

УДК 539.3

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОНИКАНИЯ И ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КОНИЧЕСКИХ УДАРНИКОВ В ГРУНТОВОЙ СРЕДЕ

В. Г. Баженов\*, А. М. Брагов\*, А. Ю. Константинов<sup>\*,\*\*</sup>, В. Л. Котов\*

\* Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, 603950 Нижний Новгород, Россия

\*\* Государственный научно-исследовательский институт машиностроения им. В. В. Бахирева, 606002 Дзержинск, Россия  
E-mails: bazhenov@mech.unn.ru, bragov@mech.unn.ru, constantinov.al@yandex.ru, vkotov@inbox.ru

Проведен анализ точности известных и новых методов моделирования с использованием гипотез локальности и плоских сечений для решения задач об ударе и плоскопараллельном движении конических тел под углом к свободной поверхности полупространства, занимаемого упругопластической грунтовой средой. На основе решения одномерной задачи о расширении сферической полости определены параметры квадратичной по скорости модели локального взаимодействия. В пренебрежении потоками массы и импульса в окружном направлении с помощью подхода, в котором используется гипотеза плоских сечений, совместно решены осесимметричные задачи для каждого меридионального сечения. Проведено сравнение полученных в рамках модифицированных моделей силовых и кинематических параметров процесса наклонного проникания с данными компьютерного моделирования в трехмерной постановке. Показано, что результаты, полученные с учетом распределения контактных напряжений вдоль образующей заостренного конуса, удовлетворительно согласуются.

**Ключевые слова:** удар, проникание под углом к поверхности, конический ударник, упругопластическая среда, модель локального взаимодействия, трехмерное моделирование, угловая скорость вращения.

**Введение.** Исследование процессов внедрения жестких тел в упругопластические грунтовые среды является сложной задачей, для решения которой применяются экспериментальные и теоретические методы [1–7]. Так, на основе результатов экспериментов [8] верифицируется приближенный метод [9] описания рикошета сферических ударников при их проникании в песчаный грунт. В работах [4, 10–12] предложены модели расчета проникания жестких тел в упругопластическую среду под углом к поверхности. В [13–16] проводится экспериментально-теоретическое исследование удара и проникания тел в мягкий грунт на основе известных моделей грунтовых сред в осесимметричной постановке. При решении задач в пространственной постановке в основном применяются приближенные подходы к моделированию на основе упрощающих гипотез о характере взаимодействия тела и среды.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (грант № НШ-593.2014.8) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13-08-00531.а).

© Баженов В. Г., Брагов А. М., Константинов А. Ю., Котов В. Л., 2015

Задачи об ударе и проникании тел под углом к свободной поверхности решаются, как правило, численно-аналитическими методами [17–31], многие из которых основаны на гипотезе локального взаимодействия [5, 32]. Использование связи контактного напряжения на поверхности тела с его геометрией в модели локального взаимодействия (МЛВ) позволяет определять оптимальные формы проникающих тел и проводить анализ устойчивости их движения. Однако применимость упрощенных моделей взаимодействия исследована недостаточно [5, 32]. Теоретически и экспериментально обоснована применимость квадратичной по скорости МЛВ для определения сил сопротивления внедрению по нормали в мягкий грунт заостренных конических тел [33–37]. В [38, 39] проведен анализ результатов расчетов силовых и кинематических характеристик взаимодействия конических ударников с грунтом при ударе под углом к поверхности, выполненных в рамках МЛВ и в трехмерной постановке. Показано, что квадратичная по скорости МЛВ, удовлетворительно описывающая процесс внедрения конического ударника по нормали к поверхности грунта, применима на начальной стадии проникания и при внедрении под углом к поверхности, но в этом случае погрешность расчетов больше. Для обоснования использования гипотезы плоских сечений при расчете внедрения сферы в грунт под углом к поверхности в [25] применяются результаты трехмерного моделирования. В отличие от предложенных ранее МЛВ при использовании модели [25] существенно повышается достоверность расчета вследствие учета динамики свободной поверхности и кавитационных эффектов отрывного обтекания [27].

В данной работе проводится сравнение результатов расчетов по известным и новым модификациям МЛВ, в которых используются гипотезы локальности и плоских сечений, с результатами трехмерного компьютерного моделирования процесса плоскопараллельного движения конических ударников.

### 1. Постановка задачи о проникании тела под углом к поверхности грунта.

При описании плоскопараллельного движения твердого конического тела рассматривается его сечение плоскостью, проходящей через оси неподвижной прямоугольной системы координат (СК)  $Oxz$ . В начальный момент времени ось  $Oz$  совпадает с осью вращения тела, ось  $Or$  проходит перпендикулярно ей через центр основания конуса, свободная поверхность среды образует с осью  $Or$  угол  $\theta$  (рис. 1). Вводится также подвижная СК  $O'r'z'$ , связанная с телом и совпадающая в начальный момент времени с СК  $Oxz$ .

Уравнения движения и вращения плоской фигуры вокруг центра масс  $C$  в подвижной СК имеют вид [40]

$$M\mathbf{w}_C = M(\dot{\mathbf{v}}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \mathbf{F}, \quad J_C \dot{\boldsymbol{\omega}} = K, \quad (1)$$

где  $M$  — масса тела;  $\mathbf{F}$  — главный вектор действующих на тело сил;  $\mathbf{w}_C$ ,  $\mathbf{v}_C$  — векторы ускорения и скорости центра масс;  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $J_C$ ,  $K$  — вектор угловой скорости вращения, момент инерции и момент сил относительно оси, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через центр масс; точка обозначает дифференцирование по времени.

