

УДК 519.676

**Стохастический алгоритм решения системы  
уравнений Ламе для двух- и трехмерных областей  
на основе комбинирования представления  
Слободянского, метода фундаментальных решений  
и случайного проекционного метода\***

К.К. Сабельфельд, Д.Д. Смирнов

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук,  
просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

E-mails: karl@osmf.sccs.ru (Сабельфельд К.К.), smirnovdd@mail.ru (Смирнов Д.Д.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 2, Vol. 17, 2024.

**Сабельфельд К.К., Смирнов Д.Д.** Стохастический алгоритм решения системы уравнений Ламе для двух- и трехмерных областей на основе комбинирования представления Слободянского, метода фундаментальных решений и случайного проекционного метода // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2024.— Т. 27, № 2.— С. 245–264.

В работе предложен новый стохастический алгоритм решения системы уравнений Ламе на основе использования представления Слободянского, при этом восстановление граничных условий для входящих в него гармонических функций осуществляется неявно с помощью метода фундаментальных решений, а неизвестные коэффициенты в этом методе вычисляются с помощью стохастического проекционного метода. Приводятся результаты численных экспериментов для нескольких примеров двух- и трехмерных краевых задач, которые демонстрируют высокую эффективность предложенного метода.

**DOI:** 10.15372/SJNM20240209

**EDN:** ERVMSX

**Ключевые слова:** *уравнение Ламе, представление Слободянского, стохастический проекционный алгоритм, метод фундаментальных решений.*

**Sabelfeld K.K., Smirnov D.D.** Stochastic simulation algorithm for solving the system of Lame equations for two- and three-dimensional domains by combining the Slobodianskii representation, the method of fundamental solutions and a random projection method // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci.— Novosibirsk, 2024.— Vol. 27, № 2.— P. 245–264.

In this paper, a new stochastic algorithm for solving the system of Lame equations based on the Slobodianskii representation is proposed, in which the recovery of boundary conditions for the harmonic functions involved is carried out implicitly using the method of fundamental solutions, while the unknown coefficients in this method are calculated using a stochastic projection method. Results of numerical experiments for several examples of two- and three-dimensional boundary value problems are presented, which demonstrate the high efficiency of the proposed method.

**Keywords:** *Lame equation, Slobodianskii representation, stochastic projection method, the method of fundamental solutions.*

---

\*Исследование выполнено в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН (проект № FWNM-2022-0002.)

## 1. Введение

Стохастические методы моделирования для решения системы уравнений Ламе, классической системы уравнений второго порядка, описывающей напряженное состояние изотропного упругого тела, сталкиваются с определенными трудностями, собственно, как и традиционные детерминированные приближенные методы решения этих уравнений, в частности в силу плохой обусловленности матриц, связанных с сеточными аппроксимациями для задач со сложными границами. В стохастических алгоритмах случайного блуждания это отражается в поведении дисперсии соответствующих случайных оценок [10, 14–17]. В связи с этим в недавней работе [1] нами был предложен итерационный метод решения уравнения Ламе, где на каждом шаге итерации решаются независимые уравнения анизотропной диффузии с помощью стохастических методов типа блуждания по сферам и сеткам [7, 11, 16]. Однако и этот подход имеет свои сложности, поскольку на каждом шаге приходится вычислять вторые производные от решения диффузионных задач, что приводит к заметной потере точности.

В данной работе используется иной подход, который оказался свободным от численных выше трудностей. Основная идея этого подхода может быть сформулирована следующим образом: (1) решение уравнения Ламе ищется в виде представления Слободянского [8, 18], куда входят только неизвестные гармонические функции, (2) гармонические функции в методе фундаментальных решений приближаются в виде конечной суммы фундаментальных решений уравнения Лапласа с неизвестными коэффициентами, (3) после подстановки этих конечных сумм в представление Слободянского и согласования с заданными граничными функциями мы приходим к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) на неизвестные коэффициенты, (4) полученная СЛАУ решается с помощью стохастического проекционного метода. Замечательным свойством такого метода является то, что вычислив один раз эти неизвестные коэффициенты, мы имеем представление решения в любой внутренней точке области.

Отметим, что данный подход позволяет решать уравнения Ламе со всеми известными граничными условиями. Для простоты изложения мы рассматриваем здесь первую краевую задачу теории упругости (задачу Дирихле), а распространение метода на другие граничные условия не представляет труда.

