

УДК 519.6

Адаптивные сетки и высокоточные схемы для решения сингулярно-возмущенных задач*

В.Д. Лисейкин^{1,2}, В.И. Паасонен^{1,2}

¹Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

²Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

E-mails: lvd@ict.nsc.ru (Лисейкин В.Д.), paas@ict.nsc.ru (Паасонен В.И.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 1, Vol. 14, 2021.

Лисейкин В.Д., Паасонен В.И. Адаптивные сетки и высокоточные схемы для решения сингулярно-возмущенных задач // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2021. — Т. 24, № 1. — С. 77–92.

Сетки, сгущающиеся в слоях, являются важным компонентом комплексов программ для расчета реальных задач с особенностями в виде узких зон резкого изменения решения, так как они могут существенно повысить эффективность использования компьютерных ресурсов. В данной работе описывается явный подход к генерации сеток с разрешением слоев, ориентированный на применение разностных схем различных порядков аппроксимации. Эта технология основана на качественных оценках старших производных решений в слоях одномерных сингулярно-возмущенных задач и является обобщением подхода, ранее разработанного для схемы первого порядка точности. Сгущающиеся в слоях сетки, предлагаемые в данной работе, подходят для решения задач с экспоненциальными, степенными, логарифмическими и смешанными граничными и внутренними слоями. Теоретические выводы подтверждены численными экспериментами на ряде тестовых задач с такого рода слоями; проведены сравнения результатов, полученных с использованием разностных схем различных порядков точности.

DOI: 10.15372/SJNM20210106

Ключевые слова: уравнение с малым параметром, погранслой, внутренний слой, компактная схема, схема повышенной точности, адаптивная сетка.

Liseikin V.D., Paasonen V.I. Adaptive grids and high-order schemes for solving singularly-perturbed problems // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2021. — Vol. 24, № 1. — P. 77–92.

Layer-resolving grids remain an important element of comprehensive software codes when solving real-life problems with layers of singularities as they can substantially enhance the efficiency of computer-resource utilization. This paper describes an explicit approach to generating layer-resolving grids which is aimed at application of difference schemes of an arbitrary order. The approach proposed is based on estimates of derivatives of solutions to singularly-perturbed problems and is a generalization of the approach developed for the first order schemes. The layer-resolving grids proposed are suitable to tackle problems with exponential-, power-, logarithmic-, and mixed-type boundary and interior layers. Theoretical results have been confirmed by the numerical experiments on a number of test problems with such layers; the results were compared to those obtained with difference schemes of different orders of accuracy.

Keywords: singularly perturbed equations, small parameter, boundary and interior layers, grid generation method.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-01-00231).

Введение

В данной статье исследуются преобразования координат, устраняющие особенности некоторых типов сингулярно-возмущенных задач. С целью устранения особенностей привлекаются базисные мажоранты для производных решений в экспоненциальных, степенных и логарифмических слоях. Для каждой мажоранты конструируется локальное преобразование, устраняющее соответствующую особенность. Глобальные отображения, устраняющие слои, и соответствующие им сетки строятся с помощью стандартных процедур сдвига, масштабирования, обращения, отражения и склейки локальных преобразований друг с другом и с многочленами.

В работе описан ряд новых преобразований, устраняющих особенности, в дополнение к широко известным [1, 2] и завоевавшим признание специалистов, применимым, однако, только для задач с экспоненциальными слоями, обычно представленными функциями $\exp((-bx)/\varepsilon^k)$, относящимся к решениям, для которых вырожденные задачи ($\varepsilon = 0$) не имеют особенностей. Соответствующие цитируемым преобразованиям сетки не подходят для решения задач с другими слоями, а также непременно требуют знания константы b , влияющей на ширину слоя, которая, к сожалению, не всегда известна, в частности для пограничных слоев, моделируемых уравнениями Навье–Стокса, или для внутренних слоев в решениях квазилинейных неавтономных задач.

Один представленный в настоящей работе впечатляющий пример новых сеток со сгущением в слоях, порожденный функцией $\varepsilon^k/(\varepsilon^k + x)^r$, $r > 0$, является более универсальным. Он не только не требует знания константы b в случае экспоненциальных слоев произвольной ширины, но применим также для степенных слоев первого вида, для которых соответствующие вырожденные задачи имеют особенности. Другие примеры новых сеток предназначены для расчета степенных слоев второго вида и логарифмических слоев, моделируемых соответственно функциями $(\varepsilon^k + x)^r$, $0 < r < 1$, и $\ln(\varepsilon^k + x)/\ln \varepsilon^k$, а также смешанных слоев. Таким образом, новые сетки, описанные в данной статье, предоставляют исследователям возможность решать более широкие и важные классы задач, имеющих граничные и внутренние слои различных типов.

На качество расчетов существенно влияет не только выбор сетки, но и численный метод решения задачи, особенно его порядок точности. Алгоритм построения сеток в данной работе аналогичен [3] и по существу имеет в качестве входного параметра порядок точности применяемой разностной схемы, так как порядок производной в главном члене разложения погрешности и требуемый класс гладкости координатных преобразований тесно связаны с порядком точности. В этом смысле описанная технология генерации сеток является обобщением на случай высокоточных компактных схем результатов работы [4], в которой доказана равномерная по стремящемуся к нулю малому параметру сходимости для простейшей схемы первого порядка точности. Влияние порядка точности схем и качества сеток в данной работе исследуется численно путем сравнения результатов расчета тестовых задач по различным схемам, в том числе компактным. Они построены для произвольных неравномерных сеток по технологии, изложенной для дифференциальных уравнений различных типов в [5] и примененной для системы уравнений Навье–Стокса [6, 7], простой линейной моделью которой является уравнение с малым параметром, рассматриваемое в данной работе.

1. Конструирование преобразований, устраняющих слои

Метод координатных преобразований, устраняющих слои, сингулярных функций $u(x, \varepsilon)$, заданных на $0 \leq x \leq 1$ и зависящих от малого параметра ε , заключается

в нахождении такого невырожденного отображения $x(\xi, \varepsilon): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, что производные функции $u[x(\xi, \varepsilon), \varepsilon]$ по ξ равномерно ограничены по ε до некоторого порядка $p \geq 1$:

$$\left| \frac{d^k u}{d\xi^k}[x(\xi, \varepsilon), \varepsilon] \right| \leq M, \quad 0 < \varepsilon \leq m, \quad 0 \leq k \leq p, \quad 0 \leq \xi \leq 1. \quad (1)$$

Здесь и далее M и m — некоторые положительные константы, не зависящие от ε . Если найдено преобразование $x(\xi, \varepsilon)$, обеспечивающее условие (1), то говорим, что это преобразование устраняет особенности функции $u(x, \varepsilon)$ до порядка p . В краевых задачах для сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений смысл метода координатных преобразований заключается в устранении особенностей до порядка $p \geq 1$ каждой компоненты решения.

Если искомое преобразование $x(\xi, \varepsilon)$ найдено, то равномерно сходящееся по ε решение может быть получено при помощи стандартных численных аппроксимаций разностной задачи на неравномерной сетке x_i , $i = 0, 1, \dots, N$, конструируемой по формуле $x_i = x(i/N, \varepsilon)$. При этом решение может быть равномерно по ε проинтерполировано на весь интервал $[0, 1]$, включая слои.