Векторные величины в (1) проецируются на оси подвижной СК:

$$M(\dot{v}_{Cr'} - \omega v_{Cz'}) = F_{r'}, \quad M(\dot{v}_{Cz'} + \omega v_{Cr'}) = F_{z'}, \quad J_C \dot{\omega} = J_C \ddot{\psi} = K. \quad (2)$$

Здесь  $v_{Cr'}$ ,  $v_{Cz'}$ ,  $F_{r'}$ ,  $F_{z'}$  — проекции векторов  $\mathbf{v}_C$  и  $\mathbf{F}$  на оси подвижной СК  $r'$  и  $z'$ ;  $\omega$  — проекция вектора угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  на ось, перпендикулярную плоскости движения ( $\omega_{r'} = \omega_{z'} = 0$ );  $\psi$  — угол поворота.

Компоненты главного вектора силы  $\mathbf{F}$  и величина момента сил  $K$  в соотношениях (2) определяются путем интегрирования контактных напряжений вдоль боковой поверхности

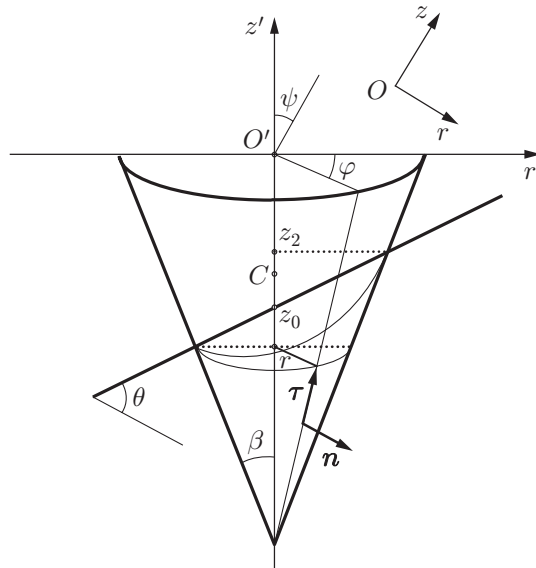


Рис. 1. Постановка задачи о проникании тела под углом к свободной поверхности грунта

конуса, находящейся в данный момент времени в контакте с грунтом:

$$\begin{aligned}
 F_{r'} &= \int_{-H}^{z_2} \int_0^{\varphi_2} p_{r'} \frac{r}{\cos \beta} d\varphi dz', & F_{z'} &= \int_{-H}^{z_2} \int_0^{\varphi_2} p_{z'} \frac{r}{\cos \beta} d\varphi dz', \\
 K &= \int_{-H}^{z_2} \int_0^{\varphi_2} [(r' - r_C) \cos \varphi p_{z'} - (z' - z_C) p_{r'}] \frac{r}{\cos \beta} d\varphi dz'.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь  $r = r(z')$  — радиус окружности, представляющей собой поперечное сечение конуса с полууглом раствора  $\beta$  плоскостью  $z' = \text{const}$ ;  $\varphi$  — угол между осью  $r$  и положительным направлением оси  $r'$ ;  $(r', z')$  и  $(r'_C, z'_C)$  — координаты точки приложения силы и центра масс в подвижной СК (см. рис. 1);  $p_{r'} = p_{r'}(\varphi, z')$  и  $p_{z'} = p_{z'}(\varphi, z')$  — функции, определяющие радиальные и осевые компоненты вектора напряжений в элементе тела, образованном поверхностями  $\varphi = \text{const}$ ,  $z' = \text{const}$ .

Величины  $r(z')$ ,  $\varphi_2$  и  $z_2$  в (3) определяются по формулам [9]

$$r(z') = (H + z') \operatorname{tg} \beta, \quad \varphi_2 = \arccos \frac{z' - z_0}{r(z')} \operatorname{ctg} \theta, \quad z_2 = \frac{z_0 + H \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \theta},$$

где  $z_0$  — координата точки пересечения поверхности среды с осью  $z'$ ;  $\theta$  — угол наклона оси вращения тела вблизи поверхности грунта. Данные формулы применимы при  $z' < 0$ , т. е. до момента полного погружения миделева сечения тела в среду, при  $z' \geq 0$  предполагается  $\varphi_2 = 2\pi$ ,  $z_2 = 0$ .

В дополнение к подвижной СК вводится локальная СК, связанная с боковой поверхностью проникающего тела и образованная вектором внешней нормали  $\mathbf{n}$  и касательным вектором  $\boldsymbol{\tau}$  (см. рис. 1). Компоненты вектора скорости в локальной СК определяются по формулам преобразования компонент вектора скорости  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C)$  при повороте подвижной СК  $O'r'z'$  на угол  $-\beta$ :

$$\begin{bmatrix} v_n \\ v_\tau \end{bmatrix} = B(-\beta) \begin{bmatrix} (v_{Cr'} - \omega(z' - z'_C)) \cos \varphi \\ v_{Cz'} + \omega(r' - r'_C) \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad B(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Здесь  $v_n, v_\tau$  — нормальная и касательная компоненты вектора скорости внедрения в сечении конуса плоскостью  $\varphi = \text{const}$ , проходящей через ось вращения.