## 2. Постановка краевой задачи и представление Слободянского

Рассмотрим первую краевую задачу для системы уравнений Ламе в ограниченной области  $\Omega$  в пространстве  $\mathbb{R}^d$

$$\mu\Delta\mathbf{u}(\mathbf{r}) + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega, \quad (1)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{G}, \quad \mathbf{r} \in \partial\Omega, \quad (2)$$

где принята запись  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)$ ,  $\mathbf{G} = (G_1, \dots, G_d)$ . Область  $\Omega$  ограничена границей  $\partial\Omega$ ,  $\lambda, \mu > 0$ , и предполагаются выполнеными условия существования и единственности решения данной краевой задачи [5, 6].

Общее решение уравнения Ламе может быть записано в виде представления Слободянского [18]

$$\mathbf{u} = \gamma\mathbf{w} + (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{w} - \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{w}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_d)$  — вектор, компоненты которого — гармонические функции,  $\gamma$  — константа, которая явно выражается через  $d$  и константы  $\lambda$  и  $\mu$ . В данной работе мы выбираем константы  $\lambda = \mu$ , тогда в двумерном случае  $\gamma = 2$ , в трехмерном случае  $\gamma = 3$ . В этом можно убедиться при прямом выводе представления (3) из системы уравнений Ламе. Например, в трехмерном случае получим  $\gamma = 2(2\mu + \lambda)/(\lambda + \mu)$ , если подставим в систему уравнений Ламе следующие представления:

$$\begin{aligned} I_1 &= (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{w}, \quad \operatorname{div} I_1 = (\mathbf{r} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{w} + \operatorname{div} \mathbf{w}, \quad \Delta I_1 = (\mathbf{r} \cdot \nabla) \Delta \mathbf{w} + 2\Delta \mathbf{w}, \\ I_2 &= \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{w}, \quad \operatorname{div} I_2 = (\mathbf{r} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{w} + 3\operatorname{div} \mathbf{w}, \quad \Delta I_2 = \mathbf{r} \Delta \operatorname{div} \mathbf{w} + 2\nabla \operatorname{div} \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (4)$$

Перейдем далее к явной покомпонентной записи представления Слободянского в двумерном случае.

### 3. Двумерный случай

Для двумерного случая представление Слободянского имеет вид

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{w} + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{w} - \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{w}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ ,  $w_1$  и  $w_2$  — две гармонические функции. Положим  $\mathbf{r} = (x, y)$ . После некоторых простых преобразований получаем

$$(\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{w} = \left( x \frac{\partial w_1}{\partial x} + y \frac{\partial w_1}{\partial y}, x \frac{\partial w_2}{\partial x} + y \frac{\partial w_2}{\partial y} \right)$$

и

$$\mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{w} = (x, y) \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) = \left( x \frac{\partial w_1}{\partial x} + x \frac{\partial w_2}{\partial y}, y \frac{\partial w_1}{\partial x} + y \frac{\partial w_2}{\partial y} \right),$$

так что

$$u_1 = 2w_1 + x \frac{\partial w_1}{\partial x} + y \frac{\partial w_1}{\partial y} - x \frac{\partial w_1}{\partial x} - x \frac{\partial w_2}{\partial y}$$

и

$$u_2 = 2w_2 + x \frac{\partial w_2}{\partial x} + y \frac{\partial w_2}{\partial y} - y \frac{\partial w_1}{\partial x} - y \frac{\partial w_2}{\partial y}.$$

После упрощения имеем окончательно

$$u_1 = 2w_1 + y \frac{\partial w_1}{\partial y} - x \frac{\partial w_2}{\partial y}, \quad (6)$$

$$u_2 = 2w_2 - y \frac{\partial w_1}{\partial x} + x \frac{\partial w_2}{\partial x}. \quad (7)$$

Теперь можно переформулировать исходную первую краевую задачу для уравнения Ламе (1), (2) с учетом выведенного представления Слободянского следующим образом. Необходимо найти две гармонические функции  $w_1$  и  $w_2$  с неизвестными граничными условиями, если заданы граничные функции  $G_1$  и  $G_2$  исходной краевой задачи, которые связаны между собой соотношением Слободянского. Сказанное можно записать в виде системы соотношений

$$u_1 = 2w_1 + y \frac{\partial w_1}{\partial y} - x \frac{\partial w_2}{\partial y}, \quad (8)$$

$$u_2 = 2w_2 - y \frac{\partial w_1}{\partial x} + x \frac{\partial w_2}{\partial x}, \quad (9)$$

