

УДК 533

ВЫРАВНИВАНИЕ ДАВЛЕНИЯ ГАЗА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ, ЗАПОЛНЯЮЩЕЙ ТРУБУ С ЗАКРЫТЫМ КОНЦОМ, ПРИ УДАРНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

С. В. Хабиров

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН,
450054 Уфа, Россия
E-mail: habirov@anrb.ru

Решена задача о выравнивании давления газа в пористой среде, заполняющей трубу с закрытым концом, при ударном воздействии. При этом в качестве начальных данных кроме ударного давления необходимо задавать начальную скорость фильтрации за ударной волной. Показано, что скачок давления затухает на конечном расстоянии, выравнивание давления происходит за конечное время. Получены приближенные подмодели разрывного и гладкого решений.

Ключевые слова: фильтрация газа, ударная волна, приближенная подмодель.

DOI: 10.15372/PMTF20160605

Введение. Основные уравнения фильтрации газа получены из закона сохранения массы, уравнения состояния и закона фильтрации [1]

$$\begin{aligned} (m\rho)_t + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) &= 0; \\ \rho &= \rho(p, T), \quad \mathbf{u} = -k\mu^{-1}\nabla p, \end{aligned} \quad (1)$$

где m — пористость; ρ — плотность; p — давление; T — температура; k — проницаемость; μ — вязкость; \mathbf{u} — скорость фильтрации. В простейшем случае изотермического движения, когда газ является термодинамически идеальным и имеет постоянную вязкость, уравнение (1) принимает вид [2]

$$p_t = k(2m\mu)^{-1}\Delta p^2.$$

Для получения решения уравнения нелинейной фильтрации исследовались основные начально-краевые задачи как в неограниченных, так и в ограниченных областях [3, 4]. Разрывные решения уравнений фильтрации с ограничениями на величину потока рассматривались в [5]. Для получения непрерывных решений в неограниченных областях использовались автомодельные приближения. Для исследования приближений использовался метод интегральных соотношений [1]. Этот хорошо зарекомендовавший себя метод применяется для решения задачи о выравнивании давления газа в конечной трубе с пористой средой, насыщенной газом, с одним закрытым концом при воздействии ударной

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-97027-р-поволжье-а), Федерального агентства по науке и инновациям РФ (грант № НШ-8146.2016.1) и согласно постановлению № 220 Правительства РФ (грант № 11.G34.31.0042).

волной на другой, открытый, конец трубы. В одномерном приближении задача описывается соотношениями

$$p_t = k(m\mu)^{-1}(pp_x)_x, \quad 0 < x < l,$$

$$p(t, l) = p_1, \quad p_x(t, 0) = 0; \quad p(0, x) = p_0 \ll p_1, \quad 0 \leq x < l, \quad p_x(0, l) = u_0.$$

Требуется найти обобщенное решение с сильным разрывом, которое за конечное время выравнивает давление до величины p_1 во всей замкнутой области $0 \leq x \leq l$, закономерности увеличения давления на закрытом конце трубы и затухания ударной волны. При этом должны выполняться следующие основные предположения: скорость фильтрации u является ограниченной (малой) величиной, решение и входные данные являются положительными. Известно, что решения рассматриваемого нелинейного уравнения являются гладкими только в окрестности точек с давлением $p > 0$ и могут терять гладкость в точках, где решение обращается в нуль. Из множества сценариев решения задачи определен единственный сценарий, в котором скачок давления исчезает на расстоянии, меньшем $1/3$ длины трубы.

На практике, например при гидроразрыве, необходимо получить приближенные простые формулы, описывающие затухание ударной волны и увеличение давления на закрытом конце трубы. В явном виде такие формулы не получены, однако приведены обыкновенные дифференциальные уравнения, из решения которых можно получить соответствующие зависимости.