1.1. Базисные мажоранты

Согласно результатам [4], производные решений сингулярно возмущенных уравнений относительно трансверсальной к слою координаты x в окрестности центра слоя x_0 мажорируются линейной комбинацией следующих четырех функций:

$$\begin{aligned} \psi_1^n(x, b, k, \varepsilon) &= M\varepsilon^{-kn} \exp(-b|x - x_0|/\varepsilon^k), & |x - x_0| \leq (kn/b)\varepsilon^k |\ln \varepsilon|, \\ \psi_2^n(x, b, k, \varepsilon) &= M\varepsilon^{kb}/(\varepsilon^k + |x - x_0|)^{b+n}, & |x - x_0| \leq m\varepsilon^{kb/(b+n)}, \\ \psi_3^n(x, b, k, \varepsilon) &= M(\varepsilon^k + |x - x_0|)^{b-n}, & |x - x_0| \leq m, \\ \psi_4^n(x, k, \varepsilon) &= M/(\varepsilon^k + |x - x_0|)^n |\ln \varepsilon|, & |x - x_0| \leq m |\ln \varepsilon|^{1/n}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $m > 0$, $M > 0$, $b \geq m_1 > 0$ и $k \geq m_2 > 0$ — некоторые константы, n — порядок производной, x_0 — точка центра слоя. Заметим, что константы m , M , b и k свои для каждого выражения в (2), а интервал $|x - x_0|$ такой, что соответствующая мажоранта стремится к ∞ внутри него, когда $\varepsilon \rightarrow 0$, и ограничена константой M за его пределами. Первая функция мажорирует экспоненциальную особенность, вторая — степенную первого вида, третья — второго вида, а последняя четвертая мажорирует логарифмическую особенность.

В общем виде оценка n -й производной решения $u(x, \varepsilon)$ сингулярно возмущенного уравнения имеет вид

$$\left| \frac{d^n u}{dx^n}(x, \varepsilon) \right| \leq M[1 + \psi_n(x, \varepsilon)], \quad 0 \leq x \leq 1,$$

где ψ_n — линейная комбинация базисных мажорант, представленных формулой (2).

1.1.1. Базисные локально сжимающие преобразования

Во многих случаях преобразования $x_i(\xi, \varepsilon, b, k)$, $i = 1, 2, 3, 4$, устраняющие соответствующие особенности в (2), можно определить в явном виде для $x_0 = 0$ путем интегрирования мажорант в (2) при $n = 1$ и последующего обращения полученной в результате функции. Результирующие функции имеют вид:

$$x_1(\xi, \varepsilon, b, k) = (-\varepsilon^k/b) \ln(1 - d\xi), \quad k > 0, \quad b > 0, \quad (3)$$

$$x_2(\xi, \varepsilon, b, k) = \varepsilon^k((1 - d\xi)^{-1/b} - 1), \quad k > 0, \quad b > 0, \quad (4)$$

$$x_3(\xi, \varepsilon, b, k) = (\varepsilon^{kb} + d\xi)^{1/b} - \varepsilon^k, \quad k > 0, \quad 1 > b > 0, \quad (5)$$

$$x_4(\xi, \varepsilon, b, k) = \varepsilon^k((1 + \varepsilon^{-k})^{b\xi} - 1), \quad k > 0, \quad b > 0. \quad (6)$$

Точки ξ_i^p и $x_i(\xi_i^p, \varepsilon, b, k)$, $i = 1, 2, 3, 4$, такие что p -я производная отображения $x_i(\xi, \varepsilon, b, k)$ на интервале $[0, \xi_i^p]$ равномерно ограничена по ε , задаются соотношениями:

$$\begin{aligned} \xi_1^p &= \frac{1 - \varepsilon^{k/p}}{d}, & x_1(\xi_1^p, \varepsilon, b, k) &= \frac{\varepsilon^k}{pb} \ln \varepsilon^{-k}, \\ \xi_2^p &= \frac{1 - \varepsilon^{k\beta}}{d}, \quad \beta = \frac{b}{1 + pb}, & x_2(\xi_2^p, \varepsilon, b, k) &= \varepsilon^{k(1-\beta/b)} - \varepsilon^k, \\ \xi_3^p &= m, & x_3(\xi_3^p, \varepsilon, b, k) &= (\varepsilon^{kb} + dm)^{1/b} - \varepsilon^k, \\ \xi_4^p &= \frac{\ln \varepsilon^{-k} - p \ln [\ln(1 + \varepsilon^{-k})]}{b \ln(1 + \varepsilon^{-k})}, & x_4(\xi_4^p, \varepsilon, b, k) &= \frac{1}{\ln^{1/p}(1 + \varepsilon^{-k})} - \varepsilon^k. \end{aligned} \quad (7)$$

Числа $x_i(\xi_i^p, \varepsilon, b, k)$ задают ширину соответствующего слоя. При достаточно малом ε справедливы следующие неравенства:

$$x_1(\xi_1^p, \varepsilon, b, k) \ll x_2(\xi_2^p, \varepsilon, b, k) \ll x_4(\xi_4^p, \varepsilon, b, k) \ll x_3(\xi_3^p, \varepsilon, b, k).$$

Первая производная каждой функции $x_i(\xi, \varepsilon, b, k)$ мала в точках промежутка ξ , $0 \leq \xi < \xi_i(x_i^1, \varepsilon) = \xi_i^1$, и поэтому длина сеточного интервала, полученная с помощью этого отображения, также мала в слое и равна примерно $(d/d\xi)[x_i(\xi, \varepsilon, b, k)]h$. Степень сгущения узлов в центре слоя достигает значений ε^k и уменьшается ближе к граничной точке $x_i(\xi_i^1, \varepsilon, b, k)$ слоя.

Ниже представлены локальные координатные преобразования, устраняющие сингулярности высокого порядка в пограничном слое возле $x_0 = 0$.

1.1.2. Преобразования для экспоненциальных слоев

Логарифмическое преобразование. Для функции $u(x, \varepsilon)$, p -я производная которой в окрестности граничной точки $x_0 = 0$ оценивается экспоненциальной мажорантой $\psi_1^p(x, b, k, \varepsilon)$ из (2) и M , т. е. для которой справедливы неравенства

$$|u^{(p)}(x, \varepsilon)| \leq M[\varepsilon^{-kp} \exp(-bx/\varepsilon^k) + 1], \quad b \geq m > 0, \quad 1 \leq p \leq n, \quad 0 \leq x \leq m_1, \quad (8)$$

имеем оценки

$$|u^{(p)}(x, \varepsilon)| \leq M, \quad 1 \leq p \leq n, \quad m_1 \geq x \geq x_1^n = \frac{kn\varepsilon^k}{b} \ln(\varepsilon^{-1}), \quad (9)$$

а внутри интервала $[0, x_1^n]$ производные не являются равномерно ограниченными по ε .

Для устранения экспоненциальной особенности (8) до порядка n функции $u(x, \varepsilon)$ в новой координате ξ можно использовать базисную логарифмическую сжимающую функцию $x_1(\xi, \varepsilon, a, k)$ в форме (3) на соответствующем интервале $[0, \xi_1^n]$:

$$x_1(\xi, \varepsilon, a, k) = -\frac{\varepsilon^k}{a} \ln(1-d\xi), \quad a \geq m > 0, \quad d \geq 1 + m_1 > 1, \quad 0 \leq \xi \leq \xi_1^n = \frac{1-\varepsilon^{k/n}}{d}. \quad (10)$$

Частный случай локального преобразования такого вида при $k = 1$ был предложен Бахваловым [1] для численного решения задач с экспоненциальными пограничными слоями.

