решение из него вытекает только как частный случай, когда толщина приповерхностного слоя стремится к нулю или когда параметр β стремится к бесконечности. Учет толщины поверхности в виде тонкого слоя позволяет без дополнительных предположений анализировать критерии разрушения хрупких материалов.

2. Критерии распространения трещины в хрупких материалах. Энергетический критерий разрушения. Условия хрупкого разрушения можно формулировать по-разному в зависимости от постановки задачи. Энергетический критерий вытекает из условия, что работа, затрачиваемая внешними силами на увеличение длины трещины, не превышает энергии формирования свободной поверхности трещины. При этом за счет уменьшения упругой энергии твердого тела происходит рост трещины. Энергию образования ЭР можно записать в виде

$$dA = 0,5S(t) d\varepsilon_y d\sigma^r = \pi \sigma^2 [a_0 + h(1 - t)] h (1 - t) (\beta + 1)^2 \left(3 + 2 \frac{a_0}{h(1 - t)} \right) t^\beta dt \frac{t^\beta}{2E_0} dt, \quad (2.1)$$

где $S(t) = \pi [a_0 + h(1 - t)] h (1 - t)$ — площадь эллипса (области релаксации) данного ЭР;

$\dot{a}\varepsilon_y = \frac{\sigma(\beta + 1)}{E_0} \left(3 + 2 \frac{a_0}{h(1-t)} \right) t^\beta at$ — деформация в результате релаксации, одинаковая во всех точках области релаксации ЭР; E_0 — модуль Юнга.

Полная энергия, затрачиваемая на образование трещины с полудлиной a_0 , получится в результате интегрирования дважды по t выражения (2.1) от 0 до 1. При $h \ll a_0$ $A = \pi \sigma^2 a_0^2 / E$. На образование свободной поверхности трещины тратится энергия $A_0 = 4a_0\gamma$. Высвобождение упругой энергии равно $\Delta A = A - A_0$.

Если удлинение трещины сопровождается высвобождением упругой энергии, то выполняется условие $d\Delta A/da \geq 0$. Отсюда находится критическое напряжение разрушения (страгивания трещины):

$$\sigma_{cr} \approx \sqrt{2\gamma E / \pi a_0}, \quad (2.2)$$

которое совпадает с критическим напряжением страгивания трещины по Гриффитсу — Оровану [2–5, 11].

Силовой критерий разрушения. Предложенная модель позволяет сформулировать силовой критерий страгивания трещины следующим образом: разрушение тела с трещиной определенной длины происходит при некотором критическом напряжении σ_{cr} , если концентрация напряжения в окрестности трещины превысит значение теоретической прочности на разрыв, т. е. при условии $\sigma_{y \max} = \sigma_{cr} k_I = \sigma_{\text{теор}}$, где k_I — коэффициент концентрации. Согласно уравнению (1.5) для трещины заданной длины концентрация напряжений определяется значениями двух параметров h и β . Выше отмечалось, что увеличение β приводит к эффекту уменьшения физической ширины поверхности h (см. рис. 2). Следовательно, имеет смысл зафиксировать определенное значение параметра β при заданной ширине h физической поверхности. При $\beta = 0$ градиент модуля Юнга изменяется скачком на границе контакта поверхностного слоя с упругодеформирующейся матрицей. При $\beta > 1$ модуль Юнга изменяется плавно в пределах физической ширины поверхности h . Однако тогда существенно уменьшается эффективная ширина поверхности. Поэтому возьмем значение $\beta = 1$, которое удовлетворяет условию плавного увеличения модуля Юнга в пределах h и к тому же удобно в плане упрощения расчета $\sigma_{y \max}$. При $a_0 \gg h$ и $\beta = 1$ распределение напряжения σ_y вдоль оси x будет определяться формулой

$$\sigma_y = \sigma_{cr} \sqrt{\frac{a_0(x - a_0)}{2h^2} \left(2 - \frac{x - a_0}{h} \right)}. \quad (2.3)$$

