ПМТФ, № 3, 1962

ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕРМИЧЕСКИ НЕРАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЫ

В. М. Сарычев

(Новосибирск)

Рассматривается одномерное стационарное течение в канале двухкомпонентной термически неравновесной плазмы при отсутствии внешних электрического и магнитного полей. Показывается, что движение плазмы в целом подобно движению обычного газа с молекулярным весом, равным молекулярному весу ионов плазмы, и температурой, равной сумме температур электронной и ионной компонент плазмы. Решается задача о движении плазмы в двух частных случаях: а) течение в канале постоянного сечения и б) течение при постоянной вдоль канала температуре ионной компоненты плазмы.

В не очень плотной плазме, находящейся в электрическом поле, электроны имеют большие длины свободных пробегов и получают от поля большую энергию. Передача энергии от электронов к ионам затруднена вследствие малой массы электронов. В результате энергия электронов может значительно превышать энергию ионов.

Времена установления максвелловского распределения для электронов и ионов гораздо короче времен выравнивания температур между электронами и ионами. Это позволяет рассматривать такую плазму как смесь электронного и ионного газов, имеющих различные температуры (см., например, [1]). Ниже такая плазма называется термически неравновесной.

В работе [2] был описан эффект ускорения холодных ионов при термическом расширении горячего электронного газа, обнаруженный в электрической ударной трубе. Ниже аналогичное явление рассмотрено в случае стационарного течения.

1. Общие закономерности движения термически неравновесной плазмы. Рассмотрим одномерное стационарное движение идеальной термически неравновесной квазинейтральной плазмы, состоящей из однократных положительных атомных ионов одного вида и электронов в канале с непроводящими стенками при отсутствии внешних электрического и магнитного полей.

Если нет источников и стоков заряженных частиц, то из условий квазинейтральности плазмы и стационарности движения

$$n_e = n_i \equiv n, \qquad n_e u_e = n_i u_i$$

вытекает равенство скоростей обеих компонент плазмы в каждом сечении канала

$$u_e = u_i \equiv u$$

Здесь n и u — концентрация и средняя направленная скорость частиц, индексы e и i относятся соответственно к электронной и ионной компонентам плазмы.

Уравнения сохранения числа частиц, состояния, импульса и энергии для каждой компоненты плазмы в этом случае можно записать в таком виде:

$$nuS = \text{const}, \qquad p_\varepsilon = nkT_\varepsilon, \qquad nm_\varepsilon u \frac{du}{dx} = ne_\varepsilon E - \frac{dp_\varepsilon}{dx}$$

$$nu \frac{d}{dx}\left(\frac{m_\varepsilon}{2} u^2 + \frac{3}{2} kT_\varepsilon\right) = ne_\varepsilon Eu - \frac{1}{S}\frac{d}{dx}(p_\varepsilon uS) - n\nu_{\varepsilon\zeta}\varkappa_{\varepsilon\zeta}\frac{3}{2}k(T_\varepsilon - T_\zeta) \quad (1.1)$$

Здесь m_ε и e_ε — соответственно масса и заряд частиц, p_ε и T_ε — парциальное давление и температура ε-компоненты плазмы, k — постоянная Больцмана, E — напряженность электрического поля, образованного разделением зарядов в плазме за счет неэлектрических сил, S — площадь поперечного сечения канала, $\nu_{\varepsilon\zeta}\varkappa_{\varepsilon\zeta}$ — средняя относительная доля энергии, передаваемая частицей с индексом ε частицам индекса ζ за единицу времени [3].

Легко видеть, что

$$\nu_{\varepsilon\zeta}\varkappa_{\varepsilon\zeta} = \nu_{\zeta\varepsilon}\varkappa_{\zeta\varepsilon}$$

Так как величина

$$\rho R = nk \qquad (\rho = nm_i, \quad R = k / m_i)$$

не зависит от вида частиц газа, то уравнения (1.1) можно представить в виде

$$\rho u S = \rho_0 u_0 S_0, \qquad p_\varepsilon = \rho R T_\varepsilon, \qquad \frac{m_\varepsilon}{m_i}\rho u \frac{du}{dx} = \frac{e_\varepsilon}{m_i}\rho E - \frac{dp_\varepsilon}{dx} \tag{1.2}$$

$$\rho u \frac{d}{dx}\left(\frac{m_\varepsilon}{m_i}\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}RT_\varepsilon\right) = \rho\frac{e_\varepsilon}{m_i}Eu - \rho\nu_{\varepsilon\zeta}\varkappa_{\varepsilon\zeta}\frac{R}{\gamma-1}(T_\varepsilon - T_\zeta)$$

Здесь $\gamma = c_p / c_v$ — отношение удельных теплоемкостей (в рассматриваемом случае $\gamma = 5/3$).