Выражения для радиальных и осевых контактных напряжений в формуле (3) при заданном угле  $\varphi$  записываются в виде

$$\begin{bmatrix} p_{r'} \\ p_{z'} \end{bmatrix} = B(\beta) \begin{bmatrix} \sigma_n \cos \varphi \\ \sigma_\tau \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где  $\sigma_n, \sigma_\tau$  — нормальные и касательные напряжения в элементе тела.

Таким образом, движение тела определяется решением задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2) относительно величин  $v_{C_{r'}}, v_{C_{z'}}, \omega, \psi$  при следующих начальных условиях ( $t = 0$ ):

$$v_{C_{r'}} = 0, \quad v_{C_{z'}} = -V_0, \quad \omega = 0, \quad \psi = 0. \quad (6)$$

**2. Определение параметров контакта.** Проведем анализ двух методов определения контактных напряжений: на основе МЛВ и на основе гипотезы плоских сечений. В соответствии с МЛВ предполагается, что нормальное напряжение  $\sigma_n$  в (5) может быть представлено в виде квадратичной зависимости от скорости, а касательное напряжение  $\sigma_\tau$  определяется законом Кулона:

$$\sigma_n / \rho_0 = -H(v_n)(Av_n^2 + Bv_n + C), \quad \sigma_\tau = -\text{sgn } v_\tau k_f |\sigma_n|. \quad (7)$$

Здесь  $H$  — функция Хевисайда;  $A, B, C$  — постоянные коэффициенты, зависящие от физико-механических свойств среды, скорости ударника и других параметров;  $\rho_0$  — начальная плотность среды;  $k_f$  — коэффициент трения. Если  $v_n < 0$ , то  $\sigma_n = 0$ , что соответствует отрыву среды от конического тела. Коэффициенты  $A, B, C$ , входящие в МЛВ (7), рассчитываются методом наименьших квадратов в заданном диапазоне значений скорости расширения сферической полости [33–37, 41].

Начиная с момента полного погружения тела и в случае его безотрывного обтекания потоком среды интегралы (3) для модели (7) вычисляются аналитически. Выражения для компонент вектора силы сопротивления в проекциях на оси подвижной СК и момента сил, входящих в (2), записываются следующим образом [38]:

$$\begin{aligned} F_{r'}/S_0 &= v_{C_{r'}} f_{r'}^0 + \omega f_{r'}^\omega, & F_{z'}/S_0 &= f_{z'}^0 + \omega f_{z'}^\omega, & K/S_0 &= v_{C_{r'}} k^0 + \omega k^\omega, \\ f_{r'}^0 &= \cos^2 \beta \gamma_1, & f_{r'}^\omega &= (H/3 - H \sin^2 \beta + z_C \cos^2 \beta) \gamma_1, \\ f_{z'}^0 &= C - Bv_{C_{z'}} \sin \beta + Av_{C_{z'}}^2 \sin^2 \beta + (1/2)Av_{C_{r'}}^2 \cos^2 \beta, \\ f_{z'}^\omega &= A(\gamma_2 H^2 \omega / 2 + (1/3 - \sin^2 \beta)(\omega z_C + v_{r'})H + \cos^2 \beta(\omega z_C / 2 + v_{C_{r'}})z_C), \end{aligned} \quad (8)$$

$$k^0 = (-2H/3 + (z_C + H) \cos^2 \beta) \gamma_1, \quad k^\omega = (\gamma_2 H^2 - 4z_C H / 3 + 2z_C H \cos^2 \beta + z_C^2 \cos^2 \beta) \gamma_1.$$

Здесь  $\gamma_1 = Av_{C_{z'}} - (1/2)B / \sin \beta$ ;  $\gamma_2 = (1/2) \sin^2 \beta \text{tg}^2 \beta - (1/3) \sin^2 \beta + (1/6) \cos^2 \beta$ ;  $S_0 = \pi R^2$  — площадь основания тела.

Другой подход к решению неосесимметричной задачи о проникании тела в грунт под углом к поверхности основан на гипотезе плоских сечений. В соответствии с известным алгоритмом [25] совместно решается ряд осесимметричных задач, в постановке которых в цилиндрической системе координат  $O'r'z'$  используются сечения ударника и полупространства грунтовой среды плоскостями  $z'O'\varphi$  (см. рис. 1). В каждом сечении  $\varphi_i, i = 0, 1, \dots, N$  свободная поверхность наклонена под углом  $\text{tg } \theta_i = \text{tg } \theta \cos \varphi_i$ , количество этих сечений определяется углом наклона вектора скорости тела к свободной поверхности среды и требуемой точностью решения задачи.

Компоненты главного вектора сил определяются суммированием сил по сечениям:

$$F_{r'} = \frac{1}{2N} \left( F_r^0 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} F_r^i \cos \varphi_i - F_r^N \right), \quad F_{z'} = \frac{1}{2N} \left( F_z^0 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} F_z^i + F_z^N \right) \quad (9)$$

( $F_r^i, F_z^i, i = 0, 1, \dots, N$  — компоненты сил сопротивления внедрению ударника в грунт, полученные из решения  $N + 1$  осесимметричной задачи).

На каждом временном шаге компоненты главного вектора сил и вектора скорости тела рассчитываются независимо (при  $\omega = 0$  в формулах (2), (4)), что оправданно в условиях значительного преобладания осевой компоненты вектора скорости над боковой составляющей, возникающей при несимметричном проникании, например на начальной стадии удара [27].

