

17. Warhaft Z., Lumley J. L. An experimental study of the decay of temperature fluctuations in grid-generated turbulence // *J. Fluid Mech.* — 1978. — V. 88, N 4.  
 18. Sreenivasan K. R., Tavoularis S. et al. Temperature fluctuations and scales in grid-generated turbulence // *J. Fluid Mech.* — 1980. — V. 100, N 3.

Поступила 5/V 1987 г.

УДК 534.2 : 532.529

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА В ПОЛИДИСПЕРСНЫХ ГАЗОВЗВЕСЯХ

Н. А. Гумеров, А. И. Ивандаев

(Тюмень)

Большинство работ по акустике газовзвесей посвящено изучению распространения линейных и слабонелинейных волн в монодисперсных смесях [1—5]. Влияние полидисперсности на распространение линейных монохроматических волн впервые исследовано в [6]. Однако рассмотрен лишь наиболее простой случай малого массового содержания взвешенной фазы, когда вклад частиц определенного размера в дисперсию и диссипацию звука фактически пропорционален их массовой доле в смеси.

В данной работе впервые изучены особенности распространения звуковых волн в полидисперсных газо- и паровзвесях при произвольных (не обязательно малых) массовых содержаниях взвешенных частиц или капель. Некоторые результаты ранее отражены в [7].

**1. Общие соображения.** Реальные газовзвеси как естественного, так и искусственного происхождения обычно не являются монодисперсными. В них присутствуют частицы самых разных размеров, зачастую сильно отличающихся друг от друга. Дисперсный состав таких смесей в каждой точке пространства характеризуется функцией распределения частиц по размерам  $N(a, \mathbf{r}, t)$ , а также их минимальным  $a_{\min}(\mathbf{r}, t)$  и максимальным  $a_{\max}(\mathbf{r}, t)$  радиусами. Имеем

$$dn(a, \mathbf{r}, t) = N(a, \mathbf{r}, t) da, \quad n(\mathbf{r}, t) = \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} N(a, \mathbf{r}, t) da.$$

Здесь  $a$  — радиус частиц;  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки;  $t$  — время;  $dn$  — число частиц в единице объема, имеющих радиус от  $a$  до  $a + da$ ;  $n$  — суммарное число частиц всех размеров в единице объема смеси в пространственно-временной точке  $(\mathbf{r}, t)$ .

Рассмотрим достаточно общий случай смеси с фазовыми переходами на границах раздела фаз. В процессе движения такой смеси начальная функция распределения частиц (капель) по размерам будет меняться не только в силу движения капель разных размеров относительно друг друга, но и в результате непосредственного изменения размеров отдельных капель из-за испарения (конденсации). Минимальный и максимальный радиус частиц также не будут оставаться постоянными.

Далее ограничимся рассмотрением первоначально однородных взвесей, т. е. предположим, что начальное невозмущенное состояние однородно по пространству и характеризуется некоторой начальной функцией распределения частиц по размерам  $N_0(a_0)$  (индексом 0 внизу обозначены невозмущенные значения функций и параметров). Предположим также, что число частиц с радиусом от  $a$  до  $a + da$  в единице объема смеси велико и движение этой совокупности (фракции) частиц может быть описано методами механики гетерогенных сред [8] как движение монодисперсного континуума с характерным радиусом частиц  $a$ . Полидисперсной фазой назовем совокупность всех монодисперсных фракций в смеси \*. Эти фракции будем считать априори заданными и индивидуализировать их по

\* Полидисперсная «фаза» не является фазой в обычном понимании этого слова, поскольку для нее не вводятся понятия средней скорости и температуры фазы.

невозмущенному радиусу частиц  $a_0$ . Таким образом,  $a_0$  будет служить «номером» или «индексом» фракции, выполняя тем самым роль некоторой лагранжевой переменной  $\widehat{a} = a_0$ . При этом текущий радиус  $a = a(\widehat{a}, \mathbf{r}, t)$ .

Введем  $N(\widehat{a}, \mathbf{r}, t)$ , трактуя  $N(\widehat{a}, \mathbf{r}, t)d\widehat{a}$  как число частиц в пространственно-временной «точке»  $(\mathbf{r}, t)$ , имевших в начальный момент  $a_0 = \widehat{a}$ :  $a(\widehat{a}, \mathbf{r}, t) = \widehat{a} + a'(\widehat{a}, \mathbf{r}, t)$ ;  $N(\widehat{a}, \mathbf{r}, t) = N_0(\widehat{a}) + N'(\widehat{a}, \mathbf{r}, t)$ . Здесь и далее штрихом обозначены малые возмущения ( $|a'| \ll a_0$ ,  $|N'| \ll N_0$ ), индекс 1 внизу используется для обозначения параметров несущей фазы, 2 — параметров «фазы» частиц.

Масса, скорость и температура частиц «фазы» 2 — функции лагранжевой переменной  $\widehat{a}$ :

$$m_2 = m_2(\widehat{a}, \mathbf{r}, t) = \frac{4}{3} \pi a^3(\widehat{a}, \mathbf{r}, t) \rho_2^0, \quad v_2 = v_2(\widehat{a}, \mathbf{r}, t), \quad T_2 = T_2(\widehat{a}, \mathbf{r}, t)$$

( $\rho_2^0 = \text{const}$  — истинная плотность материала частиц). Скорость и температура фазы 1, разумеется, не зависят от  $\widehat{a}$ . Что касается интенсивностей межфазного обмена частиц с газом, то они зависят от внутренней переменной  $\widehat{a}$  в силу зависимости от нее параметров частиц.

Понятия объемного содержания  $\alpha_j$  и средней плотности  $\rho_j$   $j$ -й фазы ( $j = 1, 2$ ;  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ) [8] естественным образом обобщаются на случай полидисперсной взвеси:

$$\alpha_2 = \int_{\widehat{a}_{\min}}^{\widehat{a}_{\max}} \frac{4}{3} \pi a^3(\widehat{a}, \mathbf{r}, t) N(\widehat{a}, \mathbf{r}, t) d\widehat{a}, \quad \rho_2 = \alpha_2 \rho_2^0$$

( $\widehat{a}_{\min}$  и  $\widehat{a}_{\max}$  — минимальный и максимальный радиусы частиц в невозмущенном состоянии).

**2. Основные уравнения.** Далее ограничимся рассмотрением плоских одномерных движений при условии малости возмущений параметров среды. Получение линейных дифференциальных уравнений движения полидисперсной смеси на основе линейных уравнений для монодисперсной смеси проиллюстрируем на примере уравнения сохранения массы дисперсной фазы.