Функция (10) отображает интервал $[0, \xi_1^n]$ на погранслойный интервал $\left[0, \frac{k\varepsilon^k \ln(\varepsilon^{-1})}{an}\right]$, и, кроме того, $\forall \xi \in [0, \xi_1^n]$

$$\left| \frac{d^j x_1(\xi, \varepsilon, a, k)}{d\xi^j} \right| \leq M \frac{\varepsilon^k}{(1-d\xi)^j} \leq M \frac{\varepsilon^k}{\varepsilon^{jk/n}} \leq M, \quad j \leq n. \quad (11)$$

Учитывая (9), константа $a \geq m_1 > 0$ в (10) должна быть такой, чтобы

$$x_1(\xi_1^n, \varepsilon, a, k) = x\left(\frac{1-\varepsilon^{k/n}}{d}, \varepsilon, a, k\right) = \frac{k\varepsilon^k}{na} \ln(\varepsilon^{-1}) \geq x_1^n = \frac{kn\varepsilon^k}{b} \ln(\varepsilon^{-1}), \quad (12)$$

и, кроме того, она должна обеспечить ε -равномерность производных до порядка n функции $u(x, \varepsilon)$ в новой координате ξ на интервале $[0, \xi_1^n]$, т. е.

$$\left| \frac{d^n}{d\xi^n} u[x_1(\xi, \varepsilon, a, k), \varepsilon] \right| \leq M, \quad 0 \leq \xi \leq \frac{1-\varepsilon^{k/n}}{d}. \quad (13)$$

Из условия (12) получаем оценку на константу a : $0 < m \leq a \leq b/n^2$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{d\xi^n} u[x_1(\xi, \varepsilon, a, k), \varepsilon] &= \sum_{p=1}^n \frac{n!}{i!j!h!\dots t!} \frac{d^p u[x_1(\xi, \varepsilon, a, k), \varepsilon]}{dx^p} \times \\ &\sum_{i!j!h!\dots t!} \left(\frac{x_1'(\xi, \varepsilon, a, k)}{1!} \right)^i \left(\frac{x_1''(\xi, \varepsilon, a, k)}{2!} \right)^j \dots \left(\frac{x_1^{(l)}(\xi, \varepsilon, a, k)}{l!} \right)^t, \end{aligned} \quad (14)$$

где $x_1^{(p)}(\xi, \varepsilon, a, k)$ — p -я производная по ξ , а (i, j, h, \dots, t) — l целых положительных чисел со следующими ограничениями:

$$i + 2j + 3h + \dots + lt = n, \quad i + j + h + \dots + t = p. \quad (15)$$

Из (8) и (10) получаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^p}{dx^p} u[x_1(\xi, \varepsilon, a, k), \varepsilon] \right| &\leq M \left[\varepsilon^{-kp} \exp\left(\frac{b}{a} \ln(1-d\xi)\right) + 1 \right] \\ &= M \left[\varepsilon^{-kp} (1-d\xi)^{b/a} + 1 \right], \quad 1 \leq p \leq n, \quad 0 \leq \xi \leq \frac{1-\varepsilon^{k/n}}{d}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$x_1^{(i)}(\xi, \varepsilon, a, k) \leq M \frac{\varepsilon^k}{(1-d\xi)^i}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 0 \leq \xi \leq \frac{1-\varepsilon^{k/n}}{d}. \quad (17)$$

Для l целых положительных чисел i, j, h, \dots, t , удовлетворяющих (15), имеем из (17)

$$\left| \left(\frac{x_1'(\xi, \varepsilon, a, k)}{1!} \right)^i \left(\frac{x_1''(\xi, \varepsilon, a, k)}{2!} \right)^j \dots \left(\frac{x_1^{(l)}(\xi, \varepsilon, a, k)}{l!} \right)^t \right| \leq M \frac{\varepsilon^{kp}}{(1-d\xi)^n}, \quad 0 \leq \xi \leq \frac{1-\varepsilon^{k/n}}{d}, \quad (18)$$

а из (11), (14), (16) и (18) следует

$$\left| \frac{d^n}{d\xi^n} u[x_1(\xi, \varepsilon, a, k), \varepsilon] \right| \leq M \left[\frac{\varepsilon^{kp}(1-d\xi)^{b/a}}{\varepsilon^{kp}(1-d\xi)^n} + 1 \right] \leq M, \quad 0 \leq \xi \leq \frac{1-\varepsilon^{k/n}}{d},$$

когда $0 < m \leq a \leq b/n$ для произвольного m из интервала $(0, b/n)$. Таким образом, заключаем, что оценка (13) справедлива, когда a в (10) удовлетворяет условию $0 < m \leq a \leq b/n^2$.

Вне интервала $[0, \xi_1^n]$ логарифмическое преобразование (10) может быть продолжено, например, с помощью полинома непрерывно или с необходимой гладкостью $l \leq n$. Для полученного глобального преобразования оценка (1) при $p = n$ следует из (9), (12) и (13).

Степенное преобразование. Аналогично доказывается, что экспоненциальная особенность типа (8) может быть локально устранена с помощью степенного преобразования в виде (4):

$$x_2(\xi, \varepsilon, a, k) = \varepsilon^k ((1-d\xi)^{-1/a} - 1), \quad 0 \leq \xi \leq \xi_2^n, \quad (19)$$

при произвольном $a \geq m > 0$, где $d = (1 - \varepsilon^{k\beta})/\xi_2^n$, $0 < m \leq \beta = a/(1 + na)$. Это отображение было предложено в [8] для конструирования сгущающихся сеток в экспоненциальных, степенных (первого вида) и комбинированных слоях. Частный случай преобразования $x_2(\xi, \varepsilon, a, k)$, в котором $a = 1$ и $k = 1/2$, предложен Вулановичем [9] для экспоненциальных слоев масштаба $k = 1/2$.

Преобразование (19) более удобно для устранения экспоненциальных особенностей, чем преобразование (10), так как константа a в (19) не зависит от b в (8), поэтому это преобразование с произвольной фиксированной константой $a \geq m > 0$ годится для всех констант $b \in (0, \infty)$ в (8) для устранения особенностей функции $u(x, \varepsilon)$ до порядка n . Другое популярное кусочно-линейное преобразование

$$x(\xi, \varepsilon, b) = \begin{cases} 2\sigma\xi, & 0 \leq \xi \leq 1/2, \\ \sigma + 2(1-\sigma)\xi, & 1/2 \leq \xi \leq 1, \end{cases} \quad (20)$$

где $\sigma = \min \{0.5, (n/b)\varepsilon \ln N\}$, предложенное Шишкиным [2] для построения сеток в экспоненциальных слоях, также зависит от b в (8). Кроме того, оно обеспечивает худшую равномерную сходимость в сравнении с сетками, полученными с помощью преобразований (10), (19).

Таким же образом вместо $x_2(\xi, \varepsilon, a, k)$ можно использовать более общее отображение

$$c_1 x_2(\xi, \varepsilon, a, k), \quad 0 < m_3 \leq c_1 \leq m_4, \quad (21)$$

которое является более удобным для удовлетворения граничных условий. Например, равенство $c_1 x_2(m, \varepsilon, a, k) = x_0$ удовлетворяется значением $c_1 = x_0/x_2(m, \varepsilon, a, k)$.

Вне интервала $[0, \xi_2^n]$ преобразование (21) может быть продолжено гладко с помощью полинома. В частности, глобальное преобразование, обозначенное как $x_2(\xi, \varepsilon, a, k) \in C^l[0, m]$, $n \geq l \geq 0$, может иметь следующий вид:

$$x_2(\xi, \dots) = \begin{cases} c_1 F(\xi), & 0 \leq \xi \leq \xi_2^n, \\ c_1 \left[\sum_{r=0}^l F^{(r)}(\xi_2^n) \frac{z^r}{r!} + c_0 z^{l+1} \right], & \xi_2^n \leq \xi \leq m, \end{cases} \quad (22)$$

где

$$F(\xi) = \frac{\varepsilon^k}{(1 - d\xi)^{1/a}} - \varepsilon^k, \quad z = \xi - \xi_2^n, \quad d = \frac{1 - \varepsilon^{k\beta}}{\xi_2^n}, \quad \beta = \frac{a}{1 + na},$$

константа $c_1 > 0$ находится из условия $x_2(m, \varepsilon, a, k) = x_0$, а произвольная положительная константа a удовлетворяет условию $a \geq m_1 > 0$. Из (22) при $n \geq i \geq 1$ легко следует

$$F^{(i)}(\xi_2^n) = d^i \frac{1}{a} \left(\frac{1}{a} + 1 \right) \cdots \left(\frac{1}{a} + i - 1 \right) \varepsilon^{ka(n-i)/(1+na)}. \quad (23)$$

1.1.3. Преобразования для степенных слоев

Преобразования для устранения степенных особенностей первого вида. Локальное степенное преобразование (19) или (21) с подходящим выбором константы $a \geq m > 0$ также годится для устранения степенной особенности вида 1 возле $x_0 = 0$, т.е. когда производные решения оцениваются функцией $\psi_2^n(x, b, k, \varepsilon)$ из (2) для $x_0 = 0$ и константы M , а именно

$$|u^{(p)}(x, \varepsilon)| \leq M \left[\frac{\varepsilon^{kb}}{(\varepsilon^k + x)^{b+p}} + 1 \right], \quad 1 \leq p \leq n, \quad 0 \leq x \leq m. \quad (24)$$

Здесь пограничным интервалом, в котором все производные до порядка n функции $u(x, \varepsilon)$ не будут равномерно ограничены по ε , является интервал $[0, x_2^n]$, $x_2^n = m\varepsilon^{kb/(b+n)} \gg x_1^n = (kn/b)\varepsilon^k \ln(\varepsilon^{-1})$ для малого ε , поэтому преобразования (10) и (20) не годятся для построения сгущающихся сеток для таких особенностей. Однако преобразование (19) при $0 < m \leq a \leq b/n^2$ устраняет особенность (24) до $p \leq n$. Доказательство проводится аналогично случаю логарифмического преобразования.