Взяв производную $\partial \sigma_y / \partial x$ и приравняв ее к нулю, найдем, что максимум напряжения σ_y соответствует значению $(x - a_0)/h = 2/3$. Подставляя это значение в уравнение (2.3) с учетом величины σ_{cr} , получим при $h = 3d$ теоретическое значение прочности материала на разрыв:

$$\sigma_{\text{теор}} \approx 0,355 \sqrt{\gamma E / \delta}.$$

Здесь δ — межатомное расстояние. Например, для алюминия при $\delta = 4 \cdot 10^{-10}$ м [11], $E = 72$ ГПа [12] и $\gamma = 1,2$ Дж/м² [10, с. 14] значение $\sigma_{\text{теор}} = 5,21$ ГПа $\approx E/13$, что лежит в пределах величин, предсказываемых известными теоретическими моделями [4–6, 13]. Интересно отметить, что получаются вполне разумные значения при физической толщине поверхности в пределах нескольких межатомных расстояний, несмотря на то, что явно атомарную структуру поверхностного слоя мы наделили свойством сплошной среды с переменным модулем Юнга.

Таким образом, в данной модели силовой и энергетической критерии адекватны.

Поле внутренних напряжений трещины. Представим себе, что свободная поверхность трещины сохраняется после снятия внешней нагрузки. Тогда в объеме твердого тела будет существовать определенное поле внутренних напряжений, упругая энергия которого

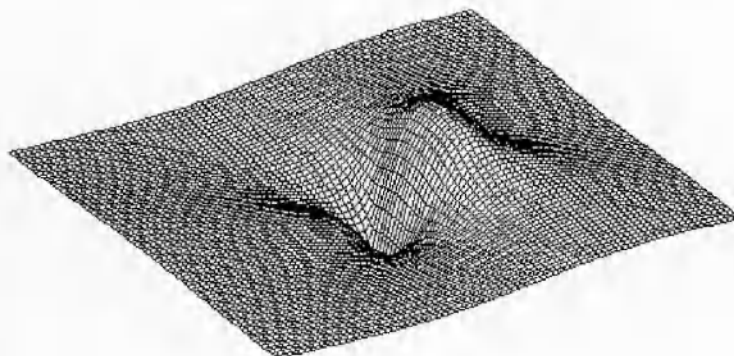


Рис. 3

равна работе внешних сил, затраченных на образование поверхностного слоя. Это поле обусловлено необратимостью дополнительных смещений в приповерхностном слое при нагружении.

Очевидно, что в процессе разгрузки свободные поверхности трещины начинают приходить в контакт по границе разреза. Площадь контакта начиная с кончика трещины постепенно увеличивается. Из общих соображений следует, что при полной разгрузке вдоль линии соприкосновения будет действовать напряжение сжатия, увеличивающееся в направлении к кончику трещины. В окрестности кончика материал испытывал растягивающее усилие, близкое к теоретической прочности, и соответствующие деформации. Если эту деформацию в слое считать необратимой, то из условия равновесия сил следует, что при разгрузке в этой области будут существовать напряжения сжатия практически той же величины.

Если смещения точек поверхностного слоя, вызванные градиентом эффективных модулей упругости, необратимы, то поле внутренних напряжений трещины будет адекватно таковому для прямолинейной полосы локализованной пластической деформации [7, 8] с распределением, удовлетворяющим условию плавного изменения эффективного модуля Юнга от нуля на оси полосы и до значения E_0 на границе с упругодеформирующейся матрицей. На рис. 3 приведено пространственное распределение внутренних напряжений σ_y такого поля при $\beta = 1$. Видно, что поле возмущено лишь у вершины трещины в локальной области, ширина которой соизмерима с шириной поверхностного слоя. Для σ_y в системе координат с началом на кончике трещины получим выражение

$$\sigma_y = 0,5\sigma(\beta + 1) \int_A^1 \frac{h(x - hz)z^{\beta+1}}{(x - hz)^2 + y^2} \left[1 + \frac{h^2 z^2 + 4y^2}{(x - hz)^2 + y^2} - \frac{4a^2 y^2}{((x - hz)^2 + y^2)^2} \right] dz + \\ + \sigma(\beta + 1) \int_0^A z^\beta \left(\frac{x}{hz} - 1 \right) dz.$$

В окрестности кончика трещины внутри круговой области, т. е. при условии $(x - h)^2 + y^2 \leq h^2$, $A = (x^2 + y^2)/2xh$. Вне этой области действует только первый интеграл, у которого $A = 0$.