Пусть  $d\rho_2 = m_2 N d\widehat{a}$  — средняя плотность монодисперсной фракции частиц, характеризуемой параметром  $\widehat{a}$ . Линеаризованное уравнение сохранения массы этой квазимонодисперсной фракции может быть записано в виде [3]  $\partial(\partial\rho_2')/\partial t + (d\rho_2) \partial v_2'/\partial x = j N_0 d\widehat{a}$ . Интегрируя это уравнение по  $\widehat{a}$  от  $\widehat{a}_{\min}$  до  $\widehat{a}_{\max}$ , получим

$$\frac{\partial \rho_2'}{\partial t} + \int_{\widehat{a}_{\min}}^{\widehat{a}_{\max}} N_0(\widehat{a}) m_{20}(\widehat{a}) \frac{\partial v_2'}{\partial x}(\widehat{a}, x, t) d\widehat{a} = \int_{\widehat{a}_{\min}}^{\widehat{a}_{\max}} N_0(\widehat{a}) j(\widehat{a}, x, t) d\widehat{a},$$

где  $\rho_2'$  — возмущение средней плотности дисперсной фазы в целом:  $\rho_2' =$

$$= \int_{\widehat{a}_{\min}}^{\widehat{a}_{\max}} [m_2'(\widehat{a}, x, t) N_0(\widehat{a}) + m_{20}(\widehat{a}) N'(\widehat{a}, x, t)] d\widehat{a}.$$

Рассуждая подобным образом, можно записать линеаризованную систему уравнений плоского одномерного движения полидисперсной смеси пара с каплями, обобщающую систему уравнений движения монодисперсной смеси [3]:

$$(2.4) \quad \frac{\partial \rho_1'}{\partial t} + \rho_{10} \frac{\partial v_1'}{\partial x} = - \int_{\widehat{a}_{\min}}^{\widehat{a}_{\max}} \widetilde{N}_0 j d\widehat{a}, \quad \frac{\partial \rho_2'}{\partial t} + \int_{\widehat{a}_{\min}}^{\widehat{a}_{\max}} \widetilde{N}_0 \widetilde{m}_{20} \frac{\partial v_2'}{\partial x} d\widehat{a} = \int_{\widehat{a}_{\min}}^{\widehat{a}_{\max}} \widetilde{N}_0 j d\widehat{a};$$

$$(2.2) \quad \rho_{10} \frac{\partial v'_1}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x} = - \int_{\tilde{a}_{\min}}^{\tilde{a}_{\max}} \tilde{N}_0 \tilde{j} d\tilde{a}, \quad \tilde{m}_{20} \frac{\partial \tilde{v}'_2}{\partial t} = \tilde{f};$$

$$(2.3) \quad \rho_{10} c_1 \frac{\partial T'_1}{\partial t} - \alpha_{10} \frac{\partial p'}{\partial t} = - \int_{\tilde{a}_{\min}}^{\tilde{a}_{\max}} \tilde{N}_0 \tilde{q}_{1\sigma} d\tilde{a}, \quad \tilde{m}_{20} c_2 \frac{\partial \tilde{T}'_2}{\partial t} = - \tilde{q}_{2\sigma};$$

$$(2.4) \quad \tilde{q}_{1\sigma} + \tilde{q}_{2\sigma} = - \tilde{j} \tilde{l}_0, \quad p' = \frac{C_1^2}{\alpha_{10} \gamma_1} (\rho'_1 + r \rho'_2) + \frac{p_0}{T'_0} T'_1.$$

Здесь (2.1) — уравнения сохранения масс несущей и дисперсной фаз; (2.2) — уравнения сохранения импульсов газа и меченной параметром  $\tilde{a}$  фракции дисперсных частиц; (2.3) — уравнения притока тепла для газа и частиц меченой фракции; (2.4) — уравнение теплового баланса на поверхности частицы, идентифицируемой параметром  $\tilde{a}$ , и уравнение состояния газа;  $p$  — давление в газе;  $q_{j\sigma}$  — поток тепла от  $j$ -й фазы к поверхности индивидуальной частицы;  $l$  — удельная теплота парообразования;  $\gamma_1$  — показатель адиабаты газа;  $r = \rho_{10}^0 / \rho_2^0$  — отношение истинных плотностей фаз;  $c_j$  — удельная теплоемкость материала  $j$ -й фазы (для газа — при постоянном давлении);  $C_1$  — скорость звука в чистом газе; величины, зависящие от параметра  $\tilde{a}$ , отмечены знаком  $\sim$ .

Система уравнений (2.1) — (2.4) замкнута, если заданы выражения для локальных потоков массы, импульса и тепла  $\tilde{j}$ ,  $\tilde{f}$  и  $q_{j\sigma}$ . Согласно [3], имеем

$$(2.5) \quad \tilde{f} = \tilde{m}_{20} \left( \frac{v'_1 - \tilde{v}'_2}{\tilde{\tau}_v^*} - \frac{v'_1}{\tilde{\tau}_A^*} \right), \quad \tilde{j} = \frac{\tilde{m}_{20} r c_1}{l_0} \frac{T'_S - \tilde{T}'_\sigma}{\tilde{\tau}_\sigma}, \quad T'_S = \frac{T_0 (1-r)}{l_0 \rho_{10}^0} p',$$

$$\tilde{q}_{1\sigma} = \tilde{m}_{20} \frac{\rho_{10} c_1}{\rho_{20}} \frac{T'_1 - \tilde{T}'_\sigma}{\tilde{\tau}_{T1}^*}, \quad \tilde{q}_{2\sigma} = \tilde{m}_{20} c_2 \frac{\tilde{T}'_2 - \tilde{T}'_\sigma}{\tilde{\tau}_{T2}^*},$$

