

УДК 624.07:534.1

ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В ДВУМЕРНЫХ УПРУГИХ СИСТЕМАХ*

А. И. Весницкий, А. В. Кононов, А. В. Метрикин

*Нижегородский филиал института машиноведения РАН,
603024 Нижний Новгород*

Переходное излучение [1, 2] упругих волн возникает при равномерном прямолинейном движении механического объекта вдоль неоднородной упругой системы [3]. Примерами конструкций, в которых имеет место переходное излучение, являются рельсовый путь, взаимодействующий с колесами вагона, мост, по которому движутся автомобили, посадочная полоса для самолетов и т. д. В число наиболее важных с точки зрения практики характеристик переходного излучения упругих волн входят следующие: 1) реакция излучения, 2) энергия излучения и ее спектрально-угловая плотность, 3) поперечное ускорение объекта в процессе излучения. Реакция излучения, величина которой резко возрастает при движении объекта вблизи закрепления упругой системы [3], может быть причиной быстрого изнашивания конструкции. Кроме того, как показано в настоящей работе, величина и направление реакции излучения изменяются в процессе движения объекта, поэтому для поддержания его равномерного прямолинейного движения необходима управляющая сила. Спектрально-угловая плотность энергии излучения может служить естественным параметром, позволяющим диагностировать состояние упругих систем. Поперечное ускорение объекта является, пожалуй, наиболее важной характеристикой излучения. Это связано с тем, что в процессе излучения сила инерции, действующая на объект, может сравняться по величине с силой, прижимающей объект к упругой системе. Если при этом их направления окажутся противоположными, произойдет разрыв контакта объект — упругая конструкция, что приведет к возникновению крайне нежелательного ударного режима взаимодействия.

В настоящей работе исследуется переходное излучение упругих волн в полуограниченной пластине, лежащей на упругом основании. Предполагается, что источником возмущений служит равномерно и прямолинейно движущаяся вдоль пластины точечная масса, находящаяся в поле тяжести. Найдена спектрально-угловая плотность энергии излучения. Показано, что на массу действует реакция излучения, величина и направление которой зависят от времени немонотонно. Проанализировано поперечное ускорение массы в процессе излучения. Определена область параметров системы, в которой происходит отрыв тела от пластины.

1. Рассмотрим равномерное прямолинейное $\mathbf{R} = \mathbf{V}T$ ($\mathbf{V} = (V_1, V_2) = \text{const}$, $\mathbf{R} = (X, Y)$) движение точечной массы M вдоль полубесконечной шарнирно закрепленной при $X = 0$ пластины с плотностью ρ , толщиной h и цилиндрической жесткостью D , лежащей на упругом основании жесткости k . В линейном приближении безотрывные колебания массы и пластины, согласно [4, 5], описываются следующей системой уравнений:

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01416-а).

$$\begin{aligned}
 2U_{tt} + \Delta_{xy}^2 U + U &= -m(1 + 2\ddot{y}(t))\delta(x - v_1 t)\delta(y - v_2 t), \\
 &-\infty < y < +\infty, \quad x \leq 0, \quad t \leq 0, \\
 U(0, y, t) = U_{xx}(0, y, t) &= 0, \\
 U(v_1 t, v_2 t, t) &= y(t).
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Здесь $U(x, y, t)$, $y(t)$ — безразмерные поперечные смещения пластины и массы; $x = X\sqrt{\mu/\nu}$, $y = Y\sqrt{\mu/\nu}$, $t = T\mu\sqrt{2}$ ($\nu^2 = D/\rho h$, $\mu^2 = k/\rho h$) — безразмерные координаты и время; $\mathbf{v} = (v_1, v_2) = \mathbf{V}/|\mathbf{V}_{кр}| = \mathbf{V}/\sqrt{2\mu\nu}$, $m = M\mu/\nu\rho h$ — безразмерные скорость и масса тела; $\Delta_{xy} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — двумерный лапласиан; $\delta(\dots)$ — безразмерная δ -функция. Переход к безразмерным смещениям массы и пластины осуществлен умножением на μ^2/g , где g — ускорение свободного падения.

