

О МЕХАНИЗМАХ РАСПАДА КАПЛИ, ДВИЖУЩЕЙСЯ В ГАЗОВОМ ПОТОКЕ

В. А. Бородин, Ю. Ф. Дитякин, В. И. Ягодкин

(Москва)

В работе [1] была сделана попытка теоретического изучения неустойчивых осесимметричных форм возмущений сферической капли идеальной жидкости, обтекаемой потоком другой идеальной жидкости, приводящих к ее распаду. Для решения этой задачи использовался метод малых возмущений.

Были найдены критические значения числа Вебера, а также определены формы нейтральных возмущений. Ниже рассматривается случай нарастающих возмущений, а также их формы для различных значений числа Вебера.

Согласно гипотезе Релея, из всех возможных форм нарастающих возмущений в действительности осуществляется форма, имеющая наибольшее значение инкремента  $Z = -a^3 \rho_1 \beta^2 / T$ , где  $a$  — радиус капли,  $\rho_1$  — плотность жидкости капли,  $T$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $\beta$  в данной задаче — чисто мнимая частота колебаний [1]; поэтому для определения формы возмущения при заданном значении  $Z$  из уравнения собственных значений следует находить наименьшее значение числа Вебера  $W = \rho_2 a U^2 / T$ , так как значения  $Z$  монотонно возрастают с ростом  $W$ ; здесь  $\rho_2$  — плотность среды,  $U$  — относительная скорость капли.

В работе [1] получена система уравнений

$$a_n = \alpha_n a_{n-2} + \beta_n a_{n+2} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

где

$$\alpha_n = -\frac{c_{n, n-2}}{c_{n, n}}, \quad \beta_n = -\frac{c_{n, n+2}}{c_{n, n}} \quad (2)$$

$$c_{n, n} = Z + R_n - A_n W, \quad c_{n, n-2} = C_{n-2} W, \quad c_{n, n+2} = B_n W,$$

$$A_n = \frac{9}{2} \frac{n^2 (n+1) (2n^2 + n - 2)}{(4n^2 - 1) (2n + 3)}, \quad C_{n-2} = \frac{9}{4} \frac{(n-1)^2 (n-2)^2}{(2n-1) (2n-3)}$$

$$B_n = \frac{9}{4} \frac{(n+1) (n+2)^2 (n+3)}{(2n+3) (2n+5)}, \quad R_n = n (n-1) (n+2)$$

из которой после исключения постоянных получено уравнение собственных значений задачи.

Система уравнений (1) распадается на две системы:

$$\begin{array}{ll} n = 2k & (k = 1, 2, \dots), & n = 2k + 1 & (k = 0, 1, 2, \dots) \\ a_2 = \beta_2 a_4, & & a_1 = \beta_1 a_3 \\ a_4 = \alpha_4 a_2 + \beta_4 a_6, & & a_3 = \alpha_3 a_1 + \beta_3 a_5 \\ \dots & & \dots \\ a_{2k} = \alpha_{2k} a_{2k-2} + \beta_{2k} a_{2k+2}, & & a_{2k+1} = \alpha_{2k+1} a_{2k-1} + \beta_{2k+1} a_{2k+3} \end{array} \quad (3)$$

Уравнение, соответствующее  $k = 0$ , может быть отброшено, так как  $\alpha_2 = 0$ , и в уравнение узловых линий на возмущенной поверхности капли  $a_0$  не входит. Остальные коэффициенты однозначно определяются через  $a_2$ .

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \frac{a_{2k+1}}{a_1} &= \alpha_3 \alpha_5 \dots \alpha_{2k+1} s_{2k+1}, & \gamma_{2k+1} &= \alpha_{2k+1} \beta_{2k-1} & (k=0, 1, 2, \dots) \\ \frac{a_{2k}}{a_2} &= \alpha_4 \alpha_6 \dots \alpha_{2k} s_{2k}, & \gamma_{2k} &= \alpha_{2k} \beta_{2k-2} & (k=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда системы (3) представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} 1 &= \gamma_3 s_3, & 1 &= \gamma_4 s_4 \\ s_3 &= 1 + \gamma_5 s_5, & s_4 &= 1 + \gamma_6 s_6 \\ s_5 &= s_3 + \gamma_7 s_7, & s_6 &= s_4 + \gamma_8 s_8 \\ \dots & & \dots & \\ s_{2k+1} &= s_{2k-1} + \gamma_{2k+3} s_{2k+3}, & s_{2k} &= s_{2k-2} + \gamma_{2k+2} s_{2k+2} \end{aligned} \quad (5)$$

Величины  $\gamma_{2k+3}$  и  $\gamma_{2k+2}$  с увеличением  $k$ , как показали проведенные расчеты, быстро уменьшаются, поэтому для облегчения вычислений удобно применить цепные дроби.