Преобразования для устранения степенных особенностей второго вида. В некоторых случаях производные решения возле $x_0 = 0$ оцениваются мажорантой $\psi_3^n(x, b, k, \varepsilon)$ из (2) и константой M , а именно

$$|u^{(p)}(x, \varepsilon)| \leq M \left[(\varepsilon^k + x)^{b-p} + 1 \right], \quad b > 0, \quad 1 \leq p \leq n, \quad 0 \leq x \leq m. \quad (25)$$

Заметим, когда $b \geq n$, то производные до порядка n будут равномерно ограниченными, поэтому рассматриваем эту особенность для $0 < b < n$, которая устраняется с помощью локального преобразования вида (5):

$$x_3(\xi, \varepsilon, a, k) = (\varepsilon^{ak} + \xi)^{1/a} - \varepsilon^k, \quad 0 < m_1 \leq c_1 \leq m_2, \quad 0 \leq \xi \leq \xi_3^n = m, \quad (26)$$

где $0 < m \leq a \leq \min\{b/n, 1/n\}$. Доказательство проводится также аналогично случаю логарифмического преобразования.

1.1.4. Преобразования для устранения логарифмических особенностей

Производные решения возле $x_0 = 0$ могут также оцениваться мажорантой $\psi_4^n(x, k, \varepsilon)$ из (2) и константой M , а именно

$$|u^{(p)}(x, \varepsilon)| \leq M \left[1 + \frac{1}{(\varepsilon^k + x)^p |\ln \varepsilon|} \right], \quad 1 \leq p \leq n, \quad 0 \leq x \leq m. \quad (27)$$

К сожалению, авторам пока не удалось построить преобразование, устраняющее эту особенность при $n > 1$. Однако при $n = 1$ оно построено и имеет вид

$$x(\xi, \varepsilon) = \begin{cases} c\varepsilon \left[\left(1 + \frac{1}{\varepsilon \ln(\varepsilon^{-1})} \right)^{\xi/\xi_0} - 1 \right], & 0 \leq \xi \leq \xi_0, \\ c \left[\ln^{-1}(\varepsilon^{-1}) + 2(\varepsilon + \ln^{-1}(\varepsilon^{-1})) \ln \left(1 + \frac{1}{\varepsilon \ln(\varepsilon^{-1})} \right) (\xi - \xi_0) + \right. \\ \left. c_0(\xi - \xi_0)^2 \right], & \xi_0 \leq \xi \leq m_1. \end{cases} \quad (28)$$

2. Разностные схемы

Рассмотрим краевую задачу для уравнения второго порядка с малым параметром $\varepsilon > 0$:

$$-\mu(x, \varepsilon)u'' + a(x, \varepsilon)u' + F(x, u, \varepsilon) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad \frac{\partial F}{\partial x} \geq 0, \quad u(0) = U_0, \quad u(1) = U_1, \quad (29)$$

где $\mu(x, \varepsilon) > 0$. Предполагается, что коэффициент $\mu(x, \varepsilon)$ вместе с ε при некоторых значениях $x \in [0, 1]$ также является малым параметром. Например, функция $\mu(x, \varepsilon) = (x - x_0)^2 + \varepsilon^2$ имеет в окрестности $x = x_0$ порядок ε^2 .

Для численного решения задачи (29) для сравнения будем использовать несколько разностных схем различных порядков аппроксимации.

Первая схема имеет одностороннюю разделенную разность с учетом знака $a(x_i, \varepsilon)$ в качестве аналога первой производной и обычную аппроксимацию второй производной. Схема имеет вид

$$-\mu\Lambda u + a\Delta_{\pm}u + F = 0, \quad \Delta_{\pm}u_i = \pm \frac{u_{i\pm 1} - u_i}{h_{\pm}}, \quad \Lambda = \frac{\Delta_+ - \Delta_-}{s/2}. \quad (30)$$

Здесь h_{\pm} — местные значения шагов сетки справа и слева, а $s = h_+ + h_-$ — их сумма. В дальнейшем нам понадобятся также обозначения для разности $d = h_+ - h_-$ и произведения $p = h_+h_-$ соседних шагов. Очевидно, схема (30) имеет первый порядок точности даже на равномерной сетке.

Аппроксимируя в (30) первую производную линейной комбинацией $\Delta = (h_- \Delta_+ + h_+ \Delta_-)/s$, получим схему первого порядка аппроксимации, имеющую на квазиравномерной сетке второй порядок.

Построим схему, имеющую второй порядок на любой сетке. С этой целью разделим уравнение (29) на $\mu(x, \varepsilon)$ и аппроксимируем полученное в результате уравнение разностной схемой

$$-\Lambda u + A\Delta u + G = 0, \quad \Delta = \frac{h_- \Delta_+ + h_+ \Delta_-}{s}, \quad (31)$$

в которой $A = a/\mu$, $G = F/\mu$. Погрешность схемы (31) на гладких решениях уравнения (29) в силу исходного уравнения (29) и его следствия $u''' = (Au')' + G'$ имеет вид $\Psi = -d/3[G' + (Au')'] + O(h^2)$. Компенсируя в исходной схеме (31) главные члены погрешности их разностными приближениями, получим схему второго порядка на любой сетке:

$$-\Lambda u + A\Delta u + \frac{d}{3}\Omega u + \left(E + \frac{d}{3}\Delta\right)G = 0, \quad (32)$$

где E — тождественный оператор,

$$\Omega u = \frac{A_+\Delta_+ - A_-\Delta_-}{s/2} u = (Au'(x))' + O(d + h^2),$$

а A_{\pm} — значения A в полудельных узлах.

Повторим описанную процедуру повышения точности в отношении схемы (32). Заменив в ней все слагаемые их разложениями, в частности

$$\Omega u = (Au')' + \frac{d}{3}Au''' + \frac{d}{4}(2A'u'' + A''u') + O(h^2),$$

в силу уравнений продолженной системы выразим погрешность схемы в виде

$$\Psi = -\frac{p+d^2}{12}u^{(4)} + \left(\frac{p}{6} + \frac{d^2}{9}\right)Au''' + \frac{d^2}{12}(2A'u'' + A''u') + O(h^3), \quad p = h_+h_-. \quad (33)$$

Подставим в (33) $u^{(4)} = (Au' + G)'' = Au''' + (2A'u'' + A''u') + G''$, затем выразим u''' через младшие производные. В результате получим

$$\Psi = r A \left((Au')' + G' \right) - \frac{p}{12} (2A'u'' + A''u') - \frac{p+d^2}{12}G'' + O(h^3 + dh^2), \quad r = \frac{3p+d^2}{36}. \quad (34)$$

Для завершения построения остается заменить в (34) дифференциальные операторы разностными, формируя для схемы (32) компенсирующие слагаемые, повышающие порядок до третьего. Таким образом, схема третьего порядка имеет вид

$$\left(-1 + \frac{p}{6}\Delta A\right)\Lambda u + \left(A + \frac{p}{12}\Lambda A\right)\Delta u + R\Omega u + \Sigma F = 0, \quad (35)$$

где

$$\Sigma = E + R\Delta + \frac{p+d^2}{12}\Lambda, \quad R = \frac{d}{3} - A\frac{3p+d^2}{36}.$$

Заметим, что на квазиравномерной сетке схема (35) имеет четвертый порядок аппроксимации, и в ней в этом случае без понижения порядка можно пренебречь слагаемыми с множителями $d^2 = O(h^4)$, и тогда $\Sigma = E + R\Delta + (p/12)\Lambda$, $R = d/3 - (p/12)A$. Схемы (32) и (35) компактны по структуре, слагаемые в них аппроксимируются в пределах 3-х точечного шаблона. Аналогичные компактные схемы для различных типов дифференциальных уравнений на неравномерных сетках построены в работе [5]. В двумерном нелинейном случае аналогичное построение выполнено в работе [6] и применено в работе [7] для численного моделирования стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости, описываемых системой уравнений Навье–Стокса.

