

УДК 621.793

ОБРАЗОВАНИЕ ЛЕПЕСТКОВОЙ СТРУКТУРЫ НА ФРОНТЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ, ИНДУЦИРОВАННОЙ УДАРОМ КАПЛИ О ПЛОСКУЮ ПОВЕРХНОСТЬ

А. И. Федорченко, А. А. Чернов

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск

Предложена модель образования лепестковой структуры, в основу которой положена неустойчивость Рэлея — Тейлора, возникающая на стадии перехода течения от сверхзвуковой к напорной стадии. На данной стадии осуществляется резкое торможение течения, достигающее $(10^8 \div 10^{10})g$. Получено дисперсионное соотношение, позволяющее найти длину волны максимального роста. Определено количество образующихся лепестков на основе гипотезы, согласно которой оно является постоянным во времени.

В данной работе рассматривается образование лепестковой структуры на фронте первоначально осесимметричной радиальной струи, индуцированной ударом капли о плоскую твердую поверхность. Это явление отмечалось исследователями с начала изучения проблемы соударения капель с твердыми поверхностями. Тем не менее до настоящего времени отсутствуют количественные теории данного процесса и не ясна природа неустойчивости, приводящая к образованию лепестковой структуры. В настоящей работе на основе детального рассмотрения всех фаз удара показано, что на стадии перехода от «сверхзвуковой» к напорной стадии растекания жидкость испытывает очень большие ускорения. Это дает основание предполагать, что именно неустойчивость Рэлея — Тейлора является причиной потери осевой симметрии, приводящей к образованию лепестков.

Модель удара. Рассмотрим удар жидкой сферической капли радиусом r_0 о плоскую недеформируемую поверхность. Перед ударом капля имеет скорость u_0 , ориентированную по нормали к поверхности. Вводя систему координат с началом в лобовой точке осью z , ориентированной навстречу частице, и осью r , направленной вдоль поверхности, найдем координату $r_c(t)$ пересечения движущейся сферы с плоскостью $z = 0$. Согласно результатам работы [1] практически в течение всего процесса соударения скорость капли остается постоянной и равной u_0 . Используя этот факт, получим

$$r_c(t) = r_0 \left[1 - \left(1 - \frac{u_0 t}{r_0} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \frac{dr_c}{dt} = u_c(t) = \frac{u_0(r_0 - u_0 t)}{[u_0 t(2r_0 - u_0 t)]^{1/2}}.$$

Из последнего выражения следует, что существует интервал времени $[0, t_1]$, когда скорость перемещения границы пятна контакта превышает скорость c распространения возмущений в жидкости. Следовательно, на данном интервале времени свободная граница капли остается недеформированной и радиальное течение не развивается.

Определим t_1 как момент времени, в который скорость расширения пятна контакта уменьшается до скорости распространения возмущения в жидкости c , т. е. $u_c(t_1) = c$. Решение последнего уравнения легко находится:

$$t_1 = \frac{r_0}{u_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M^2 + 1}} \right),$$

где $M = u_0/c$ — число Маха.

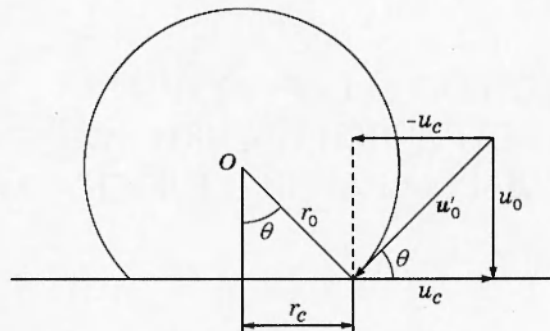


Рис. 1

В рассматриваемых нами случаях скорости столкновения частица — поверхность ограничены значениями чисел Маха $M \ll 1$, поэтому предыдущее выражение можно представить в следующем виде:

$$t_1 = \frac{r_0}{2u_0} M^2. \quad (1)$$

С данного момента времени начинается разгрузка области ударного сжатия за счет деформации свободной поверхности, развивается радиальное течение, начальную скорость которого можно оценить следующим образом.

Рассмотрим малую окрестность линии контакта, показанную на рис. 1. Перейдем в подвижную систему координат, в которой граница пятна контакта неподвижна. В данной системе координат вектор скорости жидкости u'_0 составляет угол θ с твердой поверхностью, что соответствует задаче о косом ударе струи о преграду [2], из решения которой следует, что скорость радиального течения u'_{r0} совпадает с u'_0 .