Четвертое уравнение (1.2) — уравнение энергии — можно преобразовать при помощи первого и третьего уравнений (1.2) к виду

$$\rho u \frac{\gamma}{\gamma-1}R\frac{dT_\varepsilon}{dx} = u\frac{dp_\varepsilon}{dx} - \rho\nu_{\varepsilon\zeta}\varkappa_{\varepsilon\zeta}\frac{R}{\gamma-1}(T_\varepsilon - T_\zeta) \tag{1.3}$$

Производя суммирование по обеим компонентам плазмы и пренебрегая массой электрона по сравнению с массой иона, получим систему уравнений для плазмы в целом

$$\rho u S = \rho_0 u_0 S_0, \qquad p = p_e + p_i = \rho R(T_e + T_i) \tag{1.4}$$

$$\rho u\frac{du}{dx} + \frac{dp}{dx} = 0, \qquad \rho\frac{\gamma}{\gamma-1}R\frac{d}{dx}(T_e + T_i) = \frac{dp}{dx}$$

Интегрируя третье и четвертое уравнения (1.4) с учетом второго уравнения (1.4), получим

$$\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}R(T_e + T_i) = \frac{u_0^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}R(T_{e0} + T_{i0}), \qquad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T_e + T_i}{T_{e0} + T_{i0}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{1.5}$$

Из вида уравнений (1.4) следует, что стационарное движение квазинейтральной двухкомпонентной термически неравновесной плазмы подобно движению обычного газа с молекулярным весом, равным молекулярному весу ионов плазмы, и температурой, равной сумме температур ионной и электронной компонент плазмы. При этом плотность, полное давление, скорость и сумма температур обеих компонент плазмы есть функция только площади поперечного сечения канала, а температуры и парциальные давления отдельных компонент плазмы и напряженность электрического поля в плазме будут зависеть от формы канала $S = S(x)$.

Образование электрических полей в плазме под воздействием различных сил рассматривалось во многих работах (см., например, [4]). Формальное доказательство существования в плазме электрического поля в рассматриваемом случае легко получить из сравнения второго и третьего уравнений (1.4) и третьего уравнения (1.2) для ионной компоненты плазмы, которое позволяет найти следующее выражение для напряженности электрического поля в плазме:

$$E = -\frac{m_i}{e}\frac{1}{\rho}\frac{dp_e}{dx} \tag{1.6}$$

Отсюда следует, что если $dp_e/dx \neq 0$, то $E \neq 0$. Образование этого поля объясняется следующим образом. Как было установлено, при стационарном течении электроны и ионы должны двигаться вдоль канала с одинаковыми скоростями и, следовательно, с одинаковыми ускорениями. Так как масса электрона пренебрежимо мала по сравнению с массой иона, то действующая на электроны сила должна быть пренебрежимо мала по сравнению с силой, действующей на ионы. Это возможно лишь в том случае, если градиент давления электронного газа уравновесится силой электрического поля (другие силы здесь возникнуть не могут).

Электрическое поле образуется в начальный нестационарный период движения плазмы. В это время электроны, двигаясь под действием градиента давления, вследствие малости своей массы обгоняют ионы или отстают от них в зависимости от знака dp_e/dx. При этом образуются объемные заряды и связанное с ними электрическое поле. Последнее имеет направление, препятствующее разделению компонент плазмы. Накопление объемных зарядов и соответствующий рост электрического поля продолжаются до тех пор, пока скорости компонент плазмы не выравняются. После этого движение плазмы становится стационарным. (В действительности, при этом могут возникнуть колебания плазмы, которые здесь не рассматриваются.)

Так как по предположению электрический ток в плазме отсутствует

$$j = en\,(u_i - u_e) = 0$$

то электрическое поле над плазмой в целом работы не совершает. Из четвертого уравнения (1.2) видно, что энергия от одной компоненты плазмы к другой передается через столкновения и через электрическое поле. Таким образом, роль электрического поля аналогична роли столкновений и заключается в передаче энергии от одной компоненты плазмы к другой. В плазме малой плотности электрическое поле может, по-видимому, играть основную роль в передаче энергии от одной компоненты плазмы к другой.

Сделанные до сих пор выводы, естественно, имеют место и для частного случая термически равновесной плазмы.

2. Движение плазмы в канале постоянного сечения. Если $S = \mathrm{const}$, то в случае сверхкритического перепада давления на концах канала по аналогии с обычным газом будем иметь

$$u^2 = a^2 = \gamma R\,(T_e + T_i) = \mathrm{const}, \qquad p = \mathrm{const}, \qquad \rho = \mathrm{const} \tag{2.1}$$

Здесь a — скорость звука в плазме.