$$u_1 = G_1, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (10)$$

$$u_2 = G_2, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (11)$$

$$\Delta w_1 = 0, \quad (12)$$

$$\Delta w_2 = 0. \quad (13)$$

Понятно, что из соотношений (8)–(13) и заданных функций на границе (10), (11) в принципе можно извлечь граничные значения для гармонических функций  $w_1$  и  $w_2$ . Однако эта задача оказалась не простой, а попытка вычислять эти функции итерационным методом натыкается на неустойчивый процесс передачи вычисленных производных от итерации к итерации. Нам удалось построить безытерационный процесс вычисления решения  $u_1, u_2$ , не прибегая к промежуточному отысканию граничных значений для гармонических функций, используя метод фундаментальных решений. Этот процесс описан в виде четырех шагов во введении. Прежде чем перейти к описанию этого метода в деталях, выпишем еще систему вида (8)–(13) для трехмерного случая.

#### 4. Трехмерный случай

Для трехмерного варианта в случае  $\lambda = \mu$  представление Слободянского для решения уравнения Ламе имеет вид

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{w} + (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{w} - \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{w}, \quad (14)$$

где  $\mathbf{w}$  — вектор из трех гармонических функций  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ ,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . В первой краевой задаче заданы граничные функции  $u_i(\mathbf{r}) = G_i(\mathbf{r})$  ( $i = 1, 2, 3$ ) для  $\mathbf{r} \in \partial\Omega$ .

Как и в двумерном случае, перейдем к покомпонентной записи представления Слободянского. Имеем

$$(\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{w} = \left( x \frac{\partial w_1}{\partial x} + y \frac{\partial w_1}{\partial y} + z \frac{\partial w_1}{\partial z}, x \frac{\partial w_2}{\partial x} + y \frac{\partial w_2}{\partial y} + z \frac{\partial w_2}{\partial z}, x \frac{\partial w_3}{\partial x} + y \frac{\partial w_3}{\partial y} + z \frac{\partial w_3}{\partial z} \right), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{w} &= (x, y, z) \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial z} \right) \\ &= \left( x \frac{\partial w_1}{\partial x} + x \frac{\partial w_2}{\partial y} + x \frac{\partial w_3}{\partial z}, y \frac{\partial w_1}{\partial x} + y \frac{\partial w_2}{\partial y} + y \frac{\partial w_3}{\partial z}, z \frac{\partial w_1}{\partial x} + z \frac{\partial w_2}{\partial y} + z \frac{\partial w_3}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Используя эти соотношения, переписываем векторное представление Слободянского (14) в покомпонентной форме

$$u_1 = 3w_1 + x \frac{\partial w_1}{\partial x} + y \frac{\partial w_1}{\partial y} + z \frac{\partial w_1}{\partial z} - x \frac{\partial w_1}{\partial x} - x \frac{\partial w_2}{\partial y} - x \frac{\partial w_3}{\partial z}, \quad (17)$$

$$u_2 = 3w_2 + x \frac{\partial w_2}{\partial x} + y \frac{\partial w_2}{\partial y} + z \frac{\partial w_2}{\partial z} - y \frac{\partial w_1}{\partial x} - y \frac{\partial w_2}{\partial y} - y \frac{\partial w_3}{\partial z}, \quad (18)$$

$$u_3 = 3w_3 + x \frac{\partial w_3}{\partial x} + y \frac{\partial w_3}{\partial y} + z \frac{\partial w_3}{\partial z} - z \frac{\partial w_1}{\partial x} - z \frac{\partial w_2}{\partial y} - z \frac{\partial w_3}{\partial z}. \quad (19)$$

После упрощения приходим к окончательному виду представления Слободянского в нужной нам форме

$$u_1 = 3w_1 + y \frac{\partial w_1}{\partial y} + z \frac{\partial w_1}{\partial z} - x \frac{\partial w_2}{\partial y} - x \frac{\partial w_3}{\partial z}, \quad (20)$$

$$u_2 = 3w_2 + x \frac{\partial w_2}{\partial x} + z \frac{\partial w_2}{\partial z} - y \frac{\partial w_1}{\partial x} - y \frac{\partial w_3}{\partial z}, \quad (21)$$

$$u_3 = 3w_3 + x \frac{\partial w_3}{\partial x} + y \frac{\partial w_3}{\partial y} - z \frac{\partial w_1}{\partial x} - z \frac{\partial w_2}{\partial y}. \quad (22)$$