Для проведения корректного сравнения приближенных методов расчета процессов наклонного проникания в грунт, так же как в [27, 38, 39], принимается упрощенная модель линейно сжимаемой упругопластической среды Мизеса — Шлейхера. В этой модели не учитываются такие особенности динамического деформирования грунтовых сред при ударном воздействии, как необратимая объемная разгрузка, нелинейная сдвиговая деформация и др. Следует отметить, что в такой постановке результаты осесимметричных расчетов процессов удара по нормали к поверхности и проникания с использованием гипотез локальности и (или) плоских сечений [25] оказываются близкими. Таким образом, различия, наблюдаемые при описании процесса проникания под углом к поверхности, не вызваны погрешностями, возникающими при учете свойств среды в рассматриваемых подходах.

На начальном этапе система уравнений (2)–(7) плоскопараллельного инерционного движения твердого тела решается методом Эйлера первого порядка, на стадии глубокого проникания (8) — методом Рунге — Кутты четвертого порядка [38, 39]. Расчеты осесимметричных задач (9) проводятся на основе схемы Годунова первого порядка точности [42, 43] с помощью пакета прикладных программ “Динамика-2” [44], ранее использованного при расчете параметров процессов проникания жестких и деформируемых ударников в мягкие грунтовые среды [13, 14, 34–37].

**3. Результаты численных расчетов.** Для верификации изложенных методик задача о проникании конического ударника в упругопластическую среду была решена также с помощью пакета программ LS-DYNA. Трехмерная постановка задачи и фрагменты расчетных областей приведены в работах [38, 39]. Расчеты проводятся с использованием линейной зависимости предела текучести от давления  $\sigma_T = Y + \kappa p$  при следующих значениях параметров модели: начальная плотность  $\rho_0 = 2000 \text{ кг/м}^3$ , модуль объемного сжатия  $K = 320 \text{ МПа}$ , коэффициент  $Y = 0,5 \text{ МПа}$ , коэффициент  $\kappa = 1$ , начальная скорость удара  $V_0 = 150 \text{ м/с}$ , коэффициент трения  $k_f = 0$ . Значения коэффициентов  $A, B, C$  трехчленной МЛВ (7) определяются на основе решения задачи о расширении сферической полости. При изменении скорости  $v_n$  в диапазоне  $30 \div 100 \text{ м/с}$  эти коэффициенты равны:  $A = 1,2$ ,  $B = 0,95V_0$ ,  $C = 0,034V_0^2$  [39].

Задача о проникании ( $V_0 = 150 \text{ м/с}$ ) конического ударника массой  $M = 40 \text{ г}$  с полууглом раствора  $\beta = \pi/6$  по нормали к поверхности среды является тестовой. Радиус основания конуса  $R = 0,01 \text{ м}$ , высота  $H = R/\text{tg} \beta$ , координаты центра масс  $r_C = 0$ ,  $z_C = -H/4$ , момент инерции  $J_C = (3/80)M(4R^2 + H^2)$ .

Проведено сравнение осевых компонент главного вектора силы сопротивления внедрению конического ударника в неподвижной СК  $Oxz$  (рис. 2). Сила сопротивления, полученная в трехмерных расчетах, имеет осциллирующий характер. Осцилляции наблюдаются в пределах, указанных вертикальными отрезками (на рис. 2 и далее точками показаны средние значения компонент вектора силы). Хорошее согласие результатов, приведенных

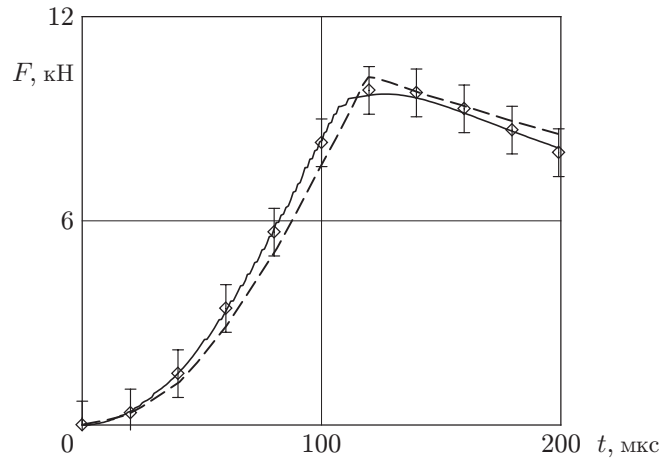


Рис. 2. Зависимость осевой компоненты вектора силы сопротивления от времени при ударе по нормали:  
 точки — результаты расчетов по трехмерной модели, сплошная линия — результаты расчетов в осесимметричной постановке, штриховая линия — результаты расчетов с использованием МЛВ

на рис. 2, свидетельствует о корректном выборе количества элементов расчетной сетки в трехмерных и осесимметричных расчетах, а также параметров квадратичной МЛВ (7).

Также рассмотрена задача о проникании по инерции конуса массой  $M = 40$  г с полууглом раствора  $\beta = \pi/6$  под углом к свободной поверхности грунта  $\theta = \pi/3$ . В начальный момент времени отлична от нуля только осевая компонента вектора скорости:  $V_z = -V_0 = -150$  м/с.