где  $T'_S$  — температура насыщения, связанная с давлением уравнением Клапейрона — Клаузиуса;  $T'_\sigma$  — температура поверхности индивидуальной частицы;  $\tau$  — характерные комплексные «времена», которые учитывают нестационарность процессов межфазного взаимодействия и в случае гармонических колебаний с частотой  $\omega$  определяются выражениями [9]

$$(2.6) \quad \tilde{\tau}_v^* = \tilde{\tau}_v \left[ 1 + \frac{1-i}{\sqrt{2}} (\omega \tilde{\tau}_{\mu 1})^{1/2} - \frac{1}{9} i \omega \tilde{\tau}_{k,1} \right]^{-1}, \quad \tau_A^* = - \frac{i}{r \omega},$$

$$\tilde{\tau}_\sigma = \frac{1-r}{3(\gamma_1-1)} \sqrt{\frac{2\tilde{\sigma}}{\gamma_1}} \frac{\tilde{a} C_1^3}{\rho_1^2}, \quad \tilde{\tau}_{T1}^* = \frac{1}{3} \frac{\alpha_{10}}{\alpha_{20}} \tilde{\tau}_{\lambda 1} \eta_1(\tilde{z}_1), \quad \tilde{\tau}_{T2}^* = \frac{1}{15} \tilde{\tau}_{\lambda 2} \eta_2(\tilde{z}_2),$$

$$\tilde{\tau}_v = \frac{2}{9} \frac{\rho_2^0 \tilde{a}^2}{\mu_1}, \quad \tilde{\tau}_{\mu 1} = \frac{\rho_1^0 \tilde{a}^2}{\mu_1}, \quad \tilde{\tau}_{\lambda j} = \frac{\tilde{a}^2}{\kappa_j}, \quad \tilde{z}_j = \frac{1-i}{\sqrt{2}} (\omega \tilde{\tau}_{\lambda j})^{1/2} \quad (j = 1, 2),$$

$$\eta_1(z) = \frac{1}{1+z}, \quad \eta_2(z) = \frac{5[3z - (3+z^2) \operatorname{th} z]}{z^2 (\operatorname{th} z - z)}, \quad \kappa_j = \frac{\lambda_j}{\rho_j^0 c_j}.$$

Здесь  $\mu_j$  — динамическая вязкость газа;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  $\tilde{\sigma}$  — коэффициент аккомодации. Замкнутая система уравнений (2.1) — (2.6), полученная в предположении малости объемного содержания взвешенной фазы  $\alpha_2 \ll 1$ , может быть использована для анализа акустических свойств полидисперсных смесей пара с каплями и газа с частицами.

**3. Дисперсионные зависимости.** Будем искать решения системы (2.1) — (2.6) в виде прогрессивных волн для возмущений параметров  $\chi'$ :

$$(3.1) \quad \chi' = A_\chi \exp [i(k_* x - \omega t)] = A_\chi \exp(-k_{**} x) \exp [i(kx - \omega t)]$$

$$(k_* = k + ik_{**}, \quad C_p = \omega/k, \quad C_g = d\omega/dk, \quad \sigma = 2\pi C_p k_{**}/\omega),$$

где  $A_\chi$  — комплексная амплитуда возмущения параметра  $\chi$ ;  $i$  — мнимая единица;  $k_*$  — комплексное волновое число;  $k_{**}$  — линейный коэффициент затухания;  $C_p$ ,  $C_g$  и  $\sigma$  — фазовая скорость, групповая скорость и декремент затухания на длине волны.

Здесь, в отличие от монодисперсного случая [3], возмущения  $v'_2$ ,  $T'_2$  и  $T'_\sigma$  зависят не только от  $(x, t)$ , но и от внутреннего параметра дисперсной фазы  $\hat{a}$ . Таким образом, амплитуды возмущений  $A_{v_2}$ ,  $A_{T_2}$ ,  $A_{T_\sigma}$  — функции от  $\hat{a}$ , что в соответствии с принятыми обозначениями отмечается далее знаком  $\sim$ .

Обозначим через  $\langle \tilde{f} \rangle$  действие на  $\tilde{f}$  линейного оператора:

$$\langle \tilde{f} \rangle = \left( \int_{\hat{a}_{\min}}^{\hat{a}_{\max}} \tilde{N}_0 \tilde{f} \hat{a}^3 d\hat{a} \right) / \left( \int_{\hat{a}_{\min}}^{\hat{a}_{\max}} \tilde{N}_0 \hat{a}^3 d\hat{a} \right) = \frac{1}{\rho_{20}} \int_{\hat{a}_{\min}}^{\hat{a}_{\max}} \tilde{N}_0 \tilde{m}_{20} \tilde{f} d\hat{a}.$$

В силу определения, если  $f$  от  $\hat{a}$  не зависит, то  $\langle f \rangle \equiv f$ . Подставляя (3.1) в (2.1) — (2.6), имеем

$$(3.2) \quad \begin{aligned} -i\omega A_{\rho_1} + ik_* \rho_{10} A_{v_1} + \frac{rc_i}{l_0} \rho_{20} \left\langle \frac{A_{TS} - \tilde{A}_{T\sigma}}{\tilde{\tau}_\sigma} \right\rangle &= 0, \\ -i\omega A_{\rho_2} + ik_* \rho_{20} \langle \tilde{A}_{v_2} \rangle - \frac{rc_1}{l_0} \rho_{20} \left\langle \frac{A_{TS} - \tilde{A}_{T\sigma}}{\tilde{\tau}_\sigma} \right\rangle &= 0, \\ -i\omega \rho_{10} A_{v_1} + ik_* A_p + \rho_{20} \left[ \left\langle \frac{A_{v_1} - \tilde{A}_{v_2}}{\tilde{\tau}_v^*} \right\rangle - \frac{A_{v_1}}{\tilde{\tau}_A^*} \right] &= 0, \\ -i\omega \rho_{10} c_1 A_{T_1} + i\omega \alpha_{10} A_p + \rho_{10} c_1 \left\langle \frac{A_{T_1} - \tilde{A}_{T\sigma}}{\tilde{\tau}_{T_1}^*} \right\rangle &= 0; \end{aligned}$$

$$(3.3) \quad \begin{aligned} -i\omega \tilde{A}_{v_2} - \frac{A_{v_1} - \tilde{A}_{v_2}}{\tilde{\tau}_v^*} + \frac{A_{v_1}}{\tilde{\tau}_A^*} &= 0, \quad -i\omega \tilde{A}_{T_2} + \frac{\tilde{A}_{T_2} - \tilde{A}_{T\sigma}}{\tilde{\tau}_{T_2}^*} = 0, \\ \frac{A_{T_1} - \tilde{A}_{T\sigma}}{\tilde{\tau}_{\sigma 1}^*} + \frac{\tilde{A}_{T_2} - \tilde{A}_{T\sigma}}{\tilde{\tau}_{\sigma 2}^*} - \frac{\tilde{A}_{T\sigma} - A_{TS}}{\tilde{\tau}_\sigma} &= 0; \end{aligned}$$

$$(3.4) \quad A_T - \frac{C_1^2}{\alpha_{10} \gamma_1} (A_{\rho_1} + r A_{\rho_2}) - \frac{r_0}{T_0} A_{T_1} = 0, \quad A_{TS} - \frac{T_0 (1-r)}{\rho_{10}^0 l_0} A_p = 0$$

$$\left( \tilde{\tau}_{\sigma 1}^* = \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \tilde{\tau}_{T_1}^*, \quad \tilde{\tau}_{\sigma 2}^* = \frac{\rho_{10}^0 c_1}{\rho_{20}^0 c_2} \tilde{\tau}_{T_2}^* \right).$$