В дальнейшем будем полагать, что скорость движения массы не превышает наименьшей фазовой скорости поперечных волн в пластине, т. е. $|\mathbf{V}| < |\mathbf{V}_{кр}| = \sqrt{2\mu\nu}$, $|\mathbf{v}| < 1$. В этом интервале скоростей тело, двигаясь вдали от закрепления, не излучает упругих волн, а возбуждает локализованное (экспоненциально спадающее с увеличением расстояния в зависимости от массы) собственное поле деформаций, стационарное в системе координат, связанной с телом. Найдем выражение, описывающее данное поле. Для этого решим задачу о движении постоянной нагрузки по безграничной пластине (вдали от закрепления тело движется горизонтально и $\ddot{y}(t) = 0$). В соответствии с (1.1) в движущейся вместе с массой системе координат $\xi = x - v_1 t$, $\eta = y - v_2 t$ эта задача имеет вид

$$\begin{aligned}
 2\left(\frac{v_1\partial}{\partial\xi} + \frac{v_2\partial}{\partial\eta}\right)^2 U + \Delta_{\xi\eta}^2 U + U &= -m\delta(\xi)\delta(\eta), \\
 U(\xi, \eta) &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty.
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

Применяя к (1.2) интегральное преобразование Фурье

$$W(k_1, k_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) e^{-i(k_1\xi + k_2\eta)} d\xi d\eta,$$

получим следующее выражение для W , описывающее в пространстве изображений собственное поле:

$$W^m = -m(1 + (k_1^2 + k_2^2)^2 - 2(v_1 k_1 + v_2 k_2)^2)^{-1}.$$

Отыскивая оригинал для W^m и приводя полученное выражение к виду, удобному для численного анализа, имеем

$$U^m(\xi, \eta) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W^m e^{i(k_1\xi + k_2\eta)} dk_1 dk_2 = m(I_1 + I_2)/8\pi,
 \tag{1.3}$$

где

$$\begin{aligned}
 I_1 &= -2 \int_0^{\pi/2} \cos\left(\frac{p \cos(\varphi)}{v}\right) \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{is_1|p|/v}}{s_1} - \frac{e^{is_2|q|/v}}{s_2} \right\} d\varphi; \\
 I_2 &= \int_0^{\infty} \frac{\cos(p\sqrt{\alpha^2 + 1})}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{-s_3|p|/v}}{s_3} - \frac{e^{-s_4|q|/v}}{s_4} \right\} d\alpha.
 \end{aligned}$$

Здесь $p = \xi \cos(\theta) + \eta \sin(\theta)$; $q = -\xi \sin(\theta) + \eta \cos(\theta)$; $\operatorname{tg} \theta = v_2/v_1$ (θ — угол между нормалью к закреплению и направлением движения массы,

отсчитываемый против часовой стрелки, в дальнейшем — угол падения);
 $v = |\mathbf{v}|$;

$$s_{1,2} = \sqrt{-\cos^2 \varphi \mp 2iv^2 \sin \varphi}; \quad \text{Im}(s_{1,2}) > 0;$$

$$s_{3,4} = \sqrt{\alpha^2 \mp 2v^2 \alpha + 1}.$$

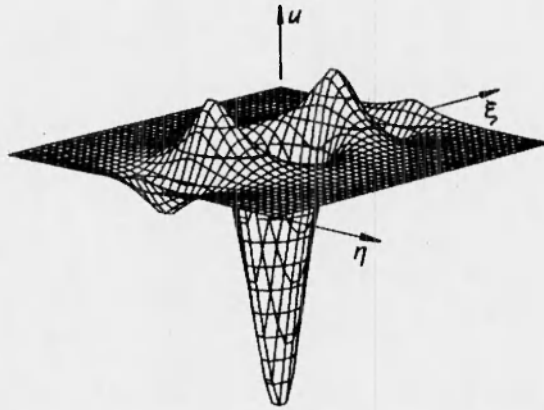


Рис. 1

Вид собственного поля смещений пластины под движущейся нагрузкой $U^m(\xi, \eta)$ изображен на рис. 1. Важно отметить, что, в отличие от собственного поля электрона в среде [1] или собственного поля постоянной нагрузки в мембране [6], $U^m(\xi, \eta)$ ограничена, спадает с увеличением расстояния от нагрузки немонотонно и не обладает центральной симметрией.