1. Разложения решения в особых точках. Уменьшим количество параметров задачи с помощью замены переменных $x \rightarrow xl$, $t \rightarrow m\mu l^2(kp_0)^{-1}t$, $p \rightarrow p_0p$. Задача принимает вид

$$p_t = (pp_x)_x, \quad 0 < x < 1; \tag{1.1}$$

$$p(0, x) = 1, \quad 0 \leq x < 1, \quad p_x(0, 1) = U = u_0lp_0^{-1};$$

$$p(t, 1) = P = p_1p_0^{-1}, \quad p_x(t, 0) = 0. \tag{1.2}$$

В окрестности точки $x = 0$ гладкое решение задачи представляется в виде ряда

$$p = p_0 + \sum_{k \geq 1} p_k(t)x^k, \quad p_0(t) \neq 0.$$

Подстановка ряда в (1.1), (1.2) позволяет определить коэффициенты ряда через одну произвольную функцию $p_0(t)$: коэффициенты с нечетными номерами равны нулю, с четными — определяются выражениями

$$p_2 = \frac{p_0'}{2p_0}, \quad p_4 = \frac{p_0''}{24p_0^2} - \frac{p_0'^2}{6p_0^3}, \quad \dots$$

Решение задачи имеет один непротиворечивый сценарий. Точка выравненного давления $p = P$, или точка начала фильтрации, движется по закону $\mu = \mu(t)$, ударная волна (разрыв давления и скорости фильтрации) — по закону $\lambda = \lambda(t)$. В интервале $0 \leq x \leq \lambda(t)$ имеется гладкое решение $p = \tilde{p}^1$ перед ударной волной. Гладкое решение $p = \tilde{p}$ за ударной волной сопрягается в точке $x = \nu(t)$ с гладким решением, построенным в точке $\mu(t)$. В точке сопряжения непрерывных решений скорость фильтрации p_x совпадает со скоростью движения точки сопряжения (рис. 1).

В окрестности точки $x = \lambda(t)$ решение задачи представляется в виде ряда

$$p = \tilde{p}_0^i(t) + \sum_{k \geq 1} \tilde{p}_k^i(t)(x - \lambda)^k,$$

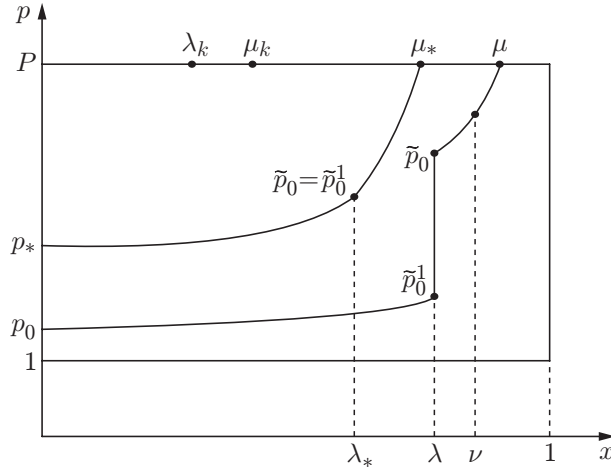


Рис. 1. Эпюры давления в различные моменты времени

где индекс $i = 1$ соответствует решению перед ударной волной, а его отсутствие — решению за ударной волной. Подстановка ряда в (1.1) позволяет определить коэффициенты разложения через две произвольные функции $\tilde{p}_0^i, \tilde{p}_1^i$:

$$\tilde{p}_2^i = \frac{\tilde{p}_0^{i'} - \tilde{p}_1^i(\lambda' + \tilde{p}_1^i)}{2\tilde{p}_0^i}, \quad \tilde{p}_3^i = \frac{\tilde{p}_1^{i'} - 2\tilde{p}_2^i(\lambda' + 3\tilde{p}_1^i)}{6\tilde{p}_0^i}, \quad \dots$$

В момент исчезновения скачка получается разложение

$$p = \tilde{p}_0 - \lambda'(x - \lambda) + \frac{\tilde{p}_0'}{2\tilde{p}_0}(x - \lambda)^2 + \frac{2\lambda'\tilde{p}_0' - \lambda''\tilde{p}_0}{6\tilde{p}_0^2} + \dots$$

В окрестности точки начала фильтрации $x = \mu(t)$ решение уравнения (1.1) представляется в виде ряда

$$p = P - \mu'(x - \mu) + \sum_{k \geq 2} p_k(t)(x - \mu)^k,$$

коэффициенты которого определяются из (1.1), (1.2):

$$p_2 = 0, \quad p_3 = -\frac{\mu''}{6P}, \quad p_4 = -\frac{\mu'\mu''}{8P^2}, \quad \dots$$