Из уравнений (3.3) следует, что амплитуды  $\tilde{A}_{v_2}$ ,  $\tilde{A}_{T_2}$  и  $\tilde{A}_{T\sigma}$  можно выразить через характерные времена релаксаций, являющиеся известными функциями от  $\hat{a}$  (см. (2.6)), и амплитуды  $A_{v_1}$ ,  $A_{T_1}$ ,  $A_{TS}$ , которые от  $\hat{a}$  не зависят:

$$(3.5) \quad \tilde{A}_{v_2} = \frac{1 - \tilde{\tau}_v^* / \tilde{\tau}_A^*}{1 - i\omega \tilde{\tau}_v^*} A_{v_1}, \quad \tilde{A}_{T_2} = \frac{1}{1 - i\omega \tilde{\tau}_{T_2}^*} \tilde{A}_{T\sigma},$$

$$\tilde{A}_{T\sigma} = \left[ \frac{1}{\tilde{\tau}_\sigma} + \frac{1}{\tilde{\tau}_{\sigma 1}^*} + \frac{1}{\tilde{\tau}_{\sigma 2}^*} - \frac{1}{\tilde{\tau}_{\sigma 2}^* (1 - i\omega \tilde{\tau}_{T_2}^*)} \right]^{-1} \left( \frac{1}{\tilde{\tau}_{\sigma 1}^*} A_{T_1} + \frac{1}{\tilde{\tau}_\sigma} A_{TS} \right).$$

Подставляя (3.5) в соответствующие выражения (3.2), все амплитуды возмущений можно вынести из-под знаков оператора осреднения  $\langle \cdot \rangle$ . В результате из уравнений (3.2), (3.4) получается однородная система из шести линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд  $A_{\rho_1}$ ,  $A_{\rho_2}$ ,  $A_{v_1}$ ,  $A_p$ ,  $A_{T_1}$ ,  $A_{TS}$ .

Интересующая нас дисперсионная зависимость волнового числа от частоты колебаний  $\omega$  находится из условия существования нетривиального решения этой однородной системы и может быть записана в виде [3]

$$(3.6) \quad (C_1 k_*/\omega)^2 = V(\omega) \Theta(\omega),$$

где  $V(\omega)$  и  $\Theta(\omega)$  — комплексозначные функции частоты  $\omega$ , первая из которых ответственна за описание дисперсии и диссипации из-за межфазного трения, вторая — из-за межфазного теплообмена. Они зависят от теплофизических свойств фаз и от спектрального состава взвеси:

$$(3.7) \quad V(\omega) = 1 + m \frac{(\alpha_{10} - r) \langle \tilde{g} \rangle - \alpha_{10} r}{1 + mr \langle \tilde{g} \rangle}, \quad \tilde{g} = \frac{1 - \tilde{\tau}_v^*/\tau_A^*}{1 - i\omega \tilde{\tau}_v^*},$$

$$(3.8) \quad \Theta(\omega) = 1 - \frac{(\gamma_1 - 1) \langle \tilde{e}_3 \rangle - \frac{1-r}{\bar{l}} \left[ 2 \langle \tilde{e}_1 \rangle - \frac{1-r}{(\gamma_1 - 1) \bar{l}} \langle \tilde{e}_2 \rangle \right] + \frac{mr}{\gamma_1 - 1} \left( \frac{1-r}{\bar{l}} \right)^2 [\langle \tilde{e}_1 \rangle^2 - \langle \tilde{e}_2 \rangle \langle \tilde{e}_3 \rangle]}{1 - mr \langle \tilde{e}_3 \rangle},$$

$$\tilde{e}_1 = \left[ i\omega (\tilde{\tau}_\sigma + \tilde{\tau}_{\sigma 1}) + \frac{c_2}{rc_1} \frac{\omega^2 \tilde{\tau}_\sigma \tilde{\tau}_{\sigma 1}^*}{1 - i\omega \tilde{\tau}_{T 2}^*} \right]^{-1},$$

$$\tilde{e}_2 = \frac{1}{i\omega \tilde{\tau}_c} (1 - i\omega \tilde{\tau}_{\sigma 1}^* \tilde{e}_1), \quad \tilde{e}_3 = \frac{1}{i\omega \tilde{\tau}_{\sigma 1}^*} (1 - i\omega \tilde{\tau}_\sigma \tilde{e}_1)$$

( $m = \rho_{20}/\rho_{10}$  — относительное массовое содержание частиц,  $\bar{l} = l/C_1^2$  — безразмерная теплота парообразования).

Дисперсионная зависимость (3.6) — (3.8) описывает акустические свойства полидисперсных паро- и газовзвесей с произвольной начальной функцией распределения частиц по размерам. В частном случае монодисперсной взвеси, когда плотность вероятности является  $\delta$ -функцией Дирака, т. е.  $N_0(\hat{a}) = n_0 \delta(\hat{a} - a_0)$ , имеем  $\langle \tilde{g} \rangle = g(a_0, \omega)$ ,  $\langle \tilde{e}_j \rangle = e_j(a_0, \omega)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) и зависимость (3.6) — (3.8) естественным образом переходит в известную [3]. При  $m = 0$ , когда частиц вообще нет,  $V = \Theta = 1$ , т. е. дисперсия и диссипация волн в газе без частиц отсутствуют. Для полидисперсной смеси газа с твердыми частицами (отсутствуют фазовые переходы,  $\tau_\sigma = \infty$ ) функция  $\Theta(\omega)$  (3.8) в дисперсионном соотношении (3.6) имеет существенно более простой вид

$$(3.9) \quad \Theta(\omega) = 1 + (\gamma_1 - 1) \frac{H_T(\omega)}{1 + H_T(\omega)}, \quad H_T = m \frac{c_2}{c_1} \langle \tilde{h}_T \rangle,$$

$$\tilde{h}_T = (1 - i\omega \tilde{\tau}_T^*)^{-1}, \quad \tilde{\tau}_T^* = \frac{c_2}{rc_1} (\tilde{\tau}_{\sigma 1}^* + \tilde{\tau}_{\sigma 2}^*) \approx \frac{c_2}{rc_1} \tilde{\tau}_{\sigma 1}^*,$$

также согласующийся с известным результатом для монодисперсных газовзвесей [3].