Теперь мы можем выписать аналог первой краевой задачи в форме, выписанной для двумерного случая в виде системы (8)–(13):

$$u_1 = 3w_1 + y \frac{\partial w_1}{\partial y} + z \frac{\partial w_1}{\partial z} - x \frac{\partial w_2}{\partial y} - x \frac{\partial w_3}{\partial z}, \quad (23)$$

$$u_2 = 3w_2 + x \frac{\partial w_2}{\partial x} + z \frac{\partial w_2}{\partial z} - y \frac{\partial w_1}{\partial x} - y \frac{\partial w_3}{\partial z}, \quad (24)$$

$$u_3 = 3w_3 + x \frac{\partial w_3}{\partial x} + y \frac{\partial w_3}{\partial y} - z \frac{\partial w_1}{\partial x} - z \frac{\partial w_2}{\partial y}, \quad (25)$$

$$u_1 = G_1, \quad (x, y, z) \in \partial\Omega, \quad (26)$$

$$u_2 = G_2, \quad (x, y, z) \in \partial\Omega, \quad (27)$$

$$u_3 = G_3, \quad (x, y, z) \in \partial\Omega, \quad (28)$$

$$\Delta w_1 = 0, \quad (29)$$

$$\Delta w_2 = 0, \quad (30)$$

$$\Delta w_3 = 0. \quad (31)$$

Отметим еще раз, что три последних уравнения в этой системе показывают, что  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$  — это гармонические в области  $\Omega$  функции, которые должны удовлетворять первым шести уравнениям данной системы.

Далее можно переходить к построению алгоритма решения этой системы (системы (8)–(13) в двумерном случае) с помощью метода фундаментальных решений с выбором либо случайно распределенных точечных источников, описанном нами в работе [13], либо с регулярным выбором источников, отстоящих на определенном расстоянии от точек коллокации. В данной работе мы используем последний вариант выбора позиций источников. Метод фундаментальных решений предложен и обоснован в работах [2, 4].

## 5. Метод фундаментальных решений. Двумерный случай

Итак, идея предлагаемого метода состоит в следующем. Гармонические функции  $w_1$  и  $w_2$  ищутся в виде конечных сумм фундаментальных решений уравнения Лапласа, взвешенных с неизвестными константами  $c_1, \dots, c_N$ , при этом точечные источники в фундаментальном решении располагаются во множестве точек  $(x'_n, y'_n)$  ( $n = 1, \dots, N$ ), которые находятся вне области. Эти представления далее подставляются в первые два уравнения системы (8)–(13). Далее эта система записывается для множества точек  $(x_m, y_m)$  ( $m = 1, \dots, M$ ), расположенных внутри области вблизи границы. Эти точки называются коллокационными точками. Более того, в случае первой краевой задачи они могут располагаться и на самой границе области. Поскольку в этой системе в левой части представления Слободянского граничные функции заданы, мы приходим к прямоугольной системе  $M$  линейных алгебраических уравнений с  $N$  неизвестными  $c_1, \dots, c_N$ . Матрица этой системы уравнений может быть и квадратной, если число коллокационных точек выбирается равным числу источников. Перейдем далее к конкретной записи системы уравнений.

В двумерном пространстве фундаментальное решение уравнения Лапласа имеет вид  $E(x, y; x', y') = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$ , оно является решением уравнения  $\Delta E(x, y; x', y') = -\delta(x-x')\delta(y-y')$ . Здесь точечный источник расположен в точке  $(x', y')$ , а решение записано в точке  $(x, y)$ . Очевидно, если источник находится вне области, то  $E(x, y; x', y')$ , как функция от  $(x, y)$ , является гармонической в данной области.

Выберем на границе  $\partial\Omega$  коллокационные точки  $(x_m, y_m)$  ( $m = 1, \dots, M$ ) и выберем вне области  $\Omega$  точки  $(x'_n, y'_n)$  ( $n = 1, \dots, N$ ), где расположены источники. Ищем гармонические функции  $w_1$  и  $w_2$  в следующем виде:

$$w_1(x_m, y_m) = \sum_{n=1}^N c_n E(x_m, y_m; x'_n, y'_n), \quad w_2(x_m, y_m) = \sum_{n=1}^N d_n E(x_m, y_m; x'_n, y'_n), \quad (32)$$

где  $E(x_m, y_m; x'_n, y'_n) = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2}$ ,  $m = 1, \dots, M$ .