Перейдем непосредственно к решению задачи (1.1). В качестве ее начальных условий естественно выбрать выражение для собственного поля U^m в безграничной пластине:

$$U(x, y, t) \rightarrow U^m(x, y, t) \quad \text{при} \quad t \rightarrow -\infty. \quad (1.4)$$

2. Как видно из постановки (1.1), при выполнении условия

$$2|\ddot{y}(t)| \ll 1 \quad \text{при} \quad t \in]-\infty, 0] \quad (2.1)$$

поперечную силу, действующую на пластину со стороны массы, можно считать постоянной.

Предположим, что условие (2.1) выполнено. Исследуем задачу (1.1), (1.4), (2.1) двумя способами: методом изображений [7], позволяющим в явном виде получить выражение для реакции излучения (продольной составляющей силы, действующей со стороны пластины на массу), и спектральным методом, позволяющим проанализировать переходное излучение адекватно используемым ныне стандартным средствам измерения и обработки экспериментальных данных.

Анализ задачи методом изображений. Согласно этому методу, решение задачи (1.1), (1.4), (2.1) будет совпадать при $x \leq 0, t \leq 0$ с решением вспомогательной задачи о движении двух нагрузок (реальной m и фиктивной $-m$, движущейся симметрично относительно оси $x = 0$) по безграничной пластине. Следовательно, при $t \leq 0$ решение задачи (1.1), (1.4), (2.1) имеет вид

$$U^-(x, y, t) = U^m(x, y, t) - U^m(-x, y, t). \quad (2.2)$$

При $t > 0$ пластина будет совершать свободные колебания с начальными условиями, определяемыми выражением (2.2) при $t \rightarrow 0$. Эти условия оказываются ненулевыми, что и приводит к возникновению в пластине свободных волн, представляющих собой переходное излучение. Интересно отметить, что при $\theta = 0$ (нормальное падение) смещение пластины в момент перехода массы через закрепление ($t = 0$) равно нулю и пластина при $t > 0$ будет колебаться исключительно за счет ненулевой начальной скорости $U_t(x, y, 0)$. При наклонном падении ($\theta \neq 0$) как смещение пластины, так и ее скорость в момент $t = 0$ отличны от нуля.

Выражение (2.2) позволяет определить реакцию излучения F^r , действующую на движущуюся массу (процесс формирования излучения происходит и при $t < 0$). Согласно [5] и (2.2), для F^r в рассматриваемом случае получим выражение

$$F^r = (F_x, F_y) = -\nabla_{xy} U^- \Big|_{\substack{x=v_1 t \\ y=v_2 t}} = \nabla_{xy} U^m(-x, y, t) \Big|_{\substack{x=v_1 t \\ y=v_2 t}}$$

Зависимости $F_x^r(t)$ и $F_y^r(t)$ для $\theta = \pi/9$ и $\theta = \pi/3$ изображены на рис. 2 (при расчетах полагалось $m = 1, v = 0,5$), где для удобства восприятия стрелками указано направление F^r в системе координат (x, y) . Анализируя рис. 2, можно сделать следующие выводы: 1) как величина, так и направление реакции излучения зависят от времени, причем эта зависимость не является монотонной; 2) амплитуда осцилляций реакции излучения возрастает с приближением массы к закреплению; 3) реакция излучения осциллирует быстрее при меньших углах падения.