При умеренных давлениях газовой фазы  $r \ll 1$ . В этом случае, учитывая также  $\alpha_2 \ll 1$ , можно получить из (3.7) более простое выражение для дисперсионно-диссипативной функции  $V(\omega)$ :

$$(3.10) \quad V(\omega) = 1 + H_v(\omega), \quad H_v = m \langle \tilde{h}_v \rangle,$$

$$\tilde{h}_v = (1 - i\omega \tilde{\tau}_v^{*0})^{-1}, \quad \tilde{\tau}_v^{*0} = \tilde{\tau}_v \left[ 1 + \frac{1-i}{\sqrt{2}} (\omega \tilde{\tau}_{\mu 1})^{1/2} \right].$$

Если фазовые переходы отсутствуют, то имеет смысл рассмотреть распространение акустических волн в газовзвеси, состоящей из конечного числа фракций частиц, различающихся не только размерами, но и теплофизическими свойствами. Примерами такой среды могут служить различные смеси дымов, газовзвеси, загрязненные примесями, и т. п. В этом случае «времена» релаксаций для каждой дисперсной фазы будут различаться не только за счет размеров частиц, но и за счет теплофизических

свойств фаз. Дисперсионное соотношение, описывающее распространение звука в многофазной газовой смеси, приведено в [7], оно выводится из системы типа (2.1)–(2.6) и имеет вид (3.6), (3.9), (3.10), где под  $H_v$  и  $H_T$  надо понимать

$$(3.11) \quad H_v = \sum_{k=2}^N m_k h_{vk}, \quad H_T = \sum_{k=2}^N m_k \frac{c_k}{c_1} h_{Tk}, \quad \sum_{k=2}^N m_k = m.$$

Здесь  $c_k$ ,  $m_k$  — теплоемкость материалов частиц и относительное массовое содержание  $k$ -й дисперсной фазы ( $k = 2, \dots, N$ );  $h_{vk}$  и  $h_{Tk}$  получаются, если в соответствующих выражениях для  $\tilde{h}_v$ ,  $\tilde{h}_T$  и времен  $\tau$  (3.9), (3.10), (2.6) положить  $\tilde{a} = a_k$ ,  $\rho_z^0 = \rho_k^0$ ,  $c_2 = c_k$  ( $\rho_k^0$  — плотность материалов частиц  $k$ -й дисперсной фазы).

Из (3.6), (3.9)–(3.11) ясно, как устроено дисперсионное соотношение, когда газовая смесь состоит из конечного числа сортов частиц, различающихся теплофизическими свойствами, а в каждом сорте имеется распределение частиц по размерам с функцией  $N_{k0}(\tilde{a}_k)$  ( $\tilde{a}_k$  — лагранжеский параметр  $k$ -й полидисперсной фазы). При этом функции  $H_v$  и  $H_T$ , входящие в (3.9), (3.10), следующие:

$$(3.12) \quad H_v = \sum_{k=2}^N m_k \langle \tilde{h}_{vk} \rangle_k, \quad H_T = \sum_{k=2}^N m_k \frac{c_k}{c_1} \langle \tilde{h}_{Tk} \rangle_k$$

( $\langle \rangle_k$  — оператор осреднения с функцией  $N_{k0}(\tilde{a}_k)$ ).

Особый интерес представляют широко встречающиеся в практике взвеси типа аэрозоля с малым содержанием частиц ( $m \ll 1$ ). Сохраняя в (3.6)–(3.8) лишь линейные по  $m$  члены и учитывая, что  $r \ll 1$ , находим более простую дисперсионную зависимость для однокомпонентных аэрозолей с фазовыми превращениями:

$$(3.13) \quad C_1 k_* / \omega = 1 + \frac{m}{2} (V^0(\omega) + \Theta^0(\omega)), \quad V^0 = \langle \tilde{h}_v \rangle,$$

$$\Theta^0 = r \left[ \frac{1}{l} \left( 2 \langle \tilde{e}_1 \rangle - \frac{1}{(\gamma_1 - 1)l} \langle \tilde{e}_2 \rangle \right) - (\gamma_1 - 1) \langle \tilde{e}_3 \rangle \right]$$

( $\tilde{e}_j$  и  $\tilde{h}_v$  приведены в (3.8), (3.10)). Здесь в отличие от (3.6)–(3.8) имеет место аддитивность вклада межфазного трения и теплообмена в дисперсию и диссипацию возмущений. Кроме того, видно, что в силу линейности оператора  $\langle \rangle$  соотношение (3.13) может быть получено из соответствующего соотношения для монодисперсного аэрозоля простым интегрированием по массам фракций.

Если в (3.13) заменить  $\Theta^0$  на  $(\gamma_1 - 1)H_T/m$ , то находим дисперсионную зависимость для описания акустических свойств полидисперсных аэрозолей типа газ — твердые частицы. Отметим, что она применима при любых частотах колебаний, удовлетворяющих лишь требованию акустической однородности взвеси. С помощью этой формулы легко получить явные выражения для скорости и коэффициента затухания слабых монохроматических волн в аэрозольной смеси газа с твердыми частицами. Проверка показывает, что при достаточно малых частотах, когда роль нестационарных эффектов межфазного взаимодействия мала, эти формулы совпадают с полученными из других соображений частными формулами [6].

**4. Анализ результатов.** Для исследования принципиальных особенностей распространения звука в полидисперсных взвесях достаточно рассмотреть более простой случай смеси без фазовых переходов, акустические свойства которой описываются дисперсионной зависимостью (3.6), (3.9), (3.10). В дополнение введенным выше используем следующие безразмерные величины и параметры, характеризующие состав, теплофизи-

ческие и акустические свойства такой смеси:

$$(4.1) \quad \text{Pr}_1 = \frac{\mu_1 c_1}{\lambda_1}, \quad \bar{c} = \frac{c_2}{c_1}, \quad \tau_{v*} = \frac{2}{9} \frac{\rho_2^0 a_*^2}{\mu_1}, \quad \Omega = \omega \tau_{v*}, \quad \eta = \lg \Omega,$$

$$\bar{N}(\bar{a}) = \frac{a_*}{n_0} N_0(\bar{a}) \left( \int_{\bar{a}_{\min}}^{\bar{a}_{\max}} \bar{N}(\bar{a}) d\bar{a} = 1 \right), \quad \bar{a} = \frac{\bar{a}}{a_*}, \quad K = k_* C_1 \tau_{v*},$$

$$K = K_1 + iK_2, \quad \bar{C}_p = C_p/C_1, \quad \bar{C}_g = C_g/C_1, \quad \sigma = 2\pi K_2/K_1.$$

Здесь  $a_*$  — представительный радиус, выбор которого обсудим ниже;  $\bar{N}(\bar{a})$  — плотность вероятности в начальном состоянии.