3. Результаты численных экспериментов

Данный пункт содержит результаты сравнения описанных выше разностных схем (30), (32), (35) порядков аппроксимации $p = 1, 2, 3$ соответственно на ряде тестовых задач вида (29) с различными типами пограничных слоев.

Для большинства тестовых задач решение не было известно в конечной аналитической форме, и под “точным” решением на всех приводимых ниже рисунках подразумевается численное решение по лучшей схеме на наиболее детальной сетке. Разумеется, сходимость разностных решений к одной и той же предельной функции контролировалась, при этом оценка ошибки δ и оценка порядка точности p на последовательности сгущающихся сеток осуществлялась по известной технологии Рунге, а именно, норма ошибки и практически наблюдаемый порядок оценивались по результатам расчетов на сетках с числом шагов N и $2N$ по следующим формулам:

$$\delta^N = \max_{i=0}^N |u_i^N - u_{2i}^{2N}|, \quad p^N = \log_2 \left(\frac{\delta^N}{\delta^{2N}} \right).$$

Во всех экспериментах схема, имеющая на произвольных сетках формально третий порядок аппроксимации, в расчетах неизменно обнаруживала четвертый порядка точности. Такие результаты достигались благодаря удачной технологии построения сеток, которая обеспечивает равномерную по ε оценку ошибки и, как следствие, квазиравномерность сеток, несмотря на наличие малого параметра.

Численные эксперименты проводились для задачи (29) с функцией $\mu(x, \varepsilon) = (\varepsilon + x)^\beta$, где $\beta > 0$. Ее решения реализуют все четыре вида особенностей, представленных формулой (2), в окрестности $x = 0$. При $\beta = 1$ такая задача сформулирована в монографии [10] в качестве модели процесса фильтрации жидкости в окрестности отверстия радиуса $r = \varepsilon$, а задача с $\beta = 2$ моделирует движение зарядов как классических элементарных частиц [11]. Задача (29) с зависимостью $\mu(x, \varepsilon) = \varepsilon$ рассматривалась в [3].

3.1. Экспоненциальный пограничный слой

Решалась краевая задача

$$-(\varepsilon + x)^2 u'' - u' + u - 12 \exp - \frac{(x - 0.6)^2}{0.1} = 0, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

для которой в окрестности $x = 0$ коэффициент при второй производной имеет порядок ε^2 , и ввиду равенства $b = -a(0) = 1 > 0$ здесь реализуется экспоненциальный погранслой масштаба $k = 2$ [4].

Сетка строилась на основе базисного преобразования (19) следующим образом. Преобразование (19) в интервале $0 \leq \xi \leq \xi_0$ гладко продолжалось полиномом в интервал $\xi_0 \leq \xi \leq 1$, а затем вся склеенная функция сжималась или растягивалась по ординате константой, с тем чтобы результирующая функция отображала единичный отрезок в единичный.

На рисунке 1 представлены результаты расчетов разными схемами этой задачи при значении $\varepsilon = 0.01$, соответствующем локальному значению вязкости $\mu = 0.0001$ на левой границе отрезка. Из рисунка видно, что компактные схемы второго и третьего порядков аппроксимации дают визуально довольно точные результаты, а схема первого порядка с односторонними разностями существенно проигрывает им в точности.

Результаты расчетов, полученные на последовательности сгущающихся неравномерных сеток, приведены в таблице 1. В левой колонке таблицы приведено число шагов сетки, затем следует три пары колонок для схем различных порядков аппроксимации, в каждой из которых приведена оценка δ_k C -нормы ошибки и оценка p_k практически наблюдаемого порядка точности для различных схем.

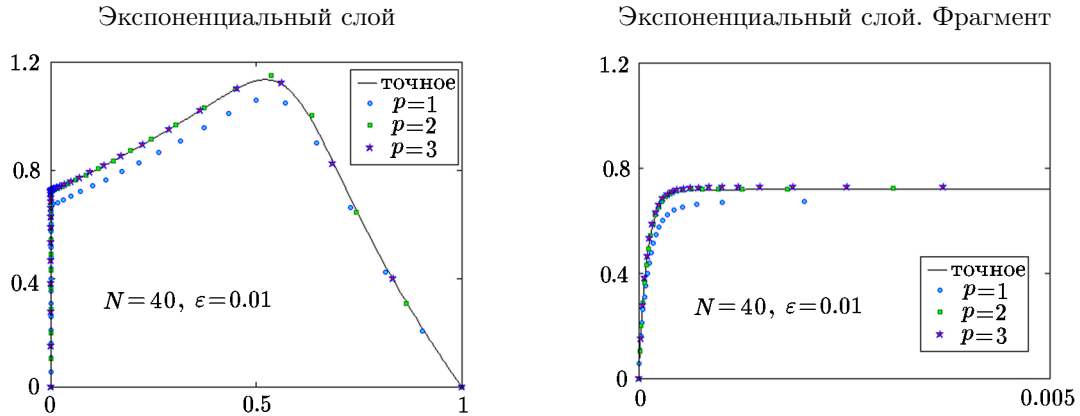


Рис. 1. Расчет экспоненциального погранслоя (слева) и фрагмент расчета в окрестности $x = 0$ (справа)

Таблица 1. Результаты расчетов экспоненциального слоя на сгущающихся адаптивных сетках при $\varepsilon = 0.01$

N	δ_1	p_1	δ_2	p_2	δ_3	p_3
40	$8.156 e-02$	3.490	$4.344 e-01$	1.417	$4.940 e-01$	0.938
80	$3.845 e-02$	1.085	$2.171 e-02$	4.323	$9.402 e-01$	-0.929
160	$2.026 e-02$	0.924	$4.477 e-03$	2.278	$5.774 e-02$	4.025
320	$1.046 e-02$	0.955	$1.073 e-03$	2.060	$8.315 e-04$	6.118
640	$5.330 e-03$	0.972	$2.699 e-04$	1.991	$2.648 e-05$	4.972
1280	$2.694 e-03$	0.984	$6.726 e-05$	2.005	$1.401 e-06$	4.241

В данном и во всех последующих расчетах на адаптивных сетках апостериорная оценка порядка для исследуемых разностных схем неизменно стремилась при детализации сетки к значениям 1, 2, и 4 соответственно. По этой причине во всех приводимых ниже таблицах оценки порядков точности схем опущены с целью сокращения записей.

3.2. Степенной пограничный слой первого вида

В качестве теста решалась краевая задача

$$-(\varepsilon + x)u'' - 4u' + u - 10 \sin 4\pi x = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0.8.$$

Здесь $b = -a(0) = 4 > 1$, поэтому, согласно теории [4], в окрестности нуля реализуется степенной слой масштаба $k = 1$ первого вида, поэтому сетка строилась в соответствии с базовым преобразованием (19) с ограничением на параметр a : $0 < a \leq b/n^2$, а также с применением склейки с полиномом и последующим растяжением или сжатием по ординате.