В этом случае уравнение энергии для электронного газа можно преобразовать к такому виду: (2.2)

$$\frac{dT_e}{dx} = -\frac{\varkappa_{ei}\nu_{ei}}{u_0}(T_e - T_i) = -2\frac{\varkappa_{ei}\nu_{ei}}{u_0}(T_e - T^*) \qquad \left(T^* = \tfrac{1}{2}(T_{e0} + T_{i0})\right)$$

Отсюда следует, что электронная и ионная температуры асимптотически стремятся к равновесному значению T^*.

Частота столкновений ν_{ei} определяется формулой [3]

$$\nu_{ei} = \frac{2}{3}\sqrt{8\pi}\,\frac{e^4\rho}{m_e^{1/2} m_i^{5/3} (RT_e)^{3/2}} \ln\left(\frac{m_i R T_e D}{e^2}\right)$$

$$D \equiv \left[\frac{m_i^2 R T_e R T_i}{4\pi e^2 \rho\,(RT_e + RT_i)}\right]^{1/2} \tag{2.3}$$

Здесь D — дебаевский радиус.

Подставляя (2.3) в (2.2) и интегрируя [1], получим выражение для $T_e(x)$ в неявном виде

$$\frac{1}{3}\left(T_e^{3/2} - T_{e0}^{3/2}\right) + T^*\left(T_e^{1/2} - T_{e0}^{1/2}\right) + \frac{T^{*3/2}}{2}\ln\left[\frac{\left(T_e^{1/2} - T^{*1/2}\right)\left(T_{e0}^{1/2} + T^{*1/2}\right)}{\left(T_e^{1/2} + T^{*1/2}\right)\left(T_{e0}^{1/2} - T^{*1/2}\right)}\right] =$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{8\pi}\,\frac{e^2\rho_0\varkappa_{ei}}{m_e^{1/2} m_i^{5/2} R^{3/2} u_0}\ln\left(\frac{m_i R T_e D}{e^2}\right) x \tag{2.4}$$

Из первого и второго уравнений (1.2) и уравнений (2.1) и (2.2) получим следующее выражение для E:

$$E = \frac{\varkappa_{ei}\nu_{ei}}{u_0}\,\frac{k}{e}\,(T_e - T_i) = 2\,\frac{\varkappa_{ei}\nu_{ei}}{u_0}\,\frac{k}{e}\,(T_e - T^*) \tag{2.5}$$

Отсюда следует, что если температура электронов больше температуры ионов, то $E > 0$. При этом электрическое поле поддерживается за счет энергии электронов ($dT_i / dx < 0$) и передает свою энергию ионам. Если температура электронов меньше температуры ионов, то $E < 0$. При этом электрическое поле поддерживается за счет энергии ионов ($dT_i / dx < 0$) и передает свою энергию электронам.

Из четвертого уравнения (1.2) и (2.5) следует, что в рассматриваемом случае доля энергии, передаваемая от одной компоненты плазмы к другой через электрическое поле, составляет $\gamma - 1$ от доли энергии, передаваемой через столкновения.

При отсутствии столкновений ($\nu_{ei}\varkappa_{ei} = 0$) электрическое поле равно нулю и температуры каждой компоненты плазмы остаются постоянными вдоль канала.

3. Движение плазмы при постоянной вдоль канала температуре ионной компоненты плазмы. Рассмотрим движение термически неравновесной плазмы в канале переменного сечения, спрофилированного таким образом, чтобы температура ионной компоненты плазмы оставалась постоянной вдоль канала $T_i = \text{const}$. Если при этом $T_e > T_i$, то ускорение плазмы будет осуществляться целиком за счет энергии электронного газа.

Уравнение энергии для ионной компоненты плазмы в рассматриваемом случае можно преобразовать к такому виду:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx} = -\frac{\varkappa_{ei}\nu_{ei}}{(\gamma - 1)\,u}\left(\frac{T_e}{T_{i0}} - 1\right) = \frac{\varkappa_{ei}\nu_{ei}}{2\gamma R T_{i0} u}\left(u^2 - u^{*2}\right) \tag{3.1}$$

Здесь

$$u^{*2} = u_0^2 + \frac{2\gamma R}{\gamma - 1}\left(T_{e0} - T_{i0}\right), \qquad T_e = T_{i0} \quad \text{при } u = u^*$$

Следовательно, u^* есть предельная для рассматриваемого случая скорость, достигаемая плазмой при установлении термического равновесия.

Если электронная температура больше ионной, то скорость плазмы меньше предельной. При этом плотность плазмы уменьшается по длине канала ($d\rho / dx < 0$).