Безразмерные соотношения устанавливают эквивалентность всех газовзвесей с одинаковыми теплофизическими свойствами, одинаковым безразмерным спектром и одинаковым массовым содержанием  $m$ . Например, при одинаковости прочих безразмерных параметров все монодисперсные взвеси независимо от радиуса частиц эквивалентны; эквивалентны и все взвеси с равномерным спектром, у которых одинаково отношение  $\bar{a}_{\max}/\bar{a}_{\min}$  и т. д. В то же время, если две взвеси различаются по своим безразмерным спектрам при равенстве прочих параметров, то и зависимости безразмерных волновых чисел от безразмерной частоты будут, вообще говоря, функционально различаться.

Несмотря на очевидность вышесказанного и экспериментальное подтверждение [6], в литературе встречаются мнения (например, [10]), что путем введения некоторого эффективного радиуса можно добиться того, что акустические свойства полидисперсной среды будут описаны в рамках монодисперсной модели.

Рассмотрим высоко- и низкочастотные асимптотики безразмерного волнового числа, следующие из соотношений (3.6), (3.9), (3.10), (4.1) при  $\Omega \rightarrow \infty$  и  $\Omega \rightarrow 0$ . Членами  $\sim r$  по сравнению с единицей пренебрежем;  $\bar{c}$ ,  $\text{Pr}_1$ ,  $m$  будем считать конечными. Интересующие нас члены разложений имеют вид

$$(4.2) \quad (K/\Omega)_{\Omega \rightarrow \infty} \underset{(r \ll 1)}{\sim} 1 + \frac{m}{2} \left\{ \frac{3}{2} \sqrt{r} (1+i) \psi_{\infty}(\sqrt{\text{Pr}_1}) (\bar{a}_{3,2}^2 \Omega)^{-1/2} + \right. \\ \left. + i \psi_{\infty}(\text{Pr}_1) (\bar{a}_{3,1}^2 \Omega)^{-1} \right\}, \quad \psi_{\infty}(y) = 1 + 2(\gamma_1 - 1)(3y)^{-1};$$

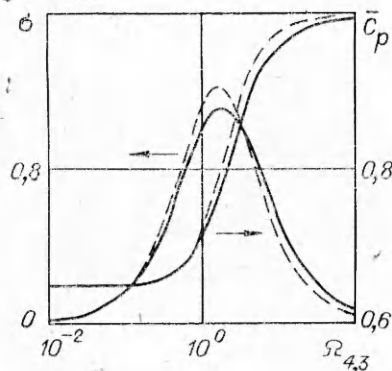
$$(4.3) \quad (K/\Omega)_{\Omega \rightarrow 0} \underset{(r \ll 1)}{\sim} \bar{C}_e \left\{ 1 + \frac{m}{2(1+m)} i \psi_0(\text{Pr}_1) (\bar{a}_{3,3}^2 \Omega) \right\}, \\ \psi_0(y) = 1 + \frac{3}{2} (\gamma_1 - 1) \left[ \frac{\bar{c} \bar{C}_e (1+m)}{1+m\bar{c}} \right]^2 y, \quad \bar{C}_e = \left[ \frac{1+m\bar{c}}{(1+m)(1+m\bar{c}\gamma_1)} \right]^{1/2}.$$

Здесь  $\bar{C}_e$  — равновесная безразмерная скорость звука в смеси;  $a_{i,j}$  — средние радиусы, определяемые формулой

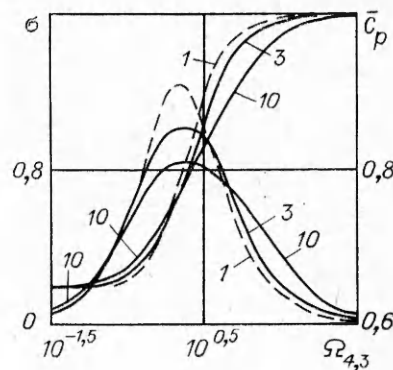
$$(4.4) \quad a_{i,j} = \left\{ \frac{\int_{\bar{a}_{\min}}^{\bar{a}_{\max}} N_0(\bar{a}) \bar{a}^i d\bar{a}}{\int_{\bar{a}_{\min}}^{\bar{a}_{\max}} N_0(\bar{a}) \bar{a}^j d\bar{a}} \right\}^{\frac{1}{i-j}}, \quad i \neq j, \quad \bar{a}_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{a_*}.$$

Средние радиусы, введенные таким образом, лежат на отрезке  $[\bar{a}_{\min}, \bar{a}_{\max}]$  и обладают свойством симметрии  $a_{i,j} = a_{j,i}$ .

Согласно (4.2), (4.3) ((4.2) можно использовать при частотах, не нарушающих акустической однородности среды [3]), затухание звука в полидисперсной смеси при высоких или низких частотах определяется не собственно видом функции  $N_0(\bar{a})$ , а только интегральными характеристиками  $a_{i,j}$ . Поэтому, если выбрать в качестве параметра обезразмеривания  $a_*$  радиус  $a_{3,2}$  (или, если  $r$  очень мало,  $a_{3,1}$ ), то в силу такого выбора



Р и с. 1



Р и с. 2

$\bar{a}_{3,2} = 1$  ( $\bar{a}_{3,1} = 1$ ) и затухание высокочастотных возмущений в полидисперсной смеси с произвольным спектром будет совпадать с затуханием в монодисперсной смеси с  $a_0 = a_*$ . То же самое можно сказать о роли  $a_{5,3}$  для низких частот.

Рассмотрим влияние выбора параметра обезразмеривания  $a_*$  на графики безразмерных функций волнового числа. В качестве примера возьмем график декремента затухания на длине волны  $\sigma(\lg \Omega) = \sigma(\eta)$ , имеющий для монодисперсной взвеси характерный вид колокола (рис. 1, штриховые линии). Пусть безразмерная функция  $\bar{N}(\bar{a})$  фиксирована. Тогда графики  $\sigma(\eta_1)$  и  $\sigma(\eta_2)$  ( $\eta_j = \lg \Omega_j$ ,  $\Omega_j$  — безразмерная частота в смысле параметра обезразмеривания  $a_{*j}$  ( $j = 1, 2$ )) будут, очевидно, переходить друг в друга простым перемещением вдоль оси абсцисс  $\eta$ , поскольку  $\eta_1 = \lg \Omega_1 = \lg \Omega_2 + 2 \lg (a_{*1}/a_{*2}) = \eta_2 + 2 \lg (a_{*1}/a_{*2})$ .