Рисунок 2 иллюстрирует результаты расчета данной задачи, полученные при значении $\varepsilon = 1.e-02$. В табл. 2 приведены результаты расчета степенного слоя первого вида на последовательности сгущающихся неравномерных сеток для трех различных параметров вязкости. Таблица убедительно иллюстрирует утверждение о равномерной сходимости результатов расчета при детализации сетки относительно малого параметра. Так, например, ошибка, достигнутая на самой детальной сетке с числом шагов $N = 1280$ по схеме первого порядка аппроксимации, составляет приблизительно одинаковую величину порядка $1.e-03$ независимо от меняющегося в широких пределах значения ε . То же справедливо в отношении двух более точных схем, для которых порядок ошибки

(см. последнюю строку табл. 2) приблизительно составляет величину порядка $1 \cdot e-05$ и $1 \cdot e-07$ соответственно.

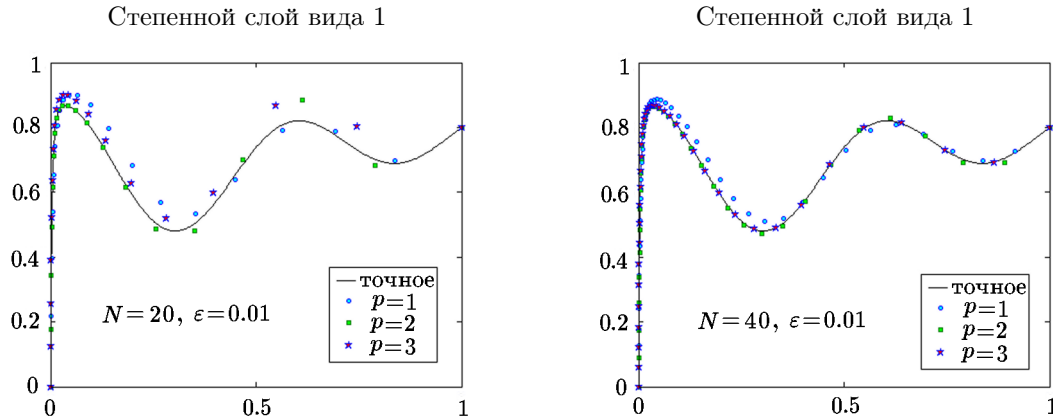


Рис. 2. Расчет степенного погранслоя масштаба 1 с параметром $\varepsilon = 1 \cdot e-02$ на сетках с числом шагов $N = 20$ (слева) и $N = 40$ (справа)

Таблица 2. Результаты расчета степенного слоя для различных ε на последовательности неравномерных сеток

N	$\varepsilon = 1 \cdot e-02$			$\varepsilon = 1 \cdot e-05$			$\varepsilon = 1 \cdot e-08$		
	δ_1	δ_2	δ_3	δ_1	δ_2	δ_3	δ_1	δ_2	δ_3
40	$4.4 \cdot e-02$	$8.3 \cdot e-02$	$1.2 \cdot e-01$	$5.7 \cdot e-02$	$9.5 \cdot e-02$	$2.9 \cdot e+00$	$7.1 \cdot e-02$	$3.6 \cdot e-01$	$9.1 \cdot e-01$
80	$2.3 \cdot e-02$	$4.8 \cdot e-02$	$7.2 \cdot e-02$	$9.9 \cdot e-03$	$1.6 \cdot e-02$	$1.8 \cdot e-02$	$3.0 \cdot e-03$	$1.0 \cdot e-02$	$1.3 \cdot e-02$
160	$1.2 \cdot e-02$	$2.7 \cdot e-02$	$4.6 \cdot e-02$	$2.4 \cdot e-03$	$3.9 \cdot e-03$	$4.2 \cdot e-03$	$1.8 \cdot e-04$	$5.3 \cdot e-04$	$6.4 \cdot e-04$
320	$6.2 \cdot e-03$	$1.4 \cdot e-02$	$2.6 \cdot e-02$	$6.1 \cdot e-04$	$9.5 \cdot e-04$	$1.0 \cdot e-03$	$1.2 \cdot e-05$	$3.4 \cdot e-05$	$4.1 \cdot e-05$
640	$3.2 \cdot e-03$	$7.5 \cdot e-03$	$1.4 \cdot e-02$	$1.5 \cdot e-04$	$2.4 \cdot e-04$	$2.6 \cdot e-04$	$7.7 \cdot e-07$	$2.2 \cdot e-06$	$2.7 \cdot e-06$
1280	$1.6 \cdot e-03$	$3.8 \cdot e-03$	$7.4 \cdot e-03$	$3.8 \cdot e-05$	$5.9 \cdot e-05$	$6.4 \cdot e-05$	$4.8 \cdot e-08$	$1.4 \cdot e-07$	$1.7 \cdot e-07$

3.3. Степенной пограничный слой второго вида

В третьем тесте решалась задача

$$(x + \varepsilon)u'' - 0.5u' + u + 8 \sin(4\pi x) = 0, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 0.$$

Так как здесь $b = -a(0) = 0.5 < 1$, то в соответствии с оценками [4] в окрестности нуля реализуется степенной слой второго вида масштаба $k = 1/2$, поэтому сетка базируется на преобразовании (26), также склеенном с полиномом.

На рис. 3 представлены результаты расчета погранслоя второго вида с различной вязкостью на подходящих сетках. Численные результаты свидетельствуют о значительном преимуществе компактных схем в сравнении со схемой первого порядка, которая из-за наличия довольно большой аппроксимационной вязкости обладает ярко выраженным сглаживающим эффектом, заметно искажающим решение на выпуклых участках профиля решения.

В табл. 3 представлены результаты расчетов степенного слоя второго вида на равномерных сетках. Из таблицы видно, что при малом ε схемы более высокого порядка аппроксимации не имеют никакого преимущества, и апостериорная оценка порядка точности для всех схем не достигает даже единицы. Такое поведение численных решений является ярким свидетельством нецелесообразности применения равномерных сеток при решении задач с зонами больших градиентов решения.

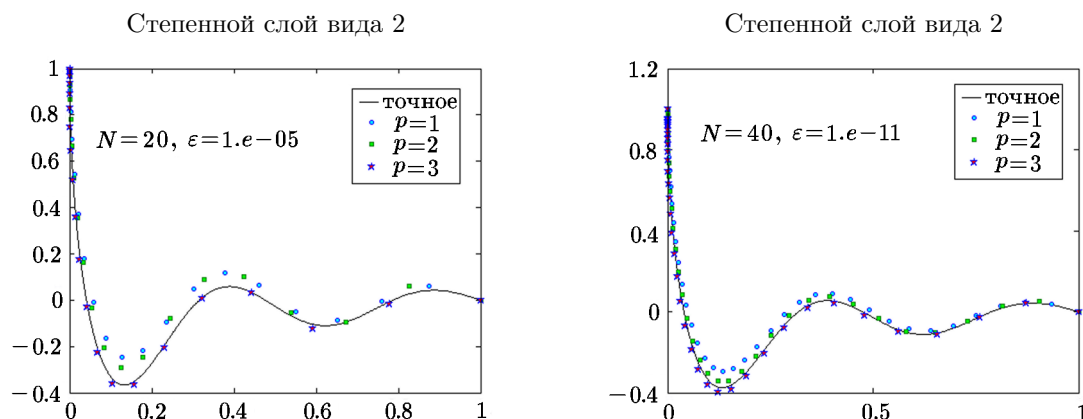


Рис. 3. Расчет степенного погранслоя второго вида при малой (слева) и очень малой (справа) вязкости

Таблица 3. Результаты расчета степенного слоя второго вида на последовательности равномерных сеток при $\varepsilon = 1.e-02$

N	δ_1	p_1	δ_2	p_2	δ_3	p_3
40	$1.0e-01$	3.20	$8.1e-02$	3.61	$3.7e-01$	1.41
80	$8.6e-02$	0.31	$6.4e-02$	0.34	$2.5e-01$	0.57
160	$6.5e-02$	0.40	$4.8e-02$	0.41	$1.7e-01$	0.56
320	$4.8e-02$	0.43	$3.5e-02$	0.44	$1.1e-01$	0.55
640	$3.5e-02$	0.43	$2.6e-02$	0.44	$7.9e-02$	0.56
1280	$2.6e-02$	0.44	$1.8e-02$	0.47	$5.1e-02$	0.61

В табл. 4 приведены результаты расчетов той же задачи, но на последовательности неравномерных сеток. Здесь наблюдается совершенно иная картина — повышение порядка аппроксимации сопровождается уменьшением ошибки численных решений. При этом наблюдается слабая зависимость нормы ошибки схем от стремящегося к нулю параметра вязкости, что свидетельствует о равномерной относительно уменьшающегося малого параметра сходимости схем.