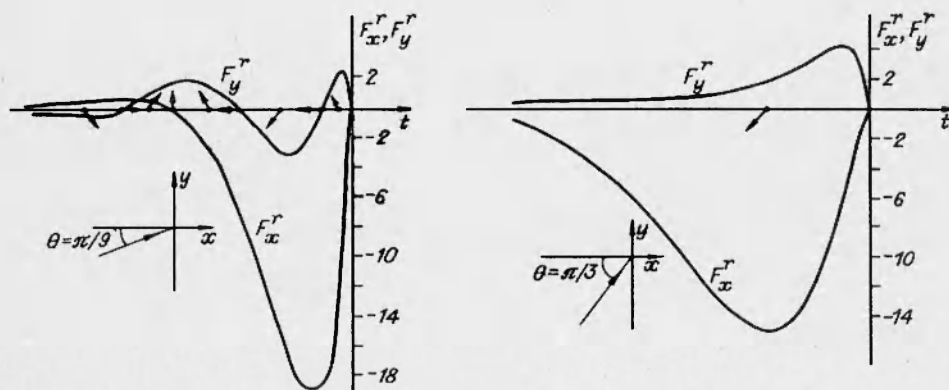


Рис. 2

Таким образом, для поддержания равномерного прямолинейного движения объекта вблизи закрепления необходимо приложить управляющую силу $R = -F^r$, переменную как по величине, так и по направлению. Сила R должна возрастать с приближением объекта к закреплению, а ее частота — увеличиваться с уменьшением угла падения θ .

Анализ задачи спектральным методом. Применим к задаче (1.1), (2.1) интегральное преобразование Фурье по времени и координате y :

$$W(x, k_2, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, t) e^{i(\omega t - k_2 y)} dt dy.$$

В изображениях получим

$$W_{xxxx} - 2k_2^2 W_{xx} + (k_2^4 - 2\omega^2 + 1)W = -\frac{A}{v} e^{i\Omega x/v}, \quad (2.3)$$

$$W(0, k_2, \omega) = W_{xx}(0, k_2, \omega) = 0.$$

Здесь $A = m/\cos\theta$; $\Omega = (\omega - k_2 v \sin\theta)/\cos\theta$.

Решение (2.3) с учетом ограниченности смещения пластины при $x \rightarrow -\infty$ запишется в виде суперпозиции вынужденного решения (собственного поля)

$$W^m = C e^{i\Omega x/v},$$

где $C = -Av^3/((\Omega^2 + k_2^2 v^2)^2 - v^4(2\omega^2 - 1))$, и свободного решения

$$W^{\text{fr}} = W^r + W^n = A_1(k_2, \omega) e^{i\Omega_1 x} + A_2(k_2, \omega) e^{i\Omega_2 x}, \quad (2.4)$$

где $\Omega_1 = (-k_2^2 + \sqrt{2\omega^2 - 1})^{1/2}$; $\Omega_2 = -i(k_2^2 + \sqrt{2\omega^2 - 1})^{1/2}$. Первое слагаемое в (2.4) в волновой зоне описывает переходное излучение, а второе — экспоненциально спадающее вблизи закрепления ближнее поле.

Выражения для A_1 и A_2 определяются из граничных условий при $x = 0$ и имеют вид

$$A_{1,2} = \pm \frac{Av}{2\sqrt{2\omega^2 - 1}(\Omega^2 + k_2^2 v^2 \mp v^2 \sqrt{2\omega^2 - 1})}. \quad (2.5)$$

Найдем энергию переходного излучения, воспользовавшись гамильтоновским методом, изложенным в [1]. Согласно этому методу, выражение для полной энергии излучения может быть записано в виде

$$H^r = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h^r(x, y, t) \Big|_{t \rightarrow \infty} dx dy. \quad (2.6)$$

Здесь $h^r = (2U_x^2 + (\nabla_{xy}^2 U)^2 + U^2)/2$ — безразмерная плотность энергии подпружиненной пластины; $U = U^r$, U^r — фурье-образ от W^r .