В уравнениях (5) для некоторого достаточно большого  $k$  положим  $\gamma_{2k+3} = 0$ ,  $\gamma_{2k+2} = 0$ . Тогда для  $s_3$  и  $s_4$  получим выражения в виде цепных дробей

$$s_3 = \frac{1}{1 - \frac{\gamma_5}{1} - \frac{\gamma_7}{1} - \dots}, \quad s_4 = \frac{1}{1 - \frac{\gamma_6}{1} - \frac{\gamma_8}{1} - \dots} \quad (6)$$

Общие решения систем (5) в цепных дробях имеют вид

$$\begin{aligned} s_{2k+1} &= s_{2k-1} \left( \frac{1}{1} - \frac{\gamma_{2k+3}}{1} - \frac{\gamma_{2k+5}}{1} - \dots \right) \\ s_{2k} &= s_{2k-2} \left( \frac{1}{1} - \frac{\gamma_{2k+2}}{1} - \frac{\gamma_{2k+4}}{1} - \dots \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Определяя  $s_3$  и  $s_4$  из первых уравнений систем (5) и подставляя их в уравнения (6), получим уравнения собственных значений задачи, написанные в цепных дробях

$$1 = \frac{\gamma_3}{1} - \frac{\gamma_5}{1} - \frac{\gamma_7}{1} - \dots, \quad 1 = \frac{\gamma_4}{1} - \frac{\gamma_6}{1} - \frac{\gamma_8}{1} - \dots \quad (8)$$

Из уравнений (2) и (3) легко получить выражения для величин  $\gamma_j$

$$\begin{aligned} \gamma_{2k+1} &= \frac{B_{2k+1} C_{2k+1} W^2}{(Z + R_{2k+1} - A_{2k+1} W)(Z + R_{2k-1} - A_{2k-1} W)} \\ \gamma_{2k} &= \frac{B_{2k-2} C_{2k-2} W^2}{(Z + R_{2k} - A_{2k} W)(Z + R_{2k-2} - A_{2k-2} W)} \end{aligned} \quad (9)$$

Задавая значения безразмерного инкремента  $Z$  и отыскивая значения наименьших корней  $W$  уравнений (8), можно установить зависимости наименьших корней  $W$  от  $Z$  для обеих систем уравнений (3). Произведенные вычисления дали зависимости, изображенные на фиг. 1 в логарифмических координатах. На фиг. 2 приведены формы возмущений, соответствующие вычисленным значениям  $W$  и  $Z$ .

Далее были выполнены расчеты форм возмущений, обладающих наибольшим инкрементом, для различных значений  $W$  по формуле скорости поднятия поверхности капли [1]

$$v_{r_1} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} n a_n P_n(x) e^{-i\beta t} \quad (10)$$

Коэффициенты уравнений вычислялись по формулам (4) — (7).

Как видно из фиг. 1 и 2, для значений числа Вебера  $1.63 < W < 1000$  возможны три формы нарастающих возмущений. При  $1.63 < W < 4$  возникает форма с двумя узловыми линиями (при этом  $n$  — четное).

При  $4 < W < 5$  происходит переход от указанной формы к форме с четырьмя узловыми линиями. Наконец, при  $W > 5$  наиболее быстро растущей формой возмущений будет форма с одной узловой линией ( $n$  — нечетное).

Форма с двумя узловыми линиями, по-видимому, может привести к образованию двух капель по направлению потока или одного тора. Критическим значением  $W$  для этой формы будет  $W = 1.63$ , что подтверждается работой [2].