На рис. 3,а приведены зависимости от времени компонент главного вектора силы сопротивления внедрению конического ударника в неподвижной СК *Orz*. Видно, что результаты расчетов по трехмерной модели, модели [25] и МЛВ (7) качественно хорошо согласуются, а для осевой компоненты силы имеет место и количественное соответствие результатов расчетов. На начальной стадии внедрения изменение радиальной компоненты наиболее точно описывается моделью [25] с использованием гипотезы плоских сечений. На стадии глубокого проникания к результатам расчетов по трехмерной модели наиболее близки результаты расчетов по МЛВ (7). Максимум радиальной компоненты силы (по абсолютной величине) достигается раньше, чем максимум осевой компоненты, что качественно соответствует результатам расчетов по указанным моделям.

В рассматриваемом интервале времени угловая скорость вращения имеет два локальных экстремума (рис. 3,б). При этом первый экстремум (минимум) совпадает по времени с экстремумом радиальной компоненты вектора силы, а второй экстремум (максимум) — с максимумом осевой компоненты. Результаты расчетов по обоим моделям близки к результатам расчетов по трехмерной модели лишь на начальной стадии проникания. На стадии глубокого проникания после полного погружения головной части конуса в грунт погрешность значительно возрастает.

**4. Модификации моделей.** Для более достоверного определения угловой скорости вращения конического ударника модель (7) модифицируется. В предположении, что нормальное напряжение зависит от скорости вдоль боковой поверхности тела вращения, сила сопротивления (3) движению с постоянной скоростью  $V_0$  кругового конуса с полууглом

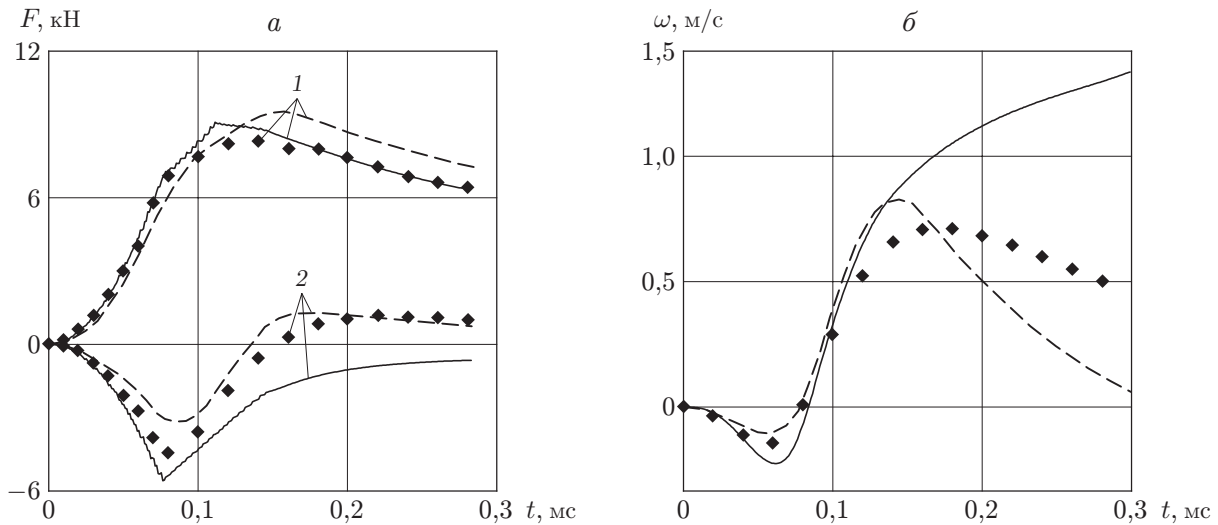


Рис. 3. Зависимости компонент главного вектора силы сопротивления внедрению (а) и угловой скорости (б) конуса от времени при ударе под углом к свободной поверхности грунта:

1 — осевая компонента  $F_z$ , 2 — радиальная компонента  $F_r$ ; точки — результаты расчетов по трехмерной модели, сплошные линии — результаты расчетов по модели [25], штриховые — результаты расчетов по МЛВ (7)

раствора  $\beta$  при  $\omega = 0$  равна

$$F_z = 2\pi \operatorname{tg}^2 \beta \int_{-H}^0 \sigma_n(H+z) dz = \sigma_0 S_0. \quad (10)$$

Здесь  $\sigma_0 = \rho_0(AV_0^2 \sin^2 \beta + BV_0 \sin \beta + C) = \operatorname{const}$  — нормальное напряжение, постоянное вдоль боковой поверхности конуса, определяемое только скоростью его движения и коэффициентами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

Однако то же значение осевой силы сопротивления получается при других распределениях напряжения вдоль контактной поверхности, например при квадратичном распределении:

$$F_z = 2\pi \operatorname{tg}^2 \beta \int_{-H}^0 \hat{\sigma}_n(H+z) dz = \sigma_0 S_0, \quad \hat{\sigma}_n = \left(1 + \delta - 2\delta \left(1 + \frac{z}{H}\right)^2\right) \sigma_n. \quad (11)$$

Таким образом,  $\delta$  является дополнительным параметром, влияющим на угловую скорость вращения.

В работе [37] показано, что при  $\delta \approx 0,5$  распределение напряжений вдоль боковой поверхности заостренного конуса близко к распределению (11). Также отмечается, что при расчете по МЛВ (7) максимумы силы сопротивления при ударе по нормали хорошо согласуются с результатами расчета по трехмерной модели, в то время как контактные напряжения описываются лишь в среднем.