Для вычисления (2.6) используем представление U^r в виде интеграла Фурье:

$$U^r(x, y, t) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_1(k_2, \omega) e^{i(\Omega_1 x + k_2 y - \omega t)} dk_2 d\omega. \quad (2.7)$$

Подставляя (2.7) в (2.6), находим

$$H^r = \frac{1}{32\pi^4} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (-2\omega\hat{\omega} + \Omega_1^2 \hat{\Omega}_1^2 + k_2^2 \hat{k}_2^2 + 2k_2 \hat{k}_2 \Omega_1 \hat{\Omega}_1 + 1) \times \\ \times A_1(\omega, k_2) A_1(\hat{\omega}, \hat{k}_2) e^{i(\hat{\Omega}_1 + \Omega_1)x + i(\hat{k}_2 + k_2)y + i(\omega + \hat{\omega})t} dk_2 d\hat{k}_2 d\omega d\hat{\omega} dx dy.$$

Интегрируя вначале по x и по y с применением формул [8]

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega,$$

а затем, используя свойства δ -функции, получим

$$H^r = \frac{A^2 v^2}{8\pi^2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(-k_2^2 + \sqrt{2\omega^2 - 1})^{1/2} d\omega dk_2}{\sqrt{2\omega^2 - 1}(\Omega^2 + k_2^2 v^2 - v^2 \sqrt{2\omega^2 - 1})^2}. \quad (2.8)$$

Введем угол φ между волновым вектором излучения $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ и нормалью к закреплению (φ отсчитывается против часовой стрелки). В этом случае

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{k_1}{|\mathbf{k}|} = \frac{(-k_2^2 + \sqrt{2\omega^2 - 1})^{1/2}}{(2\omega^2 - 1)^{1/4}}, \\ \sin \varphi &= \frac{-k_2}{|\mathbf{k}|} = \frac{-k_2}{(2\omega^2 - 1)^{1/4}}. \end{aligned}$$

Учитывая данные соотношения, перепишем (2.8) в виде ($\omega_{кр} = 1/\sqrt{2}$)

$$H^r = \int_{\omega_{кр}}^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Q^r(\omega, \varphi) d\omega d\varphi,$$

где

$$\begin{aligned} Q^r(\omega, \varphi) &= \frac{m^2 v^2}{4\pi^2 \cos^2(\theta)} \times \\ &\times \frac{\omega \cos^2 \varphi}{((\omega + v \sin \theta \sin \varphi (2\omega^2 - 1)^{1/4})^2 / \cos^2 \theta - v^2 \cos^2 \varphi \sqrt{2\omega^2 - 1})^2} \quad (2.9) \end{aligned}$$

— спектрально-угловая плотность энергии излучения.

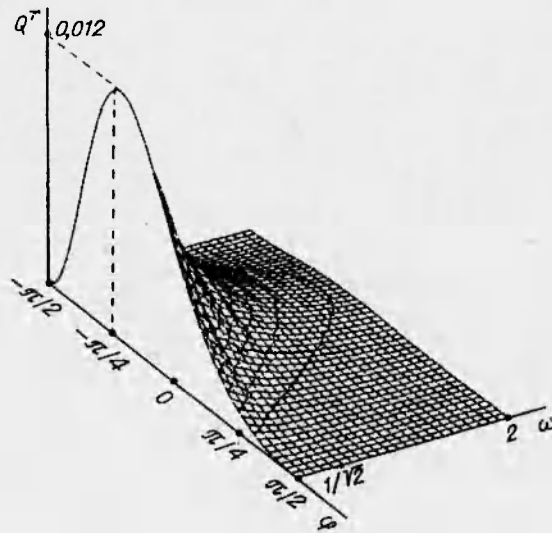


Рис. 3

Зависимость $Q^r(\omega, \varphi)$ изображена на рис. 3 для угла падения $\theta = \pi/4$ (при расчетах полагалось, что $m = 1, v = 0,5$). Видно, что максимум излучаемой энергии приходится на угол $\varphi = -\theta$. Этот результат достаточно очевиден, так как поле излучения формируется в процессе отражения собственного поля массы от закреплению и проявление правила «угол падения

равен углу отражения» здесь вполне закономерно. Анализ выражения (2.9) показывает, что, чем больше v , тем уже угол, в который излучается основная часть энергии. Следовательно, с ростом v процесс переходного излучения все больше напоминает процесс удара упругого шарика о стенку.