В окрестности движущейся точки сопряжения гладких решений решение представляется в виде ряда

$$p = p_0^* + \sum_{k \geq 1} p_k^*(t)(x - \nu)^k.$$

Подставляя ряд в (1.1), для коэффициентов получаем равенства

$$\begin{aligned} p_0^{*'} &= \nu' p_1^* + 2p_0^* p_2^* + p_1^{*2}, & p_1^{*'} &= 2p_2^*(\nu' + 3p_1^*) + 6p_0^* p_3^*, \\ p_2^{*'} &= 12p_0^* p_4^* + 3p_3^*(\nu' + 4p_1^*) + 6p_2^{*2}, & \dots \end{aligned} \tag{1.3}$$

В случае если точка $x = \nu(t)$ является точкой перегиба кривой давления, равенство $p_2^* = 0$ и соотношения (1.3) принимают вид

$$p_0^{*'} = p_1^*(\nu' + p_1^*), \quad p_1^{*'} = 6p_0^* p_3^*, \quad 4p_0^* p_4^* + p_3^*(\nu' + 4p_1^*) = 0. \tag{1.4}$$

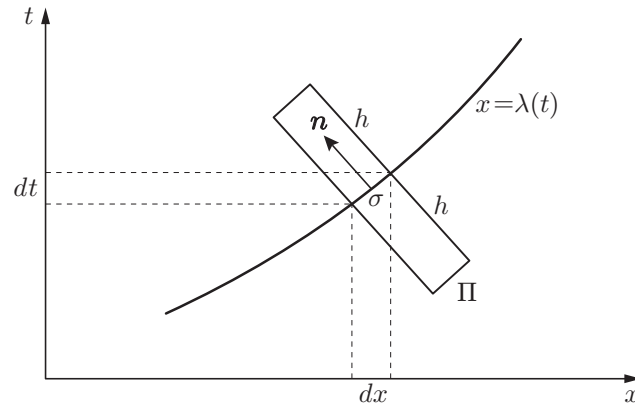


Рис. 2. Область интегрирования на сильном разрыве

2. Условия на сильном разрыве. Уравнение (1.1) имеет дивергентный вид, так как записано в виде закона сохранения. Можно рассмотреть обобщенное решение, имеющее разрыв первого рода на линии $x = \lambda(t)$. Для получения условий на разрыве строится прямоугольник Π высотой h на произвольном элементе дуги σ с нормальным вектором $\mathbf{n} = (-dt, dx)$ (рис. 2).

В результате интегрирования уравнения (1.1) по прямоугольнику имеем

$$\iint_{\Pi} (p_t - (pp_x)_x) d\Pi = \oint_{\Gamma} (-pp_x, p)(-dt, dx) d\Gamma = 0,$$

где Γ — граница прямоугольника. В силу произвольности σ переход к пределу при $h \rightarrow 0$ позволяет получить соотношение

$$[pp_x] + \lambda'[p] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{p}_0^1 \tilde{p}_1^1 - \tilde{p}_0 \tilde{p}_1 + \lambda'(\tilde{p}_0^1 - \tilde{p}_0) = 0. \quad (2.1)$$

Закон сохранения (1.1) позволяет ввести потенциал $p = \varphi_x$, $pp_x = \varphi_t$. Поскольку уравнение для потенциала имеет вид закона сохранения

$$\varphi_t = (2^{-1} \varphi_x^2)_x,$$

справедливы дополнительные условия на разрыве

$$[p^2] + 2\lambda'[\varphi] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\tilde{p}_0^1)^2 - (\tilde{p}_0)^2 + 2\lambda'(\tilde{\varphi}_0^1 - \tilde{\varphi}_0) = 0. \quad (2.2)$$

Дифференцируя по t равенство (2.2), в силу (2.1) получаем соотношение

$$\lambda'[p^2]' = \lambda''[p^2],$$

из которого следует еще одно соотношение на разрыве

$$[\tilde{p}_0^2] = (\tilde{p}_0^1)^2 - (\tilde{p}_0)^2 = C\lambda' \quad (2.3)$$

с неопределенной постоянной C .