Таблица 4. Результаты расчета степенного слоя второго вида для различных ε на последовательности неравномерных сеток

N	$\varepsilon = 1.e-05$			$\varepsilon = 1.e-08$			$\varepsilon = 1.e-11$		
	δ_1	δ_2	δ_3	δ_1	δ_2	δ_3	δ_1	δ_2	δ_3
40	$5.2e-02$	$5.2e-02$	$5.2e-02$	$5.9e-02$	$7.8e-02$	$1.5e-01$	$2.6e-02$	$5.9e-02$	$9.3e-02$
80	$3.6e-02$	$3.8e-02$	$3.8e-02$	$1.5e-02$	$2.2e-02$	$2.4e-02$	$1.3e-03$	$6.1e-03$	$5.0e-02$
160	$2.2e-02$	$2.4e-02$	$2.4e-02$	$3.9e-03$	$6.2e-03$	$6.8e-03$	$7.9e-05$	$3.7e-04$	$4.1e-04$
320	$1.2e-02$	$1.4e-02$	$1.4e-02$	$9.8e-04$	$1.6e-03$	$1.8e-03$	$4.9e-06$	$2.2e-05$	$5.8e-05$
640	$6.3e-03$	$7.3e-03$	$7.4e-03$	$2.5e-04$	$4.0e-04$	$4.7e-04$	$3.1e-07$	$1.4e-06$	$3.1e-06$
1280	$3.2e-03$	$3.8e-03$	$3.9e-03$	$6.1e-05$	$1.0e-04$	$1.2e-04$	$1.9e-08$	$8.5e-08$	$1.9e-07$

3.4. Логарифмический пограничный слой

Логарифмический слой реализуется (см. [4]), например, в следующей тестовой задаче:

$$(x + \varepsilon)u'' - u' + u + 20 \sin(4\pi x) = 0, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 0.$$

Здесь в качестве базового преобразования для построения сетки выступает функция (28), линейно продолженная за пределы погранслоя и затем нормированная по ординате к единице.

Ниже приведены результаты расчетов логарифмического слоя, рассчитанного на двух сетках различной степени детальности с помощью схем различных порядков аппроксимации, при умеренной (рис. 4) и малой (рис. 5) вязкости. Соответствующие результаты на последовательности сгущающихся неравномерных сеток приведены в табл. 5.

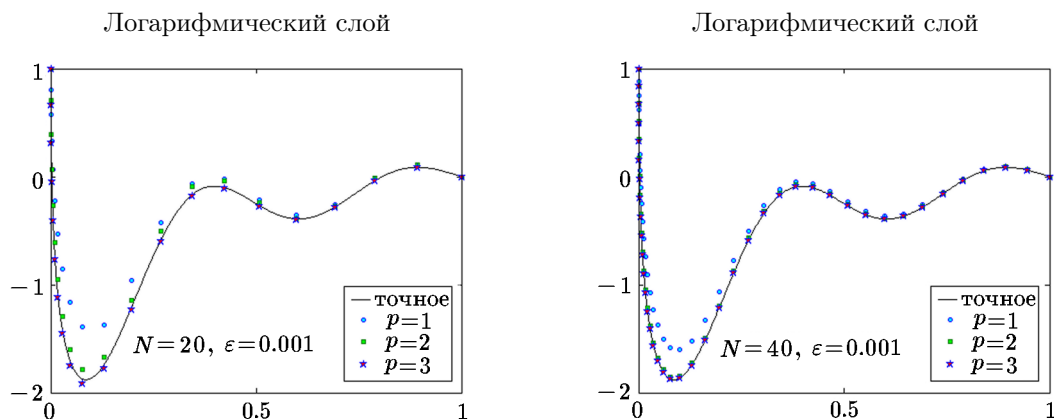


Рис. 4. Расчет логарифмического погранслоя с умеренной вязкостью на сетках с $N = 20$ (слева) и с $N = 40$ (справа)

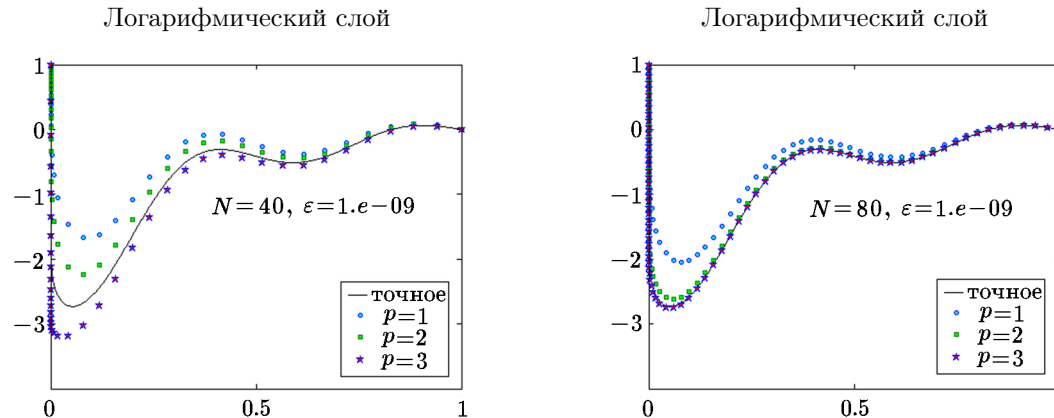


Рис. 5. Расчет логарифмического погранслоя с малой вязкостью на сетках с $N = 40$ (слева) и с $N = 80$ (справа)

Таблица 5. Результаты расчета логарифмического слоя для различных ε на последовательности неравномерных сеток

N	$\varepsilon = 1. e-05$			$\varepsilon = 1. e-08$			$\varepsilon = 1. e-11$		
	δ_1	δ_2	δ_3	δ_1	δ_2	δ_3	δ_1	δ_2	δ_3
40	$3.9 e-01$	$5.5 e-01$	$1.1 e+00$	$4.2 e-01$	$1.7 e+00$	$5.7 e+00$	$3.8 e-01$	$1.7 e+00$	$4.5 e+00$
80	$3.4 e-01$	$1.3 e-01$	$4.7 e-02$	$5.1 e-01$	$6.7 e-01$	$7.9 e-01$	$5.0 e-01$	$1.5 e+00$	$3.4 e+00$
160	$2.3 e-01$	$3.3 e-02$	$2.8 e-03$	$4.6 e-01$	$1.7 e-01$	$4.0 e-02$	$6.0 e-01$	$4.8 e-01$	$2.4 e-01$
320	$1.4 e-01$	$8.1 e-03$	$1.7 e-04$	$3.2 e-01$	$4.1 e-02$	$2.1 e-03$	$5.1 e-01$	$1.2 e-01$	$1.4 e-02$
640	$7.4 e-02$	$2.0 e-03$	$1.1 e-05$	$1.9 e-01$	$1.0 e-02$	$1.5 e-04$	$3.4 e-01$	$2.9 e-02$	$8.4 e-04$
1280	$3.9 e-02$	$5.1 e-04$	$6.7 e-07$	$1.0 e-01$	$2.5 e-03$	$9.1 e-06$	$1.9 e-01$	$7.3 e-03$	$5.2 e-05$

В данном случае оценка порядка точности по схеме первого порядка оказалась (см. столбцы с погрешностью δ_1) ниже теоретического значения. Кроме того, при расчете логарифмического слоя, в противоположность иным типам пограничных слоев, для всех схем точность несколько падает с уменьшением вязкости. Хотя результаты расчета получились вполне удовлетворительными, большая ε -равномерность ошибки была бы желательна. На наш взгляд, проблема связана со спецификой использованного для построения сетки отображения, при котором в точке сопряжения только первые производные ограничены при стремлении вязкости к нулю, тогда как главный член погрешности содержит старшие производные, стремящиеся к бесконечности. Даже для схемы первого порядка погрешность содержит потенциально бесконечные вторые производные.