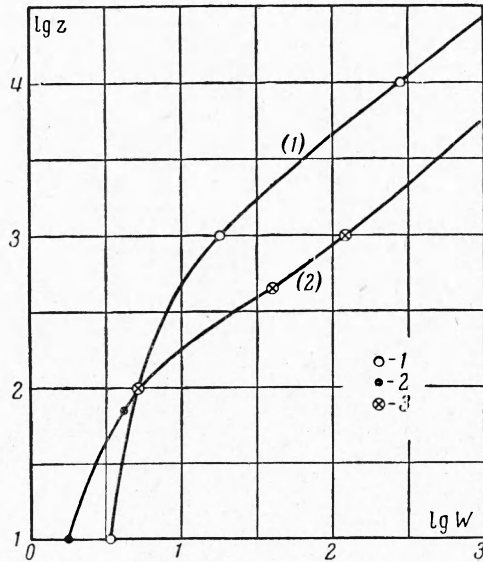
Форма с четырьмя узловыми линиями может существовать в узком интервале значений числа Вебера и поэтому вероятность ее действительного появления весьма мала. Эта форма

могла бы привести к образованию двух капель и тора или двух торов.

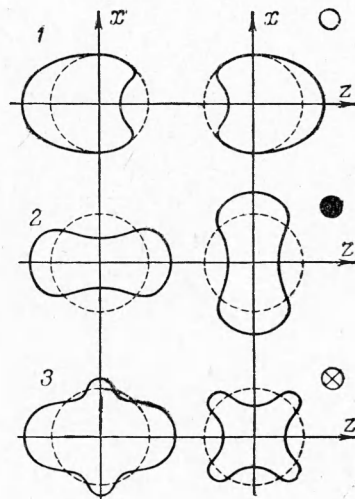
Форма с одной узловой линией может, по-видимому, привести к образованию «мешка». Действительно, подобные формы наблюдались (фотоснимок на фиг. 3) как раз при  $W \geq 5$  в работе [3].

Двойственность теоретических форм (фиг. 2) следует из того, что линейная постановка задачи дает решение с произвольным множителем неопределенного знака. На самом деле деформация капли должна происходить так, чтобы энергия капли увеличивалась за счет энергии потока. Для этого необходимо, чтобы в точках поверхности капли, где давление максимально, скорость деформации была направлена внутрь капли. Тогда осуществляется форма, изображенная на фиг. 2 справа для случая четного  $n$ . При  $n$  нечетном в рамках теории идеальной жидкости обе формы равноценны (следствие парадокса Даламбера—Эйлера). Однако на самом деле давление на переднюю сторону капли больше, и это должно привести к образованию «мешка», вытянутого по потоку (фиг. 3).

Таким образом, из полученных выводов о различных формах возмущений, возникающих при движении жидкой сферической капли в среде



Фиг. 1



Фиг. 2

другой жидкости, становится очевидным, что существенную роль в процессе распада такой капли должны играть явления колебания и разрыва на части жидкого тора.

Форма с одной узловой линией приводит к такому кольцу с «мешком» из весьма тонкой пленки (фиг. 3), который в дальнейшем разрывается на множество мелких капель, а кольцо превращается в тор, делящийся на две крупные капли и много мелких.

Форма с двумя узловыми линиями также приводит к тору, но без замыкающего «мешка».

На фиг. 4 приведены последовательные кадры движения капли чернил, опускающейся в воде (фотографирование производилось сверху). Видно, что из капли чернил возникает тор, на котором далее образуются пучности, и он разрывается на капли, каждая вновь превращается в тор, на котором снова возникают пучности, и т. д.

Следует обратить внимание на то, что число пучностей, возникающих на торе, может быть две, три и более; оно уменьшается с уменьшением диаметра тора.

Вопрос о колебаниях и разрыве жидкого тора рассмотрен, по-видимому, лишь в работе С. Ока [4]. Весьма сложный расчет числа капель, на которые распадается неподвижный тор, в зависимости от отношения радиуса тора  $R$  к радиусу его поперечного сечения  $r$  был им произведен лишь для значений  $R/r \geq 5$ ; в работе [4] приведены следующие значения:

$R/r = 5$	6	7	8	9	10	11	12
$m = 3$	4	5	6	6	7	8	8

Из данной там же формулы следует, что при  $R/r = 3 \div 4$   $m = 2$ .

Эти результаты могут быть получены из следующих элементарных соображений.

Если отношение  $R/r$  велико, то дробление тора можно рассматривать как дробление прямолинейной цилиндрической струи круглого сечения при условии, что на длине  $2\pi R$  укладывается целое число волн  $m$ .