Частные производные функции  $V(x, y) = \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$  ( $x_0, y_0$  — константы):

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Подставляя выражение (32) в представление Слободянского (8)–(13), получаем:  
– для первого уравнения (8)

$$\begin{aligned} 2w_1 + y \frac{\partial w_1}{\partial y} - x \frac{\partial w_2}{\partial y} &= 2 \sum_{n=1}^N -c_n \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2} + \\ &\quad y_m \sum_{n=1}^N -c_n \frac{1}{2\pi} \frac{y_m - y'_n}{(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2} - \\ &\quad x_m \sum_{n=1}^N -d_n \frac{1}{2\pi} \frac{y_m - y'_n}{(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2} \\ &= u_1(x_m, y_m) = G_1(x_m, y_m), \quad m = 1, \dots, M, \end{aligned} \quad (33)$$

после упрощения получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \left( -\frac{1}{\pi} \ln \sqrt{(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2} - \frac{1}{2\pi} \frac{y_m (y_m - y'_n)}{(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2} \right) c_n + \\ \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{2\pi} \frac{x_m (y_m - y'_n)}{(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2} \right) d_n = G_1(x_m, y_m), \quad m = 1, \dots, M, \end{aligned} \quad (34)$$

или в матричном виде

$$I\mathbf{c} + J\mathbf{d} = \mathbf{f},$$

где

$$I = \begin{pmatrix} i_{11} & \cdots & i_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ i_{M1} & \cdots & i_{MN} \end{pmatrix},$$

$$i_{mn} = -\frac{1}{\pi} \ln \sqrt{(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2} - \frac{1}{2\pi} \frac{y_m (y_m - y'_n)}{(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2},$$

$$m = 1, \dots, M, \quad n = 1, \dots, N,$$

$$\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_N)^\top,$$

$$J = \begin{pmatrix} j_{11} & \cdots & j_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ j_{M1} & \cdots & j_{MN} \end{pmatrix},$$

$$j_{mn} = \frac{1}{2\pi} \frac{x_m (y_m - y'_n)}{(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2}, \quad m = 1, \dots, M, \quad n = 1, \dots, N,$$

$$\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_N)^\top, \quad \mathbf{f} = (G_1(x_1, y_1), \dots, G_1(x_M, y_M))^\top;$$

– для второго уравнения (9)

$$2w_2 - y \frac{\partial w_1}{\partial x} + x \frac{\partial w_2}{\partial x} = 2 \sum_{n=1}^N -d_n \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2} -$$

$$y_m \sum_{n=1}^N -c_n \frac{1}{2\pi} \frac{x_m - x'_n}{(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2} +$$

$$x_m \sum_{n=1}^N -d_n \frac{1}{2\pi} \frac{x_m - x'_n}{(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2}$$

$$= u_2(x_m, y_m) = G_2(x_m, y_m), \quad m = 1, \dots, M,$$

после упрощения получаем

$$\sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{2\pi} \frac{y_m (x_m - x'_n)}{(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2} \right) c_n + \sum_{n=1}^N \left( -\frac{1}{\pi} \ln \sqrt{(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2} - \right.$$

$$\left. \frac{1}{2\pi} \frac{x_m (x_m - x'_n)}{(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2} \right) d_n = G_2(x_m, y_m), \quad m = 1, \dots, M,$$

или в матричном виде:

$$K\mathbf{c} + L\mathbf{d} = \mathbf{g},$$

где

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{M1} & \cdots & k_{MN} \end{pmatrix},$$

$$k_{mn} = \frac{1}{2\pi} \frac{y_m (x_m - x'_n)}{(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2}, \quad m = 1, \dots, M, \quad n = 1, \dots, N,$$

$$\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_N)^\top,$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{M1} & \cdots & l_{MN} \end{pmatrix},$$

$$l_{mn} = -\frac{1}{\pi} \ln \sqrt{(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2} - \frac{1}{2\pi} \frac{x_m (x_m - x'_n)}{(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2},$$

$$m = 1, \dots, M, n = 1, \dots, N,$$

$$\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_N)^\top, \quad \mathbf{h} = (G_1(x_1, y_1), \dots, G_1(x_M, y_M))^\top.$$

Отсюда общая система в матричном виде выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} I\mathbf{c} + J\mathbf{d} &= \mathbf{f}, \\ K\mathbf{c} + L\mathbf{d} &= \mathbf{g}. \end{aligned} \tag{35}$$

Матрицы  $I, J, K, L$  имеют размер  $M \times N$ , векторы неизвестных  $\mathbf{c}, \mathbf{d}$  — размер  $N$ , векторы правой части  $\mathbf{f}, \mathbf{g}$  — размер  $M$ . Если записать (35) в блочном виде, то получим СЛАУ

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{36}$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} I & J \\ K & L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}.$$

## 6. Метод фундаментальных решений. Трехмерный случай

В трехмерном пространстве фундаментальное решение уравнения Лапласа имеет вид

$$E(x, y, z; x', y', z') = -\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}.$$

Оно определяется как решение уравнения  $\Delta E(x, y, z; x', y', z') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ , где  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ .

Далее все выкладки по построению приближения метода фундаментальных решений повторяют соответствующие выкладки, приведенные для двумерного случая, они лишь гораздо более громоздки.

Итак, выберем на границе  $\partial\Omega$  коллокационные точки  $(x_m, y_m, z_m)$  ( $m = 1, \dots, M$ ) и выберем во внешности области  $\Omega$  точки, куда поместим точечные источники  $(x'_n, y'_n, z'_n)$  ( $n = 1, \dots, N$ ). Ищем гармонические функции  $w_1, w_2$  и  $w_3$  в следующем виде:

$$w_1(x_m, y_m, z_m) = \sum_{n=1}^N c_n E(x_m, y_m, z_m; x'_n, y'_n, z'_n), \tag{37}$$

$$w_2(x_m, y_m, z_m) = \sum_{n=1}^N d_n E(x_m, y_m, z_m; x'_n, y'_n, z'_n), \tag{38}$$

$$w_3(x_m, y_m, z_m) = \sum_{n=1}^N e_n E(x_m, y_m, z_m; x'_n, y'_n, z'_n), \tag{39}$$

$$\text{где } E(x_m, y_m, z_m; x'_n, y'_n, z'_n) = -\frac{1}{4\pi\sqrt{(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2 + (z_m - z'_n)^2}}, \quad m = 1, \dots, M, n = 1, \dots, N.$$

Как и в двумерном случае, нам понадобятся выражения для частных производных от фундаментального решения  $V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$  при фиксированной точке источника  $(x_0, y_0, z_0)$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{x-x_0}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)^{3/2}}, \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{y-y_0}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)^{3/2}}, \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= -\frac{z-z_0}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Подставим эти выражения в представление Слободянского. В результате для первого уравнения в этой системе имеем

$$\begin{aligned}3w_1 + y \frac{\partial w_1}{\partial y} - x \frac{\partial w_2}{\partial y} + z \frac{\partial w_1}{\partial z} - x \frac{\partial w_3}{\partial z} &= 3 \sum_{n=1}^N -c_n \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2 + (z_m - z'_n)^2}} + \\ y_m \sum_{n=1}^N c_n \frac{1}{4\pi} \frac{y_m - y'_n}{\Delta_{mn}} - x_m \sum_{n=1}^N d_n \frac{1}{4\pi} \frac{y_m - y'_n}{\Delta_{mn}} + \\ z_m \sum_{n=1}^N c_n \frac{1}{4\pi} \frac{z_m - z'_n}{\Delta_{mn}} - x_m \sum_{n=1}^N e_n \frac{1}{4\pi} \frac{z_m - z'_n}{\Delta_{mn}} \\ &= u_1(x_m, y_m, z_m) = G_1(x_m, y_m, z_m), \quad m=1, \dots, M, \quad (40)\end{aligned}$$

где введено обозначение  $\Delta_{mn} = [(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2 + (z_m - z'_n)^2]^{3/2}$ . После упрощения эта система запишется в виде

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^N \left( -\frac{3}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2 + (z_m - z'_n)^2}} + \frac{1}{4\pi} \frac{y_m(y_m - y'_n)}{\Delta_{mn}} + \right. \\ \left. \frac{1}{4\pi} \frac{z_m(z_m - z'_n)}{\Delta_{mn}} \right) c_n + \sum_{n=1}^N -\frac{1}{4\pi} \frac{x_m(y_m - y'_n)}{\Delta_{mn}} d_n + \sum_{n=1}^N -\frac{1}{4\pi} \frac{x_m(z_m - z'_n)}{\Delta_{mn}} e_n \\ = G_1(x_m, y_m, z_m), \quad m = 1, \dots, M, \quad (41)\end{aligned}$$