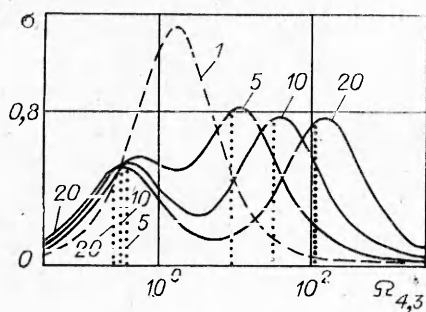
Введем понятие эталонного графика  $\sigma_3(\eta)$ . Из определения (4.4) следует, что для монодисперсной смеси с радиусом  $a_0$  все  $a_{i,j} = a_0$ . График функции  $\sigma(\eta)$  для монодисперсной смеси назовем эталонным  $\sigma = \sigma_3(\eta)$ , если в качестве параметра обезразмеривания  $a_*$  выбран радиус  $a_0$ . Отсюда для монодисперсной смеси при любых  $i \neq j$  имеем  $\sigma(\eta_{i,j}) = \sigma_3(\eta)$  ( $\eta_{i,j} = \lg \Omega_{i,j}$ ,  $\Omega_{i,j}$  — безразмерная частота в смысле параметра обезразмеривания  $a_{i,j}$ ).

Рассмотрим расположение графика  $\sigma(\eta)$  для полидисперсной взвеси относительно эталонного. Пусть в качестве  $a_*$  выбран радиус  $a_{3,2}$ . Тогда в области высоких частот графики  $\sigma(\eta_{3,2})$  и  $\sigma_3(\eta_{3,2})$  асимптотически совпадают. При низких частотах в силу неравенства Гельдера  $\bar{a}_{5,3} = a_{5,3}/a_{3,2} \geq 1$  и монотонного роста  $\sigma(\eta)$  имеем  $\sigma(\eta_{3,2}) \geq \sigma_3(\eta_{3,2})$ . Если выбрать  $a_* = a_{5,3}$ , то, асимптотически совпадая в области низких частот, графики  $\sigma(\eta_{5,3})$  и  $\sigma_3(\eta_{5,3}) = \sigma_3(\eta_{3,2})$  различаются при высоких частотах, причем из  $a_{3,2} = a_{3,2}/a_{5,3} \leq 1$  и монотонного убывания  $\sigma(\eta)$  получим  $\sigma(\eta_{5,3}) \geq \sigma_3(\eta_{5,3})$ . Если же выбрать  $a_*$  из условия  $a_{3,2} \leq a_* \leq a_{5,3}$ ,  $a_* = a_0$ , то как в области высоких, так и низких частот  $\sigma(\eta) \geq \sigma_3(\eta)$ . При таком выборе  $a_*$  имеет место соответствие характерных областей изменения параметра  $\eta$ , где функции  $\sigma(\eta)$  и  $\sigma_3(\eta)$  достигают своих экстремальных значений.

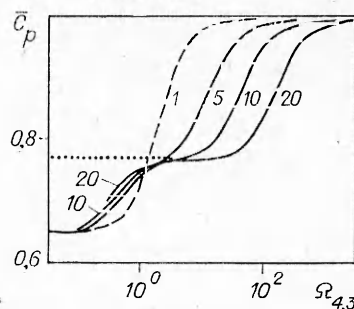
На рис. 1—6 представлены результаты расчетов скорости и затухания звука в газозвезях с параметрами  $m = 1$ ,  $\gamma_1 = 1,4$ ,  $\text{Pr}_1 = 0,72$ ,  $r = 4,3 \cdot 10^{-4}$ ,  $\bar{c} = 0,87$ , соответствующими смесям алюминиевой пыли с воздухом при давлении 0,1 МПа и температуре 293 К. В качестве параметра обезразмеривания взят радиус  $a_{4,3}$ , который, согласно неравенству Гельдера, лежит на отрезке  $[a_{3,2}, a_{5,3}]$ . В этом случае  $\bar{N}(\bar{a})$  удовлетворяет условию нормировки  $\bar{a}_{4,3} = 1$ , т. е. имеет двойную нормировку

$$\int_{\bar{a}_{\min}}^{\bar{a}_{\max}} \bar{N}(\bar{a}) \bar{a}^4 d\bar{a} = \int_{\bar{a}_{\min}}^{\bar{a}_{\max}} \bar{N}(\bar{a}) \bar{a}^3 d\bar{a}, \quad \int_{\bar{a}_{\min}}^{\bar{a}_{\max}} \bar{N}(\bar{a}) d\bar{a} = 1.$$





Р и с. 3



Р и с. 4

Для иллюстраций были выбраны следующие функции, определенные на отрезке  $[\bar{a}_{\min}, \bar{a}_{\max}]$ :

- 1)  $\bar{N}(\bar{a}) = \text{const}$ , 2)  $\bar{N}(\bar{a}) = \text{const} \cdot \bar{a}^{-3}$ ,
- 3)  $\bar{N}(\bar{a}) = \bar{n}_1 \delta(\bar{a} - \bar{a}_1) + \bar{n}_2 \delta(\bar{a} - \bar{a}_2)$ ,

характеризующие два вида равномерного распределения (1 — по радиусам, 2 — по массам) и двухфракционный состав (распределения 3). В силу двойной нормировки  $\bar{N}(\bar{a})$  распределения 1, 2 могут быть заданы одним независимым параметром  $\psi = a_{\max}/a_{\min}$ , а 3 — двумя параметрами  $\psi = a_2/a_1$  и, например,  $\varphi = m_1/m_2 = (n_1 a_1^3)/(n_2 a_2^3)$ :

$$1) \text{const} = \frac{4}{5} (\psi^5 - 1) / [(\psi^4 - 1)(\psi - 1)], \quad \bar{a}_{\min} = \frac{5}{4} (\psi^4 - 1) / (\psi^5 - 1),$$

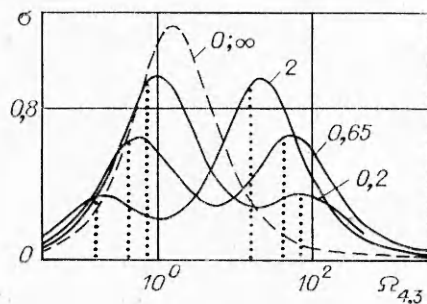
$$\bar{a}_{\max} = \psi \bar{a}_{\min},$$

$$2) \text{const} = 8\psi^2 / [(\psi + 1)^3(\psi - 1)], \quad \bar{a}_{\min} = 2 / (\psi + 1), \quad \bar{a}_{\max} = \psi \bar{a}_{\min},$$