В модифицированной модели [25] с использованием метода малых возмущений аналогично [17] учитывается влияние угловой скорости на контактные давления (5) и скорости (2), (4), а также на компоненты вектора силы (3).

На рис. 4 приведены зависимости угловой скорости вращения конуса от времени при ударе под углом к поверхности грунта, полученные с использованием модифицированной

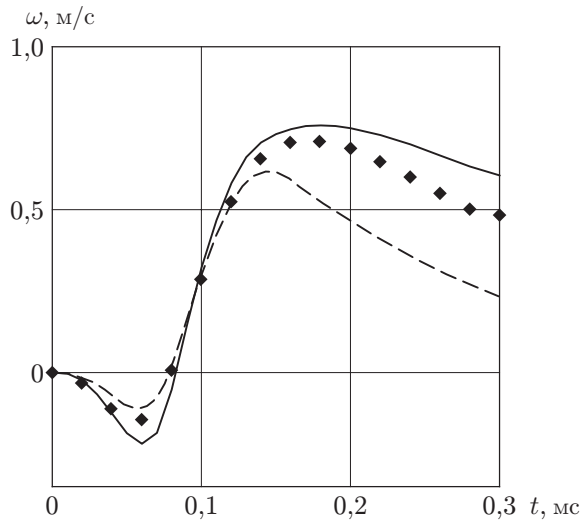


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость угловой скорости вращения конуса от времени при ударе под углом к поверхности грунта:

точки — результаты расчетов по трехмерной модели, сплошная линия — результаты расчетов по модифицированной модели [25], штриховая — результаты расчетов по МЛВ (7), (11)

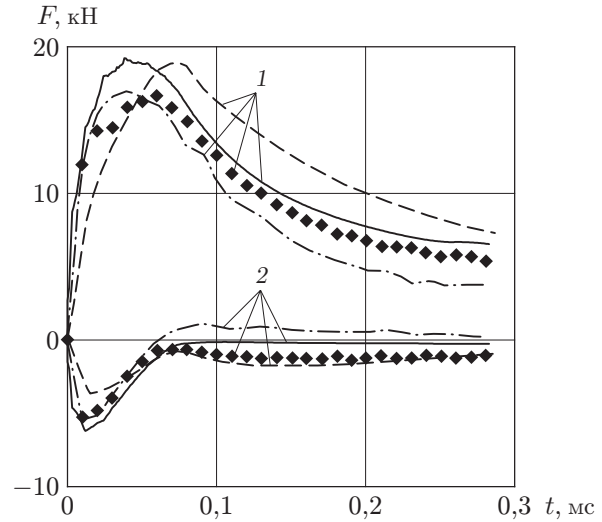


Рис. 5

Рис. 5. Зависимости компонент главного вектора силы сопротивления внедрению конуса ( $\beta = \pi/3$ ) от времени при ударе под углом к поверхности грунта:

1 — осевая компонента  $F_z$ , 2 — радиальная компонента  $F_r$ ; точки — результаты расчетов по трехмерной модели, штриховые линии — результаты расчетов по МЛВ (7), сплошные — результаты расчетов по модели [25], штрихпунктирные — результаты расчетов по модифицированной модели [25] при  $\omega \neq 0$

модели [25] и модели (7), (11) при  $\delta = 0,5$ , а также в результате расчетов по трехмерной модели. Из рис. 4 следует, что наилучшее соответствие решений имеет место на стадии глубокого проникания.

В работах [34–37] показано, что с увеличением угла раствора конуса погрешность расчета силы сопротивления внедрению по нормали с использованием МЛВ увеличивается. Эта закономерность наблюдается и при проникании под углом к поверхности грунта [38, 39].

На рис. 5 представлены зависимости от времени компонент главного вектора силы сопротивления внедрению конического ударника с полууглом раствора  $\beta$  под углом к свободной поверхности грунта  $\theta = \beta = \pi/3$  в СК  $Oxz$ . Следует отметить, что МЛВ (7) качественно описывает поведение сил сопротивления, однако при проникании данного ударника по нормали значения осевых компонент существенно различаются [38]. Кроме того, для затупленных конусов характер распределения напряжений изменяется (см. [1, 16]).

На рис. 6 приведены зависимости угловой скорости и угла поворота конического ударника от времени, полученные в расчетах по трехмерной модели, а также с помощью МЛВ (7), модели [25] и ее модификации при  $\omega \neq 0$ . Метод малых возмущений [17], используемый в модифицированной модели [25] для учета влияния угловой скорости на контактные напряжения, в данном случае неприменим.