3. Интегральные соотношения. Интегрируя уравнение (1.1), умноженное на x , по интервалу перед скачком, получаем

$$\int_0^\lambda x p_t dx = \frac{d}{dt} \int_0^\lambda x p dx - \lambda \lambda' \tilde{p}_0^1 = x p p_x \Big|_0^\lambda - 2^{-1} p^2 \Big|_0^\lambda. \quad (3.1)$$

Из (3.1) следует интегральное соотношение

$$\frac{d}{dt} \int_0^\lambda xp dx = 2^{-1}(p_0^2 - (\tilde{p}_0^1)^2). \quad (3.2)$$

Интегрируя уравнение (1.1), умноженное на x , по интервалу $\lambda < x < \mu$ за скачком, получаем

$$\int_\lambda^\mu xp_t dx = \frac{d}{dt} \int_\lambda^\mu xp dx - \mu\mu'P + \lambda\lambda'\tilde{p}_0 = xpp_x \Big|_\lambda^\mu - 2^{-1}p^2 \Big|_\lambda^\mu.$$

Отсюда следует интегральное соотношение

$$\frac{d}{dt} \int_\lambda^\mu xp dx = 2^{-1}((\tilde{p}_0)^2 - P^2) - \lambda\tilde{p}_0(\tilde{p}_1 + \lambda'),$$

которое можно разделить на два соотношения:

$$\frac{d}{dt} \int_\lambda^\nu xp dx = \nu p_0^*(\nu' + p_1^*) + 2^{-1}(\tilde{p}_0^2 - p_0^{*2}) - \lambda\tilde{p}_0(\tilde{p}_1 + \lambda'); \quad (3.3)$$

$$\frac{d}{dt} \int_\nu^\mu xp dx = -\nu p_0^*(\nu' + p_1^*) + 2^{-1}(p_0^{*2} - P^2). \quad (3.4)$$

4. Фильтрация газа при наличии ударной волны. Пусть перед скачком задано приближение

$$p = p_0 + \frac{p'_0}{2p_0} x^2.$$

Тогда

$$\tilde{p}_0^1 = p_0 + \frac{p'_0}{2p_0} \lambda^2 \quad \Rightarrow \quad p'_0(0) = 0, \quad \tilde{p}_1^1 = \frac{p'_0}{p_0} \lambda.$$

Из интегрального соотношения (3.2) следует равенство

$$\lambda^2(p_0^2 + 4^{-1}p'_0\lambda^2) = 1. \quad (4.1)$$

Пусть в окрестности точки начала фильтрации задано приближение

$$p = P - \mu'(x - \mu) - \frac{\mu''}{6P} (x - \mu)^3, \quad (4.2)$$

а за скачком — приближение в виде

$$p = \tilde{p}_0 + \tilde{p}_1(x - \lambda) + \frac{\tilde{p}'_0 - \tilde{p}_1(\lambda' + \tilde{p}_1)}{2\tilde{p}_0} (x - \lambda)^2. \quad (4.3)$$

Поскольку интенсивность скачка затухает, скорость фильтрации за ним уменьшается: $\tilde{p}_2 > 0$, $(-\mu')' < 0 \Rightarrow \mu'' > 0$. Эпюры давления выпуклы в направлении вниз. В точке сопряжения формул (4.2), (4.3) вторые производные имеют разрыв, поэтому сравниваются значения давлений и их первых производных:

$$p_0^* = \tilde{p}_0 + \tilde{p}_1(\nu - \lambda) + \frac{\tilde{p}'_0 - \tilde{p}_1(\lambda' + \tilde{p}_1)}{2\tilde{p}_0} (\nu - \lambda)^2 = P - \mu'(\nu - \mu) - \frac{\mu''}{6P} (\nu - \mu)^3; \quad (4.4)$$

$$p_1^* = \tilde{p}_1 + \frac{\tilde{p}'_0 - \tilde{p}_1(\lambda' + \tilde{p}_1)}{\tilde{p}_0} (\nu - \lambda) = -\mu' - \frac{\mu''}{2P} (\nu - \mu)^2. \quad (4.5)$$

Отсюда следует равенство

$$2\tilde{p}_0 + \tilde{p}_1(\nu - \lambda) = 2P + (2\mu - \nu - \lambda) \left(\mu' + \frac{\mu''}{2P} (\nu - \mu)^2 \right).$$

В случае если точка $x = \nu(t)$ является точкой уплощения $p_2^* = 0$, с использованием формул (1.4), (4.4), (4.5) получаем уравнение

$$\mu'''(\nu - \mu)^2 + \frac{\mu''^2}{2P} (\nu - \mu)^3 + \mu''(\nu - \mu)(3\nu' - \mu') + 2P\mu'' = 0. \quad (4.6)$$