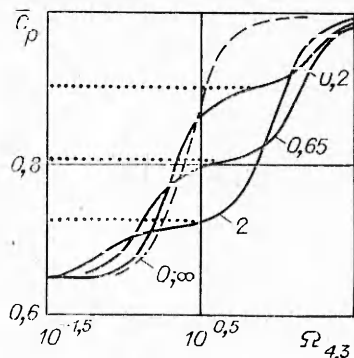
$$3) \bar{n}_2 = 1 / (1 + \varphi\psi^3), \quad \bar{n}_1 = 1 - \bar{n}_2, \quad \bar{a}_1 = (\varphi + 1) / (\varphi + \psi), \quad \bar{a}_2 = \psi \bar{a}_1.$$

Зависимости фазовой скорости  $\bar{C}_p$  и декремента затухания  $\sigma$  от безразмерной частоты  $\Omega_{4,3}$  для взвесей с распределениями 1 и 2 проиллюстрированы на рис. 1 и 2 соответственно. Штриховые кривые — предельные случаи  $\psi = 1$ , отвечающие монодисперсной смеси (эталонные кривые). Для распределения 1, кроме  $\psi = 1$ , представлен лишь случай  $\psi = \infty$  (сплошные линии), поскольку даже в этих крайних ситуациях кривые  $\psi = 1$  и  $\psi = \infty$  различаются не очень сильно. Цифры у линий рис. 2 — значения параметра  $\psi$ . Видно, что при увеличении  $\psi$  (расширение спектра) максимум декремента затухания на длине волны заметно уменьшается, а зависимость скорости звука от частоты становится более пологой.

На рис. 3—6 показаны дисперсия и диссипация слабых волн в газовой взвеси с дискретным спектром 3. Рис. 3, 4 построены при фиксированном  $\varphi = 1$  и варьировании параметра  $\psi$  (цифры у линий). На рис. 5, 6 фиксировано  $\psi = 10$ , здесь цифры у линий показывают значения  $\varphi$ . Вертикальные



Р и с. 5



Р и с. 6

пунктирные линии на рис. 3, 5 — характерные частоты  $\Omega_2 = \bar{a}_2^{-2}$  и  $\bar{\Omega}_1 = \bar{a}_1^{-2}$  ( $\bar{a}_1 \leq \bar{a}_2$ ), а горизонтальные на рис. 4, 6 — уровни «полочек», отвечающие равновесной скорости звука со стороны фазы мелких частиц  $\bar{C}_{e1} = \{(1 + m_1 \bar{c}) / [(1 + m_1)(1 + m_1 \bar{c}_1)]\}^{-1/2}$ ,  $m_1 = m\varphi / (1 + \varphi)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Marble F. E. Dynamics of dusty gases // Annual Rev. Fluid Mech.— Palo Alto, 1970.— V. 2. Рус. пер. Механика.— 1971.— № 6.
2. Ивандаев А. И. Распространение малых возмущений в двухфазных смесях пара с каплями // Акуст. журн.— 1978.— Т. 24, № 1.
3. Гумеров Н. А., Ивандаев А. И. Особенности распространения высокочастотных акустических возмущений в паро- и газозвезях // ПМТФ.— 1985.— № 6.
4. Борисов А. А., Вахгельт А. Ф., Накоряков В. Е. Распространение длинноволновых возмущений конечной амплитуды в газозвезях // ПМТФ.— 1980.— № 5.
5. Тараканов С. В., Тодес О. М. Приближение Бюргера для плоских длинноволновых возмущений в аэрозвезях // ПМТФ.— 1982.— № 1.
6. Temkin S., Dobbins R. A. Measurement of attenuation and dispersion of sound by an aerosol // J. Acoust. Soc. Amer.— 1966.— V. 40, N 5.
7. Гумеров Н. А. Распространение слабых монохроматических волн в полидисперсных газозвезях // IV Всесоюз. школа молодых ученых и специалистов «Современные проблемы теплофизики»: Тез. докл.— Новосибирск, 1986.
8. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред.— М.: Наука, 1978.
9. Ивандаев А. И. Законы взаимодействия фаз в акустике газозвезей // Акуст. журн.— 1985.— Т. 31, № 4.
10. Радовский И. С. О расчете скорости и декремента затухания звука в полидисперсных парожидкостных средах // ТВТ.— 1979.— Т. 17, № 2.

Поступила 6/V 1987 г.

УДК 532.526

### УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКИХ ПЛЕНОК ЖИДКОСТИ

Н. А. Дунаевский, В. П. Решетин, Р. И. Солоухин

(Минск)

Во многих практически важных случаях толщина пленок жидкости, покрывающих поверхность твердого тела, составляет по порядку величины 10—100 нм. На поверхности молекулярных кристаллов пленки такой толщины образуют органические жидкости, аналогично при полном или частичном смачивании тонкими пленками растекаются красители, смазки и т. и. [1]. При лазерном плавлении или демееталлизации в результате быстрого нагрева возникают пленки расплава, толщина которых также 10—100 нм. Вопрос об устойчивости пленки расплава является существенным как для анализа взаимодействия излучения с веществом (поглощение, рассеяние и т. п.), так и для обеспечения высокого качества пленок при лазерной обработке.

Несмотря на пригодность макроскопического описания в целом, гидродинамика течения тонких пленок и условия их гидростатического равновесия в значительной мере определяются дальнедействующими силами Ван-дер-Ваальса (ВдВ), а также электростатическими силами двойного слоя, локализованными вблизи границы раздела фаз. С использованием моделей таких взаимодействий [1—3] в данной работе определяются условия динамической устойчивости пленок и даются оценки инкремента развития малых возмущений поверхности\*.

Плотность энергии сил ВдВ  $E(\delta)$  определяется следующим образом [1, 2, 5]:

$$E(\delta) = \begin{cases} \frac{\hbar \omega_0}{16\pi^2 \delta^2}, & \delta < \bar{\lambda}, \\ \frac{\alpha_0 \hbar \omega_0 \bar{\lambda}}{16\pi^2 \delta^3}, & \delta > \bar{\lambda}. \end{cases}$$

Здесь  $\delta$  — толщина пленки жидкости;  $\hbar$  — постоянная Планка;  $\omega_0$  —

\* Термодинамическая устойчивость тонких пленок подробно исследована (см., например, [4]).