**Заключение.** Таким образом, начальная стадия внедрения как затупленных [27], так и заостренных конических ударников в случае, когда движение происходит в основном



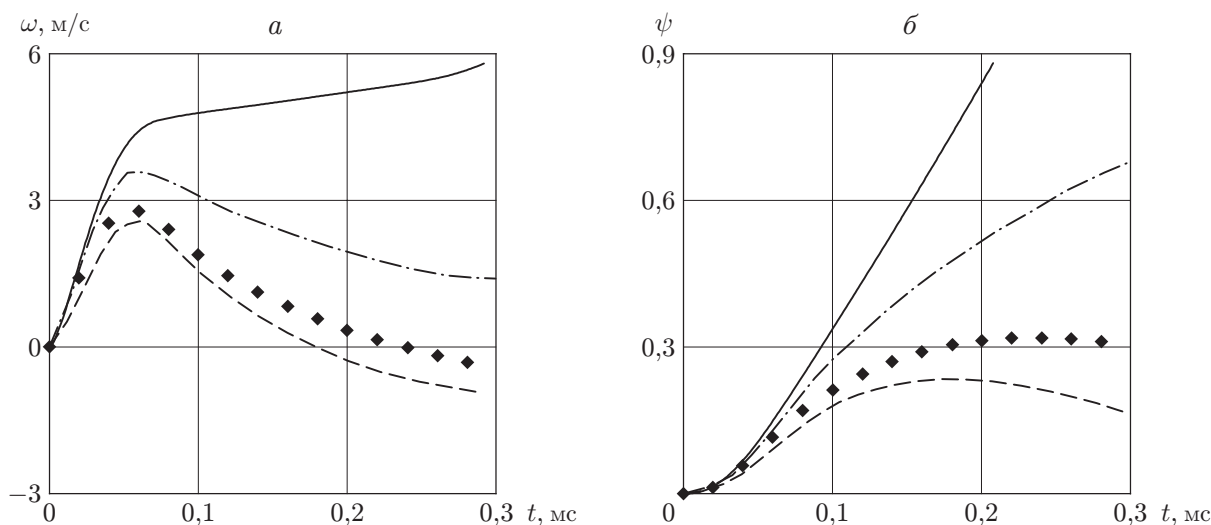


Рис. 6. Зависимости угловой скорости (а) и угла поворота (б) конуса ( $\beta = \pi/3$ ) от времени при ударе под углом к поверхности грунта (обозначения те же, что на рис. 5)

в осевом направлении, а значения угловой скорости достаточно малы (в данной работе  $|\omega R/V_z| < 0,1$ ), более точно описывается модифицированной моделью [25], позволяющей удовлетворительно оценить силы сопротивления и отклонения траекторий тел от первоначального направления движения. Полученные данные можно использовать в качестве начальных условий при расчете конечных глубин проникания на основе МЛВ (7), (8). При больших значениях угловой скорости модель [25] неприменима, а результаты расчетов по МЛВ лишь качественно согласуются с результатами расчетов по трехмерной модели. Во всех случаях необходимо учитывать распределение напряжений вдоль образующей тела.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сагомоян А. Я. Проникание. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1974.
2. Аптуков В. Н. Прикладная теория проникания / В. Н. Аптуков, Р. Т. Мурзакаев, А. В. Фонарев. М.: Наука, 1992.
3. Григорян С. С. Приближенное решение задачи о проникании тела в грунт // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1993. № 4. С. 18–24.
4. Высокоскоростное взаимодействие тел / Под ред. В. М. Фомина. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999.
5. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Ballistic impact: Recent advances in analytical modeling of plate penetration dynamics — a review // Appl. Mech. Rev. 2005. V. 58. P. 355–371.
6. Теоретические и экспериментальные исследования высокоскоростного взаимодействия тел / Под ред. А. В. Герасимова. Томск: Изд-во Том. гос. ун-та, 2007.
7. Баженов В. Г. Математическое моделирование нестационарных процессов удара и проникания осесимметричных тел и идентификация свойств грунтовых сред / В. Г. Баженов, В. Л. Котов. М.: Физматлит, 2011.
8. Бивин Ю. К. Изменение направления движения твердого тела на границе раздела сред // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1981. № 4. С. 105–109.
9. Колесников В. А. Об изменении траектории метеорита при входе в грунт // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1981. № 4. С. 99–104.
10. Бабаков В. А., Шабунин Е. В. Об одном методе расчета пневмопробойника в деформируемой среде // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1987. № 1. С. 105–110.