Распределение напряжений σ_y вдоль оси полубесконечной трещины представлено на рис. 4. Вдоль геометрической линии трещины материал испытывает напряжение сжатия, его максимум приходится на конец разреза. По мере удаления от конца это напряжение быстро уменьшается и асимптотически стремится к нулю. Такая ситуация близка к случаю,

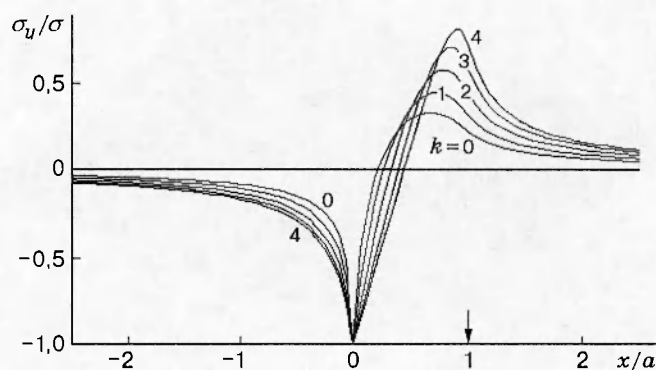


Рис. 4

когда длина трещины намного превышает толщину поверхностного слоя. Наблюдаемые в оптический микроскоп микротрещины в хрупких материалах удовлетворяют этому условию. Поскольку вдали от кончика трещины напряжения близки к нулю, то расхождение берегов трещины начинается практически с самого начала нагружения. При определенном расхождении концентрация напряжения в окрестности кончика становится критической. Следовательно, момент страгивания трещины можно характеризовать еще и геометрическим критерием — критической величиной расхождения берегов трещины. Очевидно, что он однозначно связан с энергетическим (силовым) критерием распространения трещины.

Представим теперь более реальную с физической точки зрения ситуацию, когда изменение формы поверхностного слоя обратимо. Тогда высокие напряжения сжатия при разгрузке будут стремиться захлопнуть трещину по механизму «молния». Эксперименты подтверждают, что в хрупких материалах имеет место залечивание некоторых микротрещин при разгрузке [14]. Для того чтобы трещина осталась в твердом теле после разгрузки, необходимо необратимое изменение рельефа соприкасающихся поверхностей. Как правило, любому локальному разрушению материала предшествует определенная степень пластической деформации. Опыт показывает, что абсолютно хрупких материалов практически нет. Учет пластической деформации значительно изменяет распределение напряжений в окрестности трещины. Проанализируем это влияние.

3. Влияние пластической деформации на концентрацию напряжений в твердом теле с трещиной. Рассмотрим простой случай, когда трещину окружает пластически деформированный материал эллиптической формы. Очаг с гладким полем пластической деформации удобно строить методом элементов релаксации [7–9]. При этом легко варьируются геометрические размеры пластической области и характер распределения пластической деформации в ней. Схема очага пластической деформации вокруг трещины представлена на рис. 5. Сначала строится распределение пластической деформации, обеспечивающее при внешнем напряжении σ_1 полную релаксацию (исчезновение) напряжения внутри эллиптической области, ограниченной контуром трещины с учетом физической ширины поверхности (на рис. 5 выделена жирной линией). Для этого распределения ЭР находится соответствующее поле напряжений. Затем на него накладывают рассмотренное нами решение для трещины (1.5) при внешнем напряжении σ_2 так, чтобы контур поверхностного слоя трещины совпал с границей области полной релаксации в очаге пластической деформации. В результате определится поле напряжений трещины с пластической зоной при внешнем напряжении $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$.

Поле очага пластической деформации строится с помощью элементов релаксации так же, как это делалось для трещины с приповерхностным слоем. Зададим полуоси элементов