Как отмечено выше, радиальное течение начинается в момент времени t_1 , когда скорость границы пятна контакта достигает скорости звука в жидкости. Используя рис. 1, с учетом (1) найдем соответствующие данному моменту времени t_1 радиус пятна контакта $r_c(t_1)$, угол $\theta(t_1)$ и u'_0 :

$$r_c(t_1) = r_0 M / \sqrt{1 + M^2} \sim r_0 M; \quad (2)$$

$$\theta(t_1) = \theta_1 = \arcsin(r_c(t_1)/r_0) \sim M; \quad (3)$$

$$u'_0 = u_0 / \sin \theta_1. \quad (4)$$

Переходя в лабораторную систему координат, получим

$$u_{r0} = u_c + u_0 / \sin \theta(t_1) = u_0 (1 + \cos \theta_1) / \sin \theta_1. \quad (5)$$

С учетом (3) и условия $M \ll 1$ выражение (5) примет следующий вид:

$$u_{r0} = 2u_0 / M = 2c.$$

Таким образом, начальная скорость радиального течения равна скорости звука в жидкости. Данный вывод хорошо согласуется с результатами работы [3].

С момента времени t_1 начинается разгрузка области ударного сжатия и давление падает до давления напорного растекания [4]. В момент времени $t_2 = 4r_0/c$ начинается напорное растекание. На интервале времени (t_1, t_2) скорость уменьшается от скорости

звука до скорости порядка начальной скорости удара u_0 . Оценим характерное среднее ускорение радиального течения на второй стадии:

$$a \sim c^2/(4r_0). \quad (6)$$

При выводе формулы (6) мы пренебрегли скоростью брызговой струи на напорной стадии вследствие малости числа Маха. Для характерных параметров нашей задачи это огромная величина, поэтому логично предположить, что образование лепестковой структуры связано с неустойчивостью Рэлея — Тейлора.

Неустойчивость Рэлея — Тейлора. Анализ экспериментальных данных [5, 6] показывает, что количество лепестков растет с увеличением скорости соударения, причем необходимым условием возникновения лепестковой структуры является условие «удара» $t_i \ll t_{osc}$. Здесь $t_i = 2r_0/u_0$ — характерное время соударения; $t_{osc} = 2\pi\sqrt{\rho r_0^3/(8\sigma)}$ — характерное время свободных колебаний капли; ρ, σ — плотность и поверхностное натяжение материала капли. Вводя число Вебера $We = \rho r_0 u_0^2/\sigma$, условие «удара» запишем в следующем виде:

$$\sqrt{We} \gg 1. \quad (7)$$

При выполнении условия (7) характерная длина возмущения много меньше периметра внешней границы (фронта) радиального течения, поэтому при анализе на устойчивость разумным приближением будет являться плоский фронт. Следуя [7], запишем уравнения линейной гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости в системе координат, связанной с фронтом пленки (невозмущенный фронт пленки имеет координату $y = 0$, ось y направлена в глубь жидкости):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \ddot{z}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (8)$$

где a — ускорение фронта пленки; u, v — проекции вектора скорости на оси x и y соответственно.

Так как в выбранной системе отсчета стационарное движение отсутствует, возмущенные поля скоростей и давления можно представить в форме

$$u = u', \quad v = v', \quad p = p_0 - \rho a y + p', \quad (9)$$

где p_0 — давление на фронте пленки (при $y = 0$); штрихами отмечены возмущения полей соответствующих величин. Тогда уравнения (8) примут вид

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad \frac{\partial v'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y}, \quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0. \quad (10)$$

Граничное условие вытекает из отсутствия на фронте нормальных напряжений

$$p - \sigma \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} = p_0, \quad (11)$$

где h' — мгновенная нормальная координата фронта. Здесь мы пренебрегаем плотностью воздуха по сравнению с плотностью жидкости. С учетом стационарного распределения давления (9) запишем (11) при $y = h'$:

$$p' - \rho a h' - \sigma \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} = 0. \quad (12)$$

Кинематическое условие с точностью до членов первого порядка малости примет вид

$$v' = \frac{\partial h'}{\partial t}. \quad (13)$$

Решение системы (10), (12) и (13) будем искать в виде

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ p' \\ h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u}(y) \\ \tilde{v}(y) \\ \tilde{p}(y) \\ \tilde{h} \end{bmatrix} \exp(ikx + \omega t). \quad (14)$$

Здесь $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число; λ — длина волны; ω — комплексная частота колебаний. При выбранной форме возмущения признаком неустойчивости границы будет присутствие в выражении для ω положительной действительной части.

Подставляя (14) в (10) и (13), получим уравнения для амплитуд возмущений, которые легко найти из этих уравнений. Следует отметить, что кинематическое и граничное условия используются при $y = 0$, а не при $y = h'$ вследствие малости h' . Далее, подставляя амплитуды возмущений в (12), получим дисперсионное соотношение, связывающее круговую частоту ω и волновое число k :

$$\omega^2 = ak \left(1 - \frac{\sigma k^2}{\rho a} \right). \quad (15)$$

Длину волны, амплитуда которой k_{\max} растет с максимальной скоростью, определим из условия экстремума функции $\omega(k)$ (15):

$$\left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_{\max}} = 0,$$

или

$$k_{\max} = \sqrt{\rho a / (3\sigma)}, \quad \lambda_{\max} = 2\pi \sqrt{3\sigma / (\rho a)}. \quad (16)$$

Введем величину $N = 2\pi r_0 / \lambda_{\max}$, показывающую, сколько длин волны укладывается на характерном периметре капли. Тогда из (6) и (16) получим грубую оценку для N

$$N \sim \frac{1}{M} \sqrt{\frac{We}{12}}. \quad (17)$$

Для определения точного значения образующегося количества лепестков n необходимо знать ускорение фронта пленки в момент потери устойчивости. Попытаемся ответить на этот вопрос, вводя следующее предположение. Считаем, что в течение всего процесса растекания сохраняется количество лепестков, образовавшихся в момент времени t_1 , т. е. $n = \text{const}$. Используя данное условие, можно записать

$$2\pi r(t_1) = n\lambda(t_1), \quad 2\pi r(t) = n\lambda(t), \quad (18)$$

где $r(t)$ — текущий радиус фронта.