Из интегрального соотношения (3.4) следует уравнение

$$5^{-1}\mu'''(\mu - \nu)(\mu + 4\nu) = P^{-1}\mu''^2(\mu - \nu)^2(3\mu - \nu) + \mu''\mu'(11\mu + \nu) + 8P\mu'' \quad (4.7)$$

с начальными условиями $\mu(0) = 1$, $\mu'(0) = U$, $\mu''(0) = 0$. Из уравнения (4.6) или (4.7) получаем

$$\mu'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = 1 + tU.$$

Из равенств (4.4), (4.5) следует

$$\tilde{p}_0 = P - 2^{-1}\tilde{p}_1(\nu - \mu) - 2^{-1}U(\nu + \lambda - 2\mu); \quad (4.8)$$

$$\tilde{p}'_1(\nu - \lambda)^2 + \tilde{p}_1(\nu - \lambda)(3\tilde{p}_1 + \lambda' + \nu' + U) = (\tilde{p}_1 + U)(2P - U(\nu + \lambda - 2\mu)). \quad (4.9)$$

Соотношения на ударной волне (2.1), (2.3) принимают вид

$$(2 + p_0^{-2}\lambda^2 p_0')(\lambda p_0)' = (\tilde{p}_1 + \lambda')(2P - \tilde{p}_1(\nu - \lambda) - U(\nu + \lambda - 2\mu)); \quad (4.10)$$

$$(p_0 + 2^{-1}p_0^{-1}p_0'\lambda^2)^2 - (P - 2^{-1}\tilde{p}_1(\nu - \lambda) - 2^{-1}U(\nu + \lambda - 2\mu))^2 = C\lambda'. \quad (4.11)$$

Уравнения (4.1), (4.9), (4.10), (4.11) для определения функций ν , λ , p_0 , \tilde{p}_1 являются приближенной замкнутой подмоделью движения ударной волны в пористой среде, насыщенной газом. После исключения производных уравнение (4.10) становится конечным соотношением для искомых величин. Эта подмодель сложна для исследования. В начальный момент времени из (4.8), (4.10), (4.11) определяются постоянные

$$\tilde{p}_1(0) = -U, \quad \lambda'(0) = U(P - 1)^{-1}, \quad C = -P^{-1}U^{-1}(P - 1)^2(P + 1).$$

Интегрируя соотношение (3.3), получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [U(\nu - \lambda)(9\nu^2 + 10\nu\lambda + 5\lambda^2 - 12\mu(\nu + \lambda) + \tilde{p}_1(\nu - \lambda)^2(3\lambda + \nu))] = \\ = 12P(\nu + \lambda)(\tilde{p}_1 + U) - 3\tilde{p}_1^2(\nu - \lambda)(\nu + 3\lambda) + 6U\tilde{p}_1(2\mu - \lambda - \nu)(\nu + \lambda) - \\ - 12\lambda\lambda'\tilde{p}_1(\nu - \lambda) + 24U\nu\nu'(\nu - \mu) - 12U\lambda\lambda'(\nu + \lambda - 2\mu) - \\ - 3U^2(5\nu^2 + 2\nu\lambda + \lambda^2 - 4\mu(\lambda + \nu)), \end{aligned}$$

которое можно использовать вместо (4.11) в качестве другого приближения. Это уравнение тождественно выполняется при $\nu = \lambda$, так как из (4.5) следует $\tilde{p}_1 + U = 0$. Получаем линейное приближение за ударной волной. В этом случае уравнение (4.9) выполняется, а уравнение (4.10) имеет интеграл

$$p_0\lambda[2^{-1}U(\lambda - \mu)^2 - P(\lambda - \mu)] = (p_0\lambda - 1)(p_0\lambda - 2). \quad (4.12)$$

Качественно поведение подмодели (4.1), (4.12) можно оценить для случая сильных ударов с малым параметром $\varepsilon = UP^{-1}$ и новой функцией $q = p_0\lambda$. Представление решений в виде $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \dots$, $q = q_0 + \varepsilon q_1 + \dots$ позволяет получить для подмодели нулевое приближение

$$Pq_0(1 - \lambda_0) = (q_0 - 1)(q_0 - 2), \quad 4(1 - q_0^2) = \lambda^2(\lambda_0 q_0' - q_0 \lambda')$$