Дифференцируя второе уравнение (1.5) и используя первое уравнение (1.5), получим еще одно соотношение между плотностью и скоростью плазмы

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx} = \frac{u}{2(\gamma - 1)(\gamma R T_{i0})^2 (u^2 - u^{**2})}\,\frac{du}{dx} \tag{3.2}$$

---

[1] Величина, стоящая под знаком логарифма в выражении (2.3), обычно всегда много больше единицы; поэтому при интегрировании логарифм вынесен за знак интеграла [3].

Здесь

$$u^{**2} = u_0^2 + \frac{2\gamma R}{\gamma - 1}(T_{e0} + T_{i0})$$

Из первого уравнения (1.5) следует, что u^{**} есть скорость истечения плазмы в вакуум.

Комбинируя уравнения (3.1) и (3.2), получим уравнение для скорости плазмы

$$\frac{du}{dx} = \frac{(\gamma - 1)\varkappa_{ei}\nu_{ei}}{4\gamma R T_{i0} u^2}(u^2 - u^{*2})(u^2 - u^{**2}) \tag{3.3}$$

Так как скорость плазмы всегда меньше скорости истечения ее в вакуум, то плазма ускоряется ($du/dx > 0$), если ее скорость меньше предельной, и замедляется ($du/dx < 0$), если ее скорость больше предельной.

Поделив левую и правую части уравнения (3.3) соответственно на левую и правую части уравнения (3.1), получим уравнение с разделяющимися переменными, интегрирование которого дает выражение для плотности плазмы через ее скорость (3.4)

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left[1 - \frac{(\gamma - 1)(u^2 - u_0^2)}{2\gamma R(T_{e0} + T_{i0})}\right]^{\frac{1}{\gamma - 1}} \qquad \left(\frac{\rho}{\rho_0} \to \left(\frac{2T_{i0}}{T_{e0} + T_{i0}}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad \text{при } u \to u^*\right)$$

Из первого уравнения (1.4) и (3.4) получим формулу, связывающую площадь поперечного сечения канала и скорость плазмы

$$\frac{S}{S_0} = \frac{u_0}{u}\left[1 - \frac{(\gamma - 1)(u^2 - u_0^2)}{2\gamma R(T_{e0} + T_{i0})}\right]^{-\frac{1}{\gamma - 1}}$$

$$\left(\frac{S}{S_0} \to \frac{u_0}{u^*}\left(\frac{T_{e0} + T_{i0}}{2T_{i0}}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad \text{при} \quad u \to u^*\right) \tag{3.5}$$

Дифференцируя первое уравнение (1.4) и используя уравнения (3.1) и (3.3), получим следующее уравнение:

$$\frac{1}{S}\frac{dS}{dx} = -\frac{(\gamma + 1)\varkappa_{ei}\nu_{ei}}{4\gamma R T_{i0} u^3}(u^2 - u^{*2})(u^2 - u_*^2) \tag{3.6}$$

Здесь

$$u_*^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}u_0^2 + \frac{2\gamma R}{\gamma - 1}(T_{e0} + T_{i0})$$

Из первого уравнения (1.5) следует, что $u_*^2 = \gamma R(T_e + T_{i0})$. Таким образом, u_* есть критическая скорость, равная местной скорости звука. Производная $dS/dx = 0$ при $u = u_*$ и $u = u^*$.

В сечении $x = 0$

$$\frac{1}{S_0}\frac{dS}{dx}\bigg|_{x=0} = -\frac{(\gamma + 1)\varkappa_{ei}\nu_{ei}}{4\gamma R T_{i0} u_0^3}(u_0^2 - u^{*2})(u_0^2 - u_*^2)$$

Если $u_0 < u_* < u^*$, то $dS/dx|_{x=0} < 0$. В этом случае канал имеет горло в сечении, где $u = u_*$, а затем расширяется. Если $u_0 > u_*$, то всюду $dS/dx > 0$.

Подставляя в (3.3) выражение для ν_{ei} из (2.3) и используя первое уравнение (1.5) и (3.5), получим следующее уравнение:

$$\frac{[T_{e0} - (u^2 - u_0^2)(\gamma - 1)/2\gamma R]^{\frac{3}{2}} u^2}{(u^2 - u^{*2})(u^2 - u^{**2})[T_{e0} + T_{i0} - (u^2 - u_0^2)(\gamma - 1)/2\gamma R)]^{\chi}}\frac{du}{dx} =$$

$$= \frac{(\gamma - 1)\sqrt{2\pi}\varkappa_{ei}e^4\rho_0 \ln(m_i R T_e D/e^2)}{3\gamma m_e^{1/2} m_i^{5/2} R^{5/2} T_{i0}(T_{e0} + T_{i0})^{\chi}} \qquad \left(\chi = \frac{1}{\gamma - 1}\right)$$