Из равенств (18) следует, что в любой момент времени на фронте радиального течения укладывается целое и не зависящее от времени число волн. Из (18) получим

$$r(t) = \frac{r(t_1)}{\lambda(t_1)} \lambda(t). \quad (19)$$

Так как рассматривается очень малый интервал времени (t_1, t_2), то можно отождествить радиус фронта радиального течения и радиус пятна контакта. В этом случае можно записать

$$r(t) = r_0 \sqrt{2 \frac{u_0}{r_0} t} \equiv r_0 f(t). \quad (20)$$

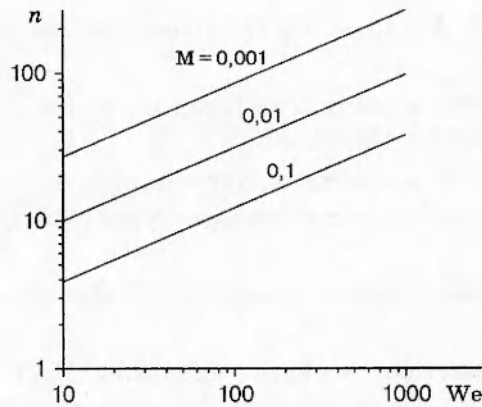


Рис. 2

Используя выражения (2), (16) и (20), запишем (19) следующим образом:

$$a(t) = a(t_1) \left(\frac{r(t_1)}{r_0} \right)^2 \frac{1}{f^2(t)} = a(t_1) M^2 \frac{1}{f^2(t)}. \tag{21}$$

Формула (21) позволяет выразить $a(t_1)$ через известное среднее ускорение \bar{a} (6):

$$\bar{a} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt \cong \frac{M^2 a(t_1)}{t_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{f^2(t)} = a(t_1) \frac{M}{8} \ln \frac{8}{M},$$

или

$$a(t_1) \cong \frac{c^2 / (4r_0)}{(M/8) \ln(8/M)}. \tag{22}$$

Зная мгновенное ускорение (22), найдем количество образующихся лепестков n :

$$n = \frac{2\pi r(t_1)}{\lambda(t_1)} = \frac{r_0 M}{\sqrt{3\sigma / (\rho a(t_1))}} = \left(\frac{We}{12} \right)^{1/2} \left(\frac{M}{8} \ln \frac{8}{M} \right)^{-1/2}. \tag{23}$$

На рис. 2 показана зависимость количества лепестков от числа Вебера для типичных значений числа Маха. Апробация теоретических результатов проводилась на основе экспериментальных данных, полученных при взаимодействии капель расплавов металлов с холодными поверхностями в условиях полного контроля параметров капель (диаметра, скорости, температуры) непосредственно перед ударом [6]. Быстрое затвердевание капли в процессе растекания позволяло зафиксировать форму лепестковой структуры. Интересно отметить, что экспериментальные данные, полученные в диапазоне чисел $We \sim 100$, $M \sim 0,01$, дают $n = 26$, расчет же по зависимости (23) дает $n = 32$.

Проведенные исследования позволяют считать, что неустойчивость Рэлея — Тейлора ведет к образованию лепестковой структуры на фронте радиального течения, индуцированного ударом капли о твердую поверхность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федорченко А. И. Гидродинамика и теплообмен при взаимодействии расплавленной частица — твердая поверхность: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1990.

2. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 1.
3. **Коробкин А. А.** Соударение жидких и твердых масс: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 1995.
4. **Fedorchenko A. I.** Melt drop spreading at collision with rigid surface // Schwerpunktprogram der Deutschen Forschungsgemeinschaft «Anwendungsbazogene Optimierung und Steuerung». Augsburg, 1992. Rep. N 361.
5. **Engel O. G.** Water drop collision with solid surface // J. Res. Nat. Bureau Standards. 1955. V. 54, N 5. P. 281-296.
6. **Solonenko O. P., Fedorchenko A. I., Lyagushkin V. P., et al.** Experimental studies of Al_2O_3 plasma-sprayed particles under their parameters control / Ed. by O. P. Solonenko, A. I. Fedorchenko // Plasma jets in the development of new materials technology. Utrecht (Netherlands); Tokyo (Japan): VSP, 1990.
7. **Накоряков В. Е., Горин А. В.** Тепломассоперенос в двухфазных средах. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО РАН, 1994.

Поступила в редакцию 14/VII 1998 г.