или в матричном виде

$$I\mathbf{c} + J\mathbf{d} + K\mathbf{e} = \mathbf{f},$$

где

$$I = \begin{pmatrix} i_{11} & \cdots & i_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ i_{M1} & \cdots & i_{MN} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}i_{mn} &= -\frac{3}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2 + (z_m - z'_n)^2}} + \frac{1}{4\pi} \frac{y_m(y_m - y'_n)}{\Delta_{mn}} + \frac{1}{4\pi} \frac{z_m(z_m - z'_n)}{\Delta_{mn}}, \\ m &= 1, \dots, M, \quad n = 1, \dots, N,\end{aligned}$$

$$\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_N)^\top,$$

$$J = \begin{pmatrix} j_{11} & \cdots & j_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ j_{M1} & \cdots & j_{MN} \end{pmatrix},$$

$$j_{mn} = -\frac{1}{4\pi} \frac{x_m(y_m - y'_n)}{\Delta_{mn}}, \quad m = 1, \dots, M, \quad n = 1, \dots, N,$$

$$\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_N)^\top,$$

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{M1} & \cdots & k_{MN} \end{pmatrix},$$

$$k_{mn} = -\frac{1}{4\pi} \frac{x_m(z_m - z'_n)}{\Delta_{mn}}, \quad m = 1, \dots, M, \quad n = 1, \dots, N,$$

$$\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_N)^\top, \quad \mathbf{f} = (G_1(x_1, y_1, z_1), \dots, G_1(x_M, y_M, z_M))^\top.$$

Для второго и третьего уравнений выкладки аналогичны. Приведем здесь сразу их запись в матричном виде. Для второго уравнения

$$L\mathbf{c} + P\mathbf{d} + Q\mathbf{e} = \mathbf{g},$$

где

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{M1} & \cdots & l_{MN} \end{pmatrix},$$

$$l_{mn} = -\frac{1}{4\pi} \frac{y_m(x_m - x'_n)}{\Delta_{mn}}, \quad m = 1, \dots, M, \quad n = 1, \dots, N,$$

$$\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_N)^\top,$$

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M1} & \cdots & p_{MN} \end{pmatrix},$$

$$p_{mn} = -\frac{3}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2 + (z_m - z'_n)^2}} + \frac{1}{4\pi} \frac{x_m(x_m - x'_n)}{\Delta_{mn}} + \frac{1}{4\pi} \frac{z_m(z_m - z'_n)}{\Delta_{mn}},$$

$$m = 1, \dots, M, \quad n = 1, \dots, N,$$

$$\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_N)^\top,$$

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{M1} & \cdots & q_{MN} \end{pmatrix},$$

$$q_{mn} = -\frac{1}{4\pi} \frac{y_m(z_m - z'_n)}{\Delta_{mn}}, \quad m = 1, \dots, M, \quad n = 1, \dots, N,$$

$$\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_N)^\top, \quad \mathbf{g} = (G_2(x_1, y_1, z_1), \dots, G_2(x_M, y_M, z_M))^\top.$$

Наконец, для третьего уравнения системы имеем

$$R\mathbf{c} + S\mathbf{d} + T\mathbf{e} = \mathbf{h},$$

где

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{M1} & \cdots & r_{MN} \end{pmatrix},$$

$$r_{mn} = -\frac{1}{4\pi} \frac{z_m(x_m - x'_n)}{\Delta_{mn}}, \quad m = 1, \dots, M, \quad n = 1, \dots, N,$$

$$\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_N)^\top,$$

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{M1} & \cdots & s_{MN} \end{pmatrix},$$

$$s_{mn} = -\frac{1}{4\pi} \frac{z_m(y_m - y'_n)}{\Delta_{mn}}, \quad m = 1, \dots, M, \quad n = 1, \dots, N,$$

$$\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_N)^\top,$$

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{M1} & \cdots & t_{MN} \end{pmatrix},$$

$$t_{mn} = -\frac{3}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x_m - x'_n)^2 + (y_m - y'_n)^2 + (z_m - z'_n)^2}} + \frac{1}{4\pi} \frac{x_m(x_m - x'_n)}{\Delta_{mn}} + \frac{1}{4\pi} \frac{y_m(y_m - y'_n)}{\Delta_{mn}},$$

$$m = 1, \dots, M, \quad n = 1, \dots, N,$$

$$\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_N)^\top, \quad \mathbf{h} = (G_3(x_1, y_1, z_1), \dots, G_3(x_M, y_M, z_M))^\top.$$

В результате общая система уравнений в матричном виде выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} I\mathbf{c} + J\mathbf{d} + K\mathbf{e} &= \mathbf{f}, \\ L\mathbf{c} + P\mathbf{d} + Q\mathbf{e} &= \mathbf{g}, \\ R\mathbf{c} + S\mathbf{d} + T\mathbf{e} &= \mathbf{h}. \end{aligned} \tag{42}$$

Матрицы  $I, J, K, L, P, Q, R, S, T$  имеют размер  $M \times N$ , векторы неизвестных констант  $\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}$  — размер  $N$ , векторы правой части  $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$  — размер  $M$ . Если записать (42) в блочном виде, то получим СЛАУ

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{43}$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} I & J & K \\ L & P & Q \\ R & S & T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{h} \end{pmatrix}.$$

В заключение отметим, что точки коллокации на границе выбираются достаточно произвольно, например в областях, где граничные функции имеют большой градиент, точки выбираются более плотно, а в областях, где граничные функции изменяются плавно, точки коллокации могут выбираться с более низкой плотностью. Что касается выбора точек за пределами области, где располагаются точечные источники, то они могут выбираться достаточно регулярно, но могут и выбираться случайно по определенному вероятностному распределению. Именно выбор случайно распределенных позиций источников оказался наиболее эффективным [13].