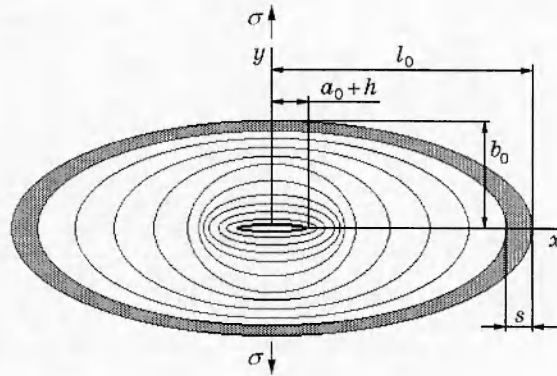


Рис. 5

релаксации, связанных с полем пластической деформации: вдоль оси x это будут полуоси $l = a_0 + h + (l_0 - a_0 - h)(1 - t)$ и вдоль оси y — $b = h + (b_0 - h)(1 - t)$. Здесь $a_0 + h$, как и прежде, длина трещины с учетом физической ширины h ; l_0 — длина пластической зоны вдоль оси x ; b_0 — ширина пластической зоны вдоль оси растяжения. Внутри каждого элемента релаксации зададим величину элементарного тензора релаксации $d\sigma^r = \sigma_1(1 - t)^\gamma dt$ для ЭР в незатрихованной области очага пластической деформации и величину $d\sigma^r = \sigma_1 t^\gamma dt$ для остальных ЭР, контуры которых попадают в приграничную область этого очага шириной s в направлении оси x (см. рис. 5). Произвольный элемент релаксации в заданном распределении создает вне своей области релаксации элементарное поле напряжений. Согласно [8] распределение вдоль оси x компоненты $d\sigma_y$ этого поля описывается выражением

$$d\sigma_y = \frac{l}{l - b} \left[\frac{b^2}{l(l - b)} + \frac{x(l - 2b)}{(l - b)c} + \frac{b^2 x}{c^3} \right] d\sigma^r,$$

где $c = \sqrt{x^2 - (l^2 - b^2)(1 - t)^2}$. Оно связано с существованием однородного элементарного поля пластической деформации $d\epsilon_y^p = d\sigma^r(1 + 2l/b)$ внутри области релаксации данного ЭР.

При $l_0 \gg a_0$, $b_0 \gg h$ можно принять, что отношение полуосей у всех ЭР одинаковое, т. е. равно отношению полуосей очага пластической деформации l_0/b_0 . Получится следующий суммарный результат для компоненты σ_y поля напряжения в плоскости с данным очагом пластической деформации:

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_1} = F(x) = \left[F_1(x) \left(\frac{l_0}{l_0 - s} \right)^{\gamma+1} + F_2(x) \left(\frac{l_0}{s} \right)^{\gamma+1} \right]. \quad (3.1)$$

Здесь

$$F_1(x) = \frac{b_0^2 A^{\gamma+1}}{(l_0 - b_0)^2} + \frac{b_0^2 x l_0 (\gamma + 1)}{l_0 - b_0} \left[\int_{1-A}^1 \frac{(1-t)^\beta}{c} \left(\frac{l_0 - 2b_0}{(l_0 - b_0)b_0^2} - \frac{(1-t)^2}{c^2} \right) dt \right],$$

где

$$A = \begin{cases} 1, & x \geq l_0 - s, \\ x/l_0, & x \leq l_0 - s; \end{cases}$$

$$F_2(x) = \frac{b_0^2 [(s/l_0)^{\gamma+1} - B^{\gamma+1}]}{(l_0 - b_0)^2} + \frac{b_0^2 x l_0 (\gamma + 1)}{l_0 - b_0} \left[\int_B^{s/l_0} \frac{t^\beta}{c} \left(\frac{l_0 - 2b_0}{(l_0 - b_0)b_0^2} - \frac{(1-t)^2}{c^2} \right) dt \right];$$

$$B = \begin{cases} 0, & x \geq l_0, \\ 1 - x/l_0, & x \leq l_0. \end{cases}$$

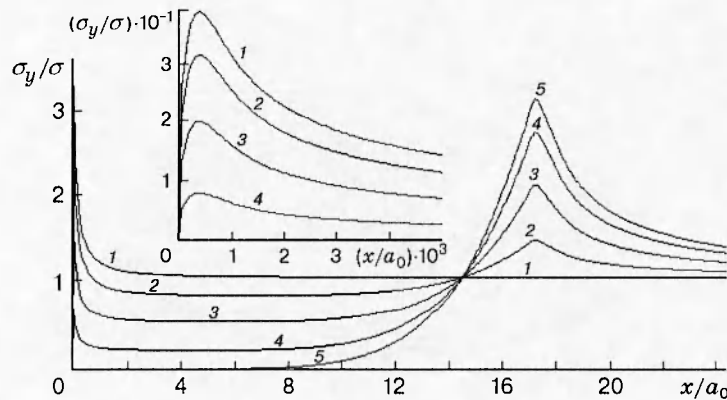


Рис. 6

При $\gamma \geq 1$, $b_0 \gg h$ и $l_0 \gg a_0 + h$, т. е. когда размеры пластической зоны значительно превышают размеры трещины, в окрестности центра очага напряжения будут практически равны нулю. Поэтому к данному решению можно добавить поле напряжений трещины (1.5) при внешнем напряжении σ_2 .