Так как согласно работе Релея [5] максимум неустойчивости соответствует  $2\pi r/\lambda = 0.697$ , то при условии  $m\lambda = 2\pi R$  получаем

$$m = \{0.697 R/r\} \quad (11)$$

Здесь символ  $\{x\}$  означает ближайшее к  $x$  целое число. Формула (11) дает все вышеприведенные значения  $m$ , а также значения  $m = 2$  и  $3$  для  $R/r = 3$  и  $4$ . Изложенное показывает, что учет тороидальности не оказывает влияния на число образующихся из тора капель. Легко видеть, что деление тора возможно:

на две капли при выполнении неравенств

$$R/r \geq 2/0.697 = 2.87 \quad \text{или} \quad R/a > 1.2 \quad (12)$$

на три капли при выполнении неравенств

$$R/r > 3/0.697 = 4.3 \quad \text{или} \quad R/a > 1.58 \quad (13)$$

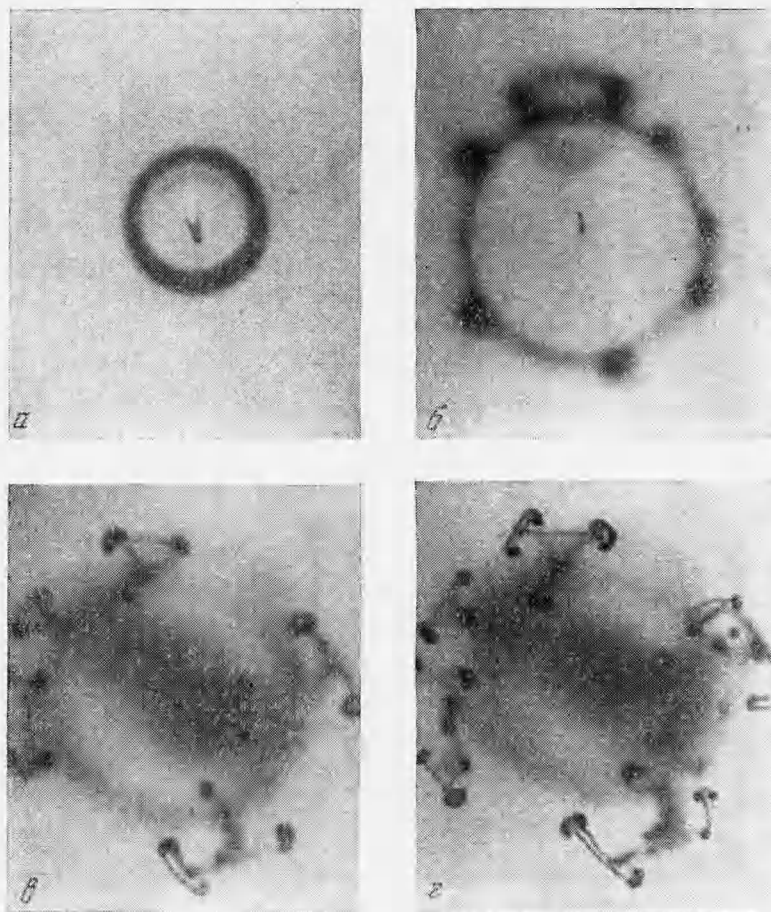
Здесь  $a$  — радиус исходной капли.

Сравнение этих результатов с опытами, приведенными выше, может быть сделано лишь для очень медленно движущихся торов. Так на фиг. 4е



Фиг. 3

видно, что отношение  $R/a$  для случая деления тора на три капли приблизительно равно двум. То обстоятельство, что в опытах отношение  $R/a$



Фиг. 4

значительно больше, чем по формулам (12) и (13), по-видимому, объясняется влиянием поперечного обтекания нити на длину максимально растущего возмущения.

Поступила 16 XII 1963

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бородин В. А. Дитякин Ю. Ф., Ягодкин В. И. О дроблении сферической капли в газовом потоке. ПМТФ, 1962, № 1.
2. Бухман С. В. Экспериментальное исследование распада капель. Вестн. АН Казахской ССР, 1954, № 11.
3. Лапе W. R. Shatter of Drops in streams of Air. Ind. Eng. Chem., 1951, vol. 43, No. 6.
4. Ока S. On the Instability and Breaking up of a Ring of Liquid into small Drops Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, Third ser., 1936, vol. 18, No. 9.
5. Ламб Г. Гидродинамика. Огиз ТТЛ, М. — Л., 1947.