с начальными данными $q_0(0) = 1$, $\lambda_0(0) = 1$. Решение имеет вид $\lambda_0 = q_0 = 1$. Первое приближение удовлетворяет уравнениям

$$P\lambda_1 = q_1 + P^2t, \quad \lambda_1' = q_1' + 8q_1$$

с начальными условиями $q_1(0) = \lambda_1(0) = 0$. Решение имеет вид

$$q_1 = 8^{-1}P(1 - e^{-t\omega}), \quad \lambda_1 = Pt + 8^{-1}(1 - e^{-t\omega}), \quad \omega = 8P(P - 1)^{-1}.$$

Условие исчезновения скачка давления принимает вид

$$\tilde{p}_0^1 = \tilde{p}_0 \Rightarrow p_0 + 2^{-1}p_0^{-1}p_0'\lambda^2 = P + U(1 + Ut - \lambda).$$

В переменных λ , q условие записывается в виде

$$q(2 - q^2) = \lambda q^2 P(1 + \varepsilon(1 - \lambda) + \varepsilon^2 Pt).$$

С точностью до первого приближения получаем уравнение для определения момента исчезновения скачка t_* :

$$P - 1 = -U[Pt + 4^{-1}(P + 1)(1 - e^{-t\omega})] \sim -UPt(3P + 1)(P - 1)^{-1}.$$

Следовательно,

$$t_* = -U^{-1}P^{-1}(3P + 1)^{-1}(P - 1)^2 < -3^{-1}U^{-1}.$$

Таким образом, скачок исчезает за время, меньшее $-(3U)^{-1}$. При этом область исчезновения вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \lambda_* &= 1 + \varepsilon\lambda_1(t_*) = 1 + Ut_* + 8^{-1}\varepsilon(1 - e^{-t_*\omega}) \sim \\ &\sim 1 + t_*PU(P - 1)^{-1} = 2(P + 1)(3P + 1)^{-1} > 2/3. \end{aligned}$$

Расстояние, пройденное ударной волной, равно

$$1 - \lambda_* = (p - 1)(3P + 1)^{-1} < 1/3.$$

Скачок затухает на расстоянии, меньшем $1/3$ длины пористой трубы. После этого необходимо рассматривать гладкое решение с начальными данными

$$\begin{aligned} \lambda_*(t_*) &= \lambda_*, \quad \mu(t_*) = 1 + Ut_* = \mu_*, \quad p_0(t_*) = p_* = q_*\lambda_*^{-1}, \\ q(t_*) &= 1 + \varepsilon q_1(t_*) = q_*, \quad \mu'(t_*) = U. \end{aligned} \quad (4.13)$$

5. Фильтрация газа без ударной волны. В случае если в некоторой точке λ выполняется равенство $\tilde{p}_0 = \tilde{p}_0^1$, из (2.1) следует $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_1^1$ и точка λ становится точкой сопряжения представлений гладкого решения.

Приближения с точностью до четвертого порядка имеют следующий вид:

— в точке $x = \mu$

$$p = P - \mu'(x - \mu) - (6P)^{-1}\mu''(x - \mu)^3;$$

— в точке $x = \lambda$

$$p = \tilde{p}_0 - \lambda'(x - \lambda) + (2\tilde{p}_0)^{-1}\tilde{p}_0'(x - \lambda)^2 + (6\tilde{p}_0^2)^{-1}(2\lambda'\tilde{p}_0' - \lambda''\tilde{p}_0)(x - \lambda)^3;$$

— в точке $x = 0$

$$p = p_0 + (2p_0)^{-1}p_0'x^2.$$

В точке сопряжения выполняются равенства

$$\begin{aligned} \tilde{p}_0 &= p_0 + (2p_0)^{-1}\lambda^2 = P - \mu'(\lambda - \mu) - (6P)^{-1}\mu''(\lambda - \mu)^3, \\ -\lambda' &= p_0^{-1}p_0'\lambda = -\mu' - (2P)^{-1}\mu''(\lambda - \mu)^2, \end{aligned} \quad (5.1)$$