3. До сих пор мы анализировали задачу в предположении, что инерционность массы можно пренебречь по сравнению с ее весомостью, т. е. $2|\ddot{y}(t)| \ll 1$ (см. (2.1)). Достаточно взглянуть, однако, на собственное поле деформаций массы (см. рис. 1), чтобы понять, что вблизи закрепления собственное поле, отражаясь, начнет раскачивать массу в поперечном направлении. Очевидно, что найдутся такие параметры задачи m, v, θ , при которых условие (2.1) будет несправедливым. Более того, может оказаться, что в момент времени $t^* < 0$ выполнится равенство $2\ddot{y}(t)+1 = 0$, означающее разрыв контакта между массой и пластиной.

Для проверки высказанных предположений исследуем задачу (1.1), не пренебрегая инерционностью массы. Пользуясь методом изображений, перепишем (1.1) в форме

$$\begin{aligned} 2U_{tt} + \Delta_{xy}^2 U + U &= \\ &= -m(1 + 2\ddot{y}(t))(\delta(x - v_1 t) \delta(y - v_2 t) - \delta(x + v_1 t) \delta(y - v_2 t)), \\ -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t \leq 0, \\ U(v_1 t, v_2 t, t) &= y(t), \\ |U(x, y, t)| &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x - v_1 t| \rightarrow \infty, \quad |y| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Решение задачи (3.1), совпадающее с решением задачи (1.1) при $x \leq 0$, будем искать в виде

$$U = U_1 + U_2,$$

где U_1 — решение (3.1) при $\ddot{y}(t) = 0$, т. е. совпадает с U^- (см. (2.2)), а U_2 — решение задачи

$$\hat{L}U_2 = -2m\ddot{y}(t)(\delta(x - v_1 t) \delta(y - v_2 t) - \delta(x + v_1 t) \delta(y - v_2 t)) \quad (3.2)$$

с граничными условиями задачи (3.1) ($\hat{L} = 2\partial^2/\partial t^2 + \Delta_{xy}^2 + 1$ — дифференциальный оператор уравнения поперечных колебаний подпружиненной пластины).

Найдем фундаментальное решение [9] для \hat{L} , т. е. решим задачу

$$\hat{L}G = \delta(x)\delta(y)\delta(t) \quad (3.3)$$

при условии ограниченности G на бесконечности.

Применяя к (3.3) интегральное преобразование Фурье

$$V(k_1, k_2, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, t) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r})} dx dy$$

($\mathbf{k} = (k_1, k_2)$, $\mathbf{r} = (x, y)$), получим

$$2V_{tt} + (|\mathbf{k}|^4 + 1)V = \delta(t).$$

Используя фундаментальное решение для оператора $\partial^2/\partial t^2 + a^2$ (см. [9]), выполняя обратное преобразование Фурье, переходя к новым переменным

интегрирования (ρ, α) по правилу $k_1 = \rho \cos \alpha$, $k_2 = \rho \sin \alpha$ и интегрируя по α , имеем

$$G(r, t) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \int_0^\infty \frac{\rho J_0(\rho|r|)}{\sqrt{\rho^4 + 1}} \sin\left(\frac{t\sqrt{\rho^4 + 1}}{\sqrt{2}}\right) d\rho. \quad (3.4)$$

Здесь $J_0(\dots)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

С учетом (3.3), (3.4) запишем решение задачи (3.2):

$$U_2 = 2m \int_{-\infty}^t \ddot{y}(\tau) (G(x + v_1\tau, y - v_2\tau, t - \tau) - G(x - v_1\tau, y - v_2\tau, t - \tau)) d\tau.$$

Нашей целью является определение поперечного ускорения массы $\ddot{y}(t)$. Для его отыскания используем условие безотрывности колебаний массы и пластины $U(v_1t, v_2t, t) = y(t)$, что приведет к интегродифференциальному уравнению относительно $y(t)$:

$$y(t) = U^-(v_1t, v_2t, t) + 2m \int_{-\infty}^t \ddot{y}(\tau) (G(v_1(t + \tau), v_2(t - \tau), t - \tau) - G(v_1(t - \tau), v_2(t - \tau), t - \tau)) d\tau. \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) позволяет найти зависимость $\ddot{y}(t)$ и из условия $2\ddot{y}(t) + 1 = 0$ определить параметры задачи, при которых происходит отрыв массы от пластины при $t < 0$.