11. **Roisman I. V., Yarin A. L., Rubin M. B.** Oblique penetration of a rigid projectile into an elastic-plastic target // Intern. J. Impact Engng. 1997. V. 19, N 9/10. P. 769–795.
12. **Roisman I. V., Weber K., Yarin A. L., et al.** Oblique penetration of a rigid projectile into a thick elastic-plastic target: theory and experiment // Intern. J. Impact Engng. 1999. V. 22, N 7. P. 707–726.
13. **Баженов В. Г., Котов В. Л., Крылов С. В. и др.** Экспериментально-теоретический анализ нестационарных процессов взаимодействия деформируемых ударников с грунтовой средой // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 6. С. 190–198.
14. **Баженов В. Г., Брагов А. М., Котов В. Л.** Экспериментально-теоретическое исследование процессов проникания жестких ударников и идентификация свойств грунтовых сред // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 6. С. 115–125.
15. **Велданов В. А., Марков В. А., Пусев В. И. и др.** Расчет проникания недеформируемых ударников в малопрочные преграды с использованием данных пьезоакселерометрии // Журн. техн. физики. 2011. Т. 81, № 7. С. 94–104.
16. **Баженов В. Г., Брагов А. М., Котов В. Л., Кочетков А. В.** Исследование удара и проникания тел вращения в мягкий грунт // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, вып. 4. С. 686–697.
17. **Сагомоян А. Я., Филимонов В. А.** К проблеме наклонного проникания осесимметричного тела в грунт // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1984. № 6. С. 90–93.
18. **Романова С. В., Сагомоян А. Я.** Взаимодействие твердого тела с деформируемой преградой при наклонном соударении // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1989. № 6. С. 38–42.
19. **Деменьшин Д. А., Крылов С. В.** Численное моделирование процессов нормального проникания жестких тел в пористые грунты // Прикл. проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов: Межвуз. сб. Н. Новгород: Нижегород. гос. ун-т, 1991. С. 103–106.
20. **Богданов В. И., Звягин А. В.** Численное исследование пространственного проникания жесткого тела в упругопластическую плиту // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1993. № 4. С. 62–68.
21. **Бобровницкий К. Ю., Симонов И. В.** Осесимметричное и плоское движения жесткого удлиненного ударника при входе в упругопластическую среду с отрывом потока // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1996. № 5. С. 93–98.
22. **Осипенко К. Ю., Симонов И. В.** Модель пространственной динамики тела вращения при взаимодействии с малопрочной средой и несимметричной кавитации // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2002. № 1. С. 143–153.
23. **Велданов В. А., Федоров С. В.** Особенности поведения грунта на границе контакта с недеформируемым ударником при проникании // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 6. С. 116–127.
24. **Баничук Н. В., Иванова С. Ю., Макеев Е. В.** О проникании неосесимметричных тел в твердую деформированную среду и оптимизация их формы // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2008. № 4. С. 176–183.
25. **Баженов В. Г., Котов В. Л.** Решение задач о наклонном проникании осесимметричных ударников в мягкие грунтовые среды на основе гипотезы плоских сечений // Докл. АН. 2008. Т. 423, № 4. С. 470–473.
26. **Осипенко К. Ю.** Проникание тела вращения в упругопластическую среду // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. № 2. С. 169–180.
27. **Баженов В. Г., Котов В. Л.** Решение задач о наклонном проникании осесимметричных ударников в мягкие грунтовые среды на основе моделей локального взаимодействия // Прикл. математика и механика. 2010. Т. 74, вып. 3. С. 391–402.

28. Шамолин М. В. Движение твердого тела в сопротивляющейся среде // Мат. моделирование. 2011. Т. 23, № 12. С. 79–104.
29. Шамолин М. В. Задача о движении тела в сопротивляющейся среде с учетом зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости // Мат. моделирование. 2012. Т. 24, № 10. С. 109–132.
30. Осипенко К. Ю. Об устойчивости пространственного движения тела вращения в упруго-пластической среде // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2012. № 2. С. 68–77.
31. Якунина Г. Е. Особенности высокоскоростного движения тел в плотных средах // Прикл. математика и механика. 2012. Т. 76, вып. 3. С. 429–449.
32. Ven-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Shape optimization of high-speed penetrators: a review // Central Eur. J. Engng. 2012. N 2. P. 473–482.
33. Котов В. Л. Исследование применимости автомоделного решения задачи о расширении сферической полости в сжимаемой среде для определения давления на поверхности контакта “ударник — грунт” // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Н. Новгород: Нижегород. гос. ун-т, 2008. Вып. 70. С. 123–131.
34. Котов В. Л., Баландин В. В., Линник Е. Ю., Баландин В. В. О применимости модели локального взаимодействия для определения сил сопротивления внедрению сферы в нелинейно-сжимаемый грунт // Вычисл. механика сплошных сред. 2012. Т. 5, № 4. С. 135–142.
35. Котов В. Л., Баландин В. В., Брагов А. М. и др. Применение модели локального взаимодействия для определения силы сопротивления внедрению ударников в песчаный грунт // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 4. С. 114–125.
36. Баженов В. Г., Котов В. Л., Линник Е. Ю. О моделях расчета форм осесимметричных тел минимального сопротивления при движении в грунтовых средах // Докл. АН. 2013. Т. 449, № 2. С. 156–159.
37. Баженов В. Г., Баландин В. В., Григорян С. С., Котов В. Л. Анализ моделей расчета движения тел вращения минимального сопротивления в грунтовых средах // Прикл. математика и механика. 2014. Т. 78, вып. 1. С. 98–115.
38. Котов В. Л., Константинов А. Ю., Кибец Ю. И. и др. Численное моделирование плоскопараллельного движения конических ударников в упругопластической среде // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Н. Новгород: Нижегород. гос. ун-т, 2013. Вып. 75. С. 47–55.
39. Котов В. Л., Константинов А. Ю. Численное моделирование плоскопараллельного движения конических ударников в грунтовой среде на основе модели локального взаимодействия // Вычисл. механика сплошных сред. 2014. Т. 7, № 3. С. 225–233.
40. Лойцянский Л. Г. Курс теоретической механики. Т. 2 / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. М.: Наука, 1983.
41. Forrestal M. J., Luk V. K. Dynamic spherical cavity-expansion in a compressible elastic-plastic solid // J. Appl. Mech. 1988. V. 55, N 2. P. 275–279.
42. Абузяров М. Х., Баженов В. Г., Котов В. Л. и др. Метод распада разрывов в динамике упругопластических сред // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40, № 6. С. 940–953.
43. Баженов В. Г., Котов В. Л. Модификация численной схемы Годунова для решения задач импульсного нагружения мягких грунтов // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 4. С. 139–149.
44. Баженов В. Г., Зефирова С. В., Кочетков А. В. и др. Пакет программ “Динамика-2” для решения плоских и осесимметричных нелинейных задач нестационарного взаимодействия конструкций со сжимаемыми средами // Мат. моделирование. 2000. Т. 12, № 6. С. 67–72.