которые определяют замкнутую подмодель с начальными условиями (4.13). Равенства (5.1) интегрируются:

$$\lambda p_0 = \lambda_* p_* = q_*, \quad (2P)^{-1}(\mu' - U) = (\mu - \lambda)^{-1} - (\mu_* - \lambda_*)^{-1}, \quad (5.2)$$

оставшееся уравнение принимает вид

$$6q_*\lambda^{-1} - 14P = \lambda'(2\mu + \lambda) + 4(U - 2P(\mu_* - \lambda_*)^{-1})(\mu - \lambda). \quad (5.3)$$

Движение заканчивается в момент t_k , когда $p_0 = P$, $\mu'(t_k) = \lambda'(t_k) = 0$. Тогда из (5.2), (5.3) следует

$$\lambda_k = \lambda(t_k) = q_* P^{-1}, \quad \mu_k = \mu(t_k) = q_* P^{-1} + 2P(\mu_* - \lambda_*)(2P - U(\mu_* - \lambda_*))^{-1}.$$

Автономная система (5.2), (5.3) сводится к уравнению

$$\frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{(\mu - \lambda)[(3\lambda_k - 7\lambda)(\mu_k - \lambda_k) + 4\lambda(\mu - \lambda)]}{\lambda(\lambda + 2\mu)(\lambda - \mu + \mu_k - \lambda_k)}, \quad (5.4)$$

имеющему четыре особые точки:

- 1) $\lambda = \mu = 0$;
- 2) $\lambda = -2\mu_{\pm}$, $\mu = \mu_{\pm} = 4^{-1}(\mu_k - \lambda_k)(7/6 \pm \sqrt{49/36 + 2\lambda_k(\mu_k - \lambda_k)^{-1}})$;
- 3) $\lambda = \lambda_k$, $\mu = \mu_k$.

Только последняя точка лежит в области определения решения задачи: $0 < \lambda < 1$, $0 < \mu < 1$. Точка (μ_k, λ_k) является узлом, поэтому существует единственная интегральная кривая уравнения (5.4), соединяющая точки (μ_k, λ_k) и (μ_*, λ_*) . Касательная семейства интегральных кривых задается формулой

$$\lambda - \lambda_k = a_+(\mu - \mu_k).$$

Касательная одиночной кривой, входящей в узел, задается уравнением

$$\lambda - \lambda_k = a_-(\mu - \mu_k),$$

где

$$a_{\pm} = \frac{2\delta^2 + 4\delta - 3 \pm \sqrt{3(3 - 8\delta + 12\delta^2 - 4\delta^4)}}{2\delta(2 + \delta)}, \quad \lambda_k = \delta\mu_k.$$

Таким образом, с использованием решения уравнения (5.4), соединяющего точки (μ_k, λ_k) , (μ_*, λ_*) , и уравнений (5.2) можно определить движение точки начала фильтрации $\mu(t)$ (см. рис. 1) и закон увеличения давления на закрытом конце трубы $p_0(t)$. Из решения $\mu(t)$ определяется время выравнивания давления $\mu(t_k) = \mu_k$.

Заключение. Получены приближенные подмодели, описывающие затухание ударной волны в пористой среде, насыщенной газом и заполняющей конечную трубу с одним закрытым концом. Получено приближенное решение для сильной ударной волны. Доказано, что ударная волна затухает на конечном расстоянии, меньшем $1/3$ длины трубы. Гладкое выравнивание давления после исчезновения ударной волны описывается приближенной подмоделью (5.2), (5.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Баренблатт Г. И.** Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик. М.: Недра, 1972.
2. **Лейбензон Л. С.** Движения газа в пористой среде // Нефт. хоз-во. 1930. № 8/9. С. 181–197.
3. **Vazquez J. L.** The porous medium equation. Mathematical theory. Oxford: Clarendon Press, 2007.
4. **Калашников А. С.** Некоторые задачи качественной теории нелинейных вырожденных параболических уравнений второго порядка // Успехи мат. наук. 1987. Т. 42, № 2. С. 135–176.
5. **Carrillo J. A., Caselles V., Moll S.** On the relativistic heat equation in one space dimension // Proc. London Math. Soc. 2013. V. 3, N 6. P. 1395–1423.

*Поступила в редакцию 21/IV 2015 г.,
в окончательном варианте — 24/IX 2015 г.*