После сведения к уравнению Вольтерра 2-го рода относительно $\ddot{y}(t)$ уравнение (3.5) было проанализировано численно. Качественный вид зависимости $\ddot{y}(t)$ показан на рис. 4. Пересечение кривой $\ddot{y}(t)$ с горизонтальной прямой $\ddot{y} = -1/2$ означает, что при $t = t^*$ происходит разрыв контакта масса — пластина и уравнение (3.5) при $t > t^*$ становится несправедливым. Кривые $m = m^*(v)$, разделяющие при различных θ плоскость параметров (m, v) на область безотрывного движения (область ниже кривой) и область движения с разрывом контакта (выше кривой), приведены на рис. 5. Видно, что масса тела m^* , при которой имеет место разрыв контакта, возрастает с увеличением угла падения θ и скорости движения v .

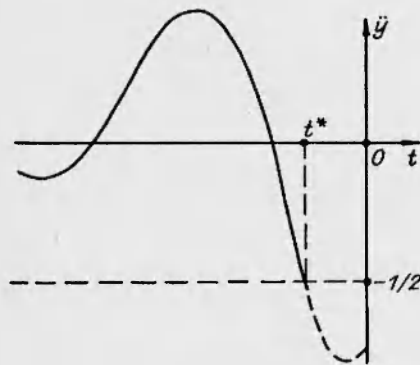


Рис. 4

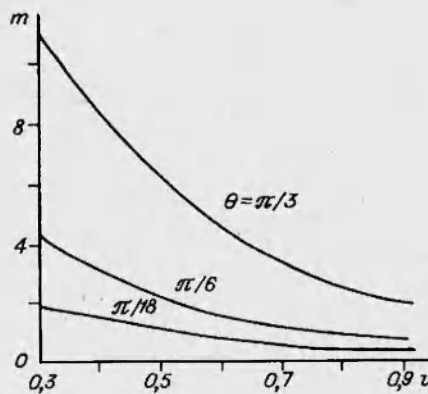


Рис. 5

Проведенный в данной работе анализ задачи о движении массы по полуограниченной пластине позволяет сделать следующие выводы: 1) при равномерном движении механического объекта вдоль двумерной упругой системы возникает переходное излучение упругих волн; 2) максимум энергии излучения приходится на угол, симметричный углу падения относительно нормали к закреплению; 3) на движущийся вблизи закрепления объект действует переменная по величине и направлению реакция излучения, и для поддержания его равномерного прямолинейного движения требуется управляющая сила; 4) в процессе движения объекта вблизи закрепления может произойти разрыв контакта между упругой системой и движущимся объектом, что приведет к возникновению ударного режима взаимодействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н. Переходное излучение и переходное рассеяние. М.: Наука, 1984.
2. Павлов В. И., Сухоруков А. И. Переходное излучение акустических волн // Успехи физ. наук. 1985. Т. 147, вып. 1.
3. Весницкий А. И., Метрикин А. В. Переходное излучение в одномерных упругих системах // ПМТФ. 1992. № 2. С. 62-67.
4. Вибрации в технике: Справ. в 6 т. М.: Машиностроение, 1978. Т. 1.
5. Маланов С. Б. Постановка задачи согласованного движения сосредоточенного объекта вдоль двумерной направляющей // Волновые задачи механики. Н. Новгород, 1991.
6. Кононов А. В., Метрикин А. В. Переходное излучение в полуограниченной мембране // Волновые задачи механики. Н. Новгород, 1992.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968.
9. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию 30/V 1994 г.