Парадоксальность результата состоит в том, что логарифмический слой шире экспоненциального и степенного, и градиенты в нем не столь велики, как в других слоях, поэтому интуитивно он представлялся наиболее простым для уверенного счета, и тем не менее принятая технология выделения особенности и склейки на границе слоя не позволила получить наилучший результат. Очевидно, для логарифмического слоя следует строить более удачное базовое отображение, у которого в точке склейки старшие производные были бы ограниченными при стремящейся к нулю вязкости.

Литература

1. **Бахвалов Н.С.** Об оптимизации методов численного решения краевых задач с пограничными слоями // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1969. — Т. 9, № 4. — С. 842–859. Перевод: Bakhvalov N.S. On the Optimization of the Methods for Solving Boundary Value Problems in the Presence of a Boundary Layer // J. Comput. Maths. Math. Phys. — 1969. — Vol. 9, № 4. — P. 139–166.
2. **Шишкин Г.И.** Разностная схема для сингулярно возмущенного уравнения параболического типа с разрывным начальным условием // Докл. АН СССР. — 1988. — Т. 300, № 5. — С. 1066–1070. Перевод: Shishkin G.I. A Difference scheme for a singularly perturbed equation of parabolic type with a discontinuous initial condition // Dokl. Math. — 1988. — Vol. 37, № 3. — P. 792–796.
3. **Лисейкин В.Д., Паасонен В.И.** Компактные разностные схемы и адаптивные сетки для численного моделирования задач с пограничными и внутренними слоями // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2019. — Т. 22, № 1. — С. 41–56. Перевод: Liseikin V.D., Paasonen V.I. Compact difference schemes and layer-resolving grids for numerical modeling of problems with boundary and interior layers // Numerical Analysis and Applications. — 2019. — Vol. 12, № 1. — P. 37–50.
4. **Liseikin V.D.** Layer Resolving Grids and Transformations for Singular Perturbation Problems. — Utrecht: VSP, 2001.
5. **Паасонен В.И.** Компактные схемы третьего порядка точности на неравномерных адаптивных сетках // Вычислительные технологии. — 2015. — Т. 20, № 2. — С. 56–64.
6. **Паасонен В.И.** Схема третьего порядка аппроксимации на неравномерной сетке для уравнений Навье–Стокса // Вычислительные технологии. — 2000. — Т. 5, № 5. — С. 78–85.
7. **Глуховский А.С., Паасонен В.И.** Компактные разностные схемы для уравнений Навье–Стокса на неравномерных сетках // “Марчужковские научные чтения – 2017”. Тр. Междунар. науч. конф. “Вычислительная и прикладная математика 2017”, 25–30 июня 2017 г. — Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2017. — С. 211–217.
8. **Лисейкин В.Д.** О численном решении уравнений со степенным пограничным слоем // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1986. — Т. 26, № 12. — С. 1813–1820. Перевод: Liseikin V.D. On the numerical solution of singularly perturbed equations with a turning point // J. Comput. Maths. Math. Phys. — 1986. — Vol. 26, № 6. — P. 133–139.

9. **Vulanović P.** Mesh construction for numerical solution of a type of singular perturbation problems // Numer. Meth. Approx. Theory. — University of Niš, 1984. — P. 137–142.
10. **Полубаринова-Кочина П.Я.** Теория движения грунтовых вод. — М.: Наука, 1977.
11. **Замараев К.И., Хайрутдинов Р.Ф., Жданов В.П.** Туннелирование электронов в химии: Химические реакции на больших расстояниях. — Новосибирск: Наука, 1985.

Поступила в редакцию 26 марта 2019 г.

После рецензирования без замечаний 28 марта 2019 г.

Принята к печати 21 октября 2020 г.

Литература в транслитерации

1. **Bakhvalov N.S.** Ob optimizatsii metodov chislennogo resheniya kraevykh zadach s pogranichnymi sloyami // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1969. — Т. 9, № 4. — S. 842–859. Pervod: Bakhvalov N.S. On the Optimization of the Methods for Solving Boundary Value Problems in the Presence of a Boundary Layer // J. Comput. Maths. Math. Phys. — 1969. — Vol. 9, № 4. — P. 139–166.
2. **Shishkin G.I.** Raznostnaya skhema dlya singulyarno vozmushchennogo uravneniya parabolicheskogo tipa s razryvnym nachal'nym usloviem // Dokl. AN SSSR. — 1988. — Т. 300, № 5. — S. 1066–1070. Pervod: Shishkin G.I. A Difference scheme for a singularly perturbed equation of parabolic type with a discontinuous initial condition // Dokl. Math. — 1988. — Vol. 37, № 3. — P. 792–796.
3. **Liseikin V.D., Paasonen V.I.** Kompaktye raznostnye skhemy i adaptivnye setki dlya chislennogo modelirovaniya zadach s pogranichnymi i vnutrennimi sloyami // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2019. — Т. 22, № 1. — S. 41–56. Pervod: Liseikin V.D., Paasonen V.I. Compact difference schemes and layer-resolving grids for numerical modeling of problems with boundary and interior layers // Numerical Analysis and Applications. — 2019. — Vol. 12, № 1. — P. 37–50.
4. **Liseikin V.D.** Layer Resolving Grids and Transformations for Singular Perturbation Problems. — Utrecht: VSP, 2001.
5. **Paasonen V.I.** Kompaktnye skhemy tret'ego poryadka tochnosti na neravnomernykh adaptivnykh setkakh // Vychislitel'nye tekhnologii. — 2015. — Т. 20, № 2. — S. 56–64.
6. **Paasonen V.I.** Skhema tret'ego poryadka approksimatsii na neravnomerной setke dlya uravnenii Nav'e–Stoksa // Vychislitel'nye tekhnologii. — 2000. — Т. 5, № 5. — S. 78–85.
7. **Glukhovskii A.S., Paasonen V.I.** Kompaktnye raznostnye skhemy dlya uravnenii Nav'e–Stoksa na neravnomernykh setkakh // “Marchukovskie nauchnye chteniya – 2017”. Tr. Mezhdunar. nauch. konf. “Vychislitel'naya i prikladnaya matematika 2017”, 25–30 iyunya 2017 g. — Novosibirsk: Izd-vo IVMiMG SO RAN, 2017. — S. 211–217.
8. **Liseikin V.D.** O chislennom reshenii uravnenii so stepennym pogranichnym sloem // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1986. — Т. 26, № 12. — S. 1813–1820. Pervod: Liseikin V.D. On the numerical solution of singularly perturbed equations with a turning point // J. Comput. Maths. Math. Phys. — 1986. — Vol. 26, № 6. — P. 133–139.
9. **Vulanović P.** Mesh construction for numerical solution of a type of singular perturbation problems // Numer. Meth. Approx. Theory. — University of Niš, 1984. — P. 137–142.
10. **Polubarinova-Kochina P.Ya.** Teoriya dvizheniya gruntovykh vod. — М.: Наука, 1977.
11. **Zamaraev K.I., Khairutdinov R.F., Zhdanov V.P.** Tunnelirovanie elektronov v khimii: Khimicheskie reaktsii na bol'shikh rasstoyaniyakh. — Novosibirsk: Nauka, 1985.