Максимальная величина пластической деформации вблизи трещины будет равна $\varepsilon_y^p = \sigma_1(1 + 2l_0/b_0)/E$, т. е. определяется величиной σ_1 . Поскольку внешнее напряжение при этом равно $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, то увеличение σ_1 при данном напряжении σ автоматически приводит к уменьшению действующего напряжения вблизи трещины.

Таким образом, полное решение запишется в виде суммы $\sigma_y = \sigma_1 F + \sigma_2 H$, где функция F определяется выражением (3.1), а H — выражением (1.5) для трещины с соответствующими подстановками.

На рис. 6 приведены графики распределения напряжения σ_y вдоль оси x в твердом теле с трещиной, окруженной пластической зоной при $\sigma_y/\sigma = 0; 0,2; 0,5; 0,8; 1$ (кривые 1–5 соответственно). Распределение напряжения σ_y у кончика трещины показано в увеличенном масштабе. Как и следовало ожидать, накопление пластической деформации приводит к уменьшению концентрации напряжения у вершины трещины. Расчеты показывают, что одновременно с этим концентрация напряжения растет на конце пластической зоны. Однако максимальная концентрация напряжения в зоне пластической деформации намного меньше максимальной концентрации напряжения у вершины трещины без зоны пластической деформации. В приведенном примере она отличается более чем на порядок. При этом повышенная концентрация у вершины трещины остается значительной до высоких степеней пластической деформации (кривая 4). Следует также отметить, что у вершины трещины градиенты поля напряжения на несколько порядков выше таковых у конца пластической зоны. Отмеченные особенности наглядно демонстрируют отличия микроконцентратора у вершины трещины от концентратора более высокого масштабного уровня, возникающего в зоне пластической деформации.

Увеличение длины пластической зоны при прочих равных условиях не влияет на концентрацию напряжения в вершине трещины. Величина же концентрации у конца зоны пластической деформации зависит от изменения параметров γ и s в уравнениях (3.1). Поскольку это относится к свойству зоны пластической деформации, а не трещины, эта зависимость не рассматривается.

В заключение отметим, что возможна ситуация, когда пластическая деформация может привести к полному подавлению концентратора у вершины трещины (кривая 5 на рис. 6).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00902).

ЛИТЕРАТУРА

1. Хеллан К. Введение в механику разрушения. М.: Мир, 1998.
2. Слепян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1990.
3. Механика разрушения и прочность материалов: Справочное пособие: В 4 т. / Под общей ред. В. В. Панасюка. Киев: Наук. думка, 1988. Т. 1.
4. Разрушение: Сб. науч. тр.: В 7 т. / Под ред. Г. Либовица. М.: Мир, 1973. Т. 1: Микроскопические и макроскопические основы механики разрушения.
5. Разрушение: Сб. науч. тр.: В 7 т. / Под ред. Г. Либовица. М.: Мир, 1975. Т. 2: Математические основы теории разрушения.
6. Владимиров В. И. Физическая природа разрушения. М.: Металлургия, 1984.
7. Дерюгин Е. Е. Метод элементов релаксации в моделях пластической деформации структурно-неоднородных материалов // Изв. вузов. Физика. 1994. № 2. С. 16–22.
8. Дерюгин Е. Е., Ласко Г. В. Метод элементов релаксации в задачах мезомеханики и расчета полосовых структур // Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов: Сб. науч. тр.: В 2 т. / Под ред. В. Е. Панина. Новосибирск: Наука, 1995. Т. 1. С. 131–161.
9. Дерюгин Е. Е. Описание напряженно-деформированного состояния плоскости с макроскопическим очагом пластической деформации. Томск, 1990 (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ТНЦ; № 14).
10. Зенгуил Э. Физика поверхности. М.: Мир, 1990.
11. Физические величины: Справочник / Под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991.
12. Григорович В. К. Металлическая связь и структура металлов. М.: Наука, 1988.
13. Киттель И. Элементарная физика твердого тела. М.: Наука, 1962.
14. Финкель В. М. Портрет трещины. М.: Металлургия, 1989.

*Поступила в редакцию 3/XII 1996 г.,
в окончательном варианте — 16/IV 1997 г.*