## 7. Стохастический итерационный проекционный метод

Понятно, что для достаточно сложных областей число коллокационных точек может быть очень большим, как и число точечных источников. Поэтому матрица  $A$  нашей системы уравнений  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  может иметь очень большую размерность. Для таких больших матриц был разработан специальный рандомизированный алгоритм решения, основанный на случайном выборе столбцов [9]. Для решения больших СЛАУ в рассматриваемом в данной статье случае наиболее эффективным оказался стохастический проекционный метод, где на каждом шаге текущая точка итерационного процесса проецируется на случайно выбранную гиперплоскость, задаваемую соответствующим уравнением линейной системы. Этот алгоритм был впервые предложен в работе [19] и в настоящее время широко применяется для решения СЛАУ большой размерности. В работе [12] мы предложили процесс ускорения этого метода. Отметим, что выбор этого метода для решения системы уравнений в методе фундаментальных решений представляется особенно разумным, поскольку на каждой итерации алгоритм оперирует только с одной строкой матрицы. А поскольку все элементы матрицы  $A$  легко вычисляются, нет необходимости записывать в память всю матрицу, что существенно, поскольку размерности здесь так велики, что для записи всей матрицы не хватает оперативной памяти. Один такой пример трехмерной задачи, где размер матрицы не позволял записать его в оперативную память, приводится ниже в тесте 3.

Пусть матрица  $A$  имеет размеры  $N_r \times N_c$ . Обозначим через  $a_i$  строку матрицы  $A$  под номером  $i$ , тогда  $a_i^\top$  — столбец, полученный при транспонировании строки  $a_i$ .

Стохастический итерационный проекционный метод имеет следующий вид. Пусть выбрано начальное приближение  $\mathbf{x}_0$ , например  $\mathbf{x} = 0$ , тогда последующие итерации вычисляются по формуле [12]

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{\mathbf{b}_{\nu(i)} - (a_{\nu(i)} \cdot \mathbf{x}_k)}{\|a_{\nu(i)}\|^2} a_{\nu(i)}^\top, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (44)$$

где  $\nu(i)$  — номер строки матрицы  $A$ , который выбирается случайно, а в знаменателе стоит квадрат евклидовой нормы строки, т. е.  $\|a_j\|^2 = \sum_{k=1}^{N_r} a_{jk}^2$ .

Случайная строка  $\nu(i)$  выбирается по распределению

$$p_j = \frac{\|a_j\|^2}{\sum_{i=1}^{N_r} \|a_i\|^2}, \quad j = 1, \dots, N_r,$$

реализация которого может производиться либо по стандартному методу моделирования [3], либо с помощью метода Волкера [20] в случае больших размерностей матриц. Отметим, что на практике можно преобразовать исходную матрицу к матрице, для которой все  $p_j$  будут равны между собой, и тогда случайный выбор особенно прост: номер строки выбирается равновероятно из множества индексов строк. Действительно, достаточно исходную систему уравнений домножить слева на диагональную матрицу, где в  $j$ -й строке стоит число  $1/\|a_j\|$ ,  $j = 1, \dots, N_r$ . Следует отметить, что эту процедуру надо проводить с осторожностью, поскольку свойства преобразованной матрицы могут измениться не в лучшую сторону для проекционного метода.

## 8. Результаты численных экспериментов

**Тест 1.** В качестве тестового примера сравним решение задачи Дирихле для первой краевой задачи для системы уравнений Ламе (1), (2) стохастическим итерационным методом с точным решением в области  $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y\}$ . Выберем точное решение в виде

$$u_1 = 5xy, \quad u_2 = 4x^2 - 3y^2, \quad (45)$$

которое удовлетворяет уравнению Ламе (1) и граничным условиям:

$$u_1(0, y) = 0, \quad u_1(x, 0) = 0, \quad u_1(L_x, y) = 5L_xy, \quad u_1(x, L_y) = 5xL_y, \quad (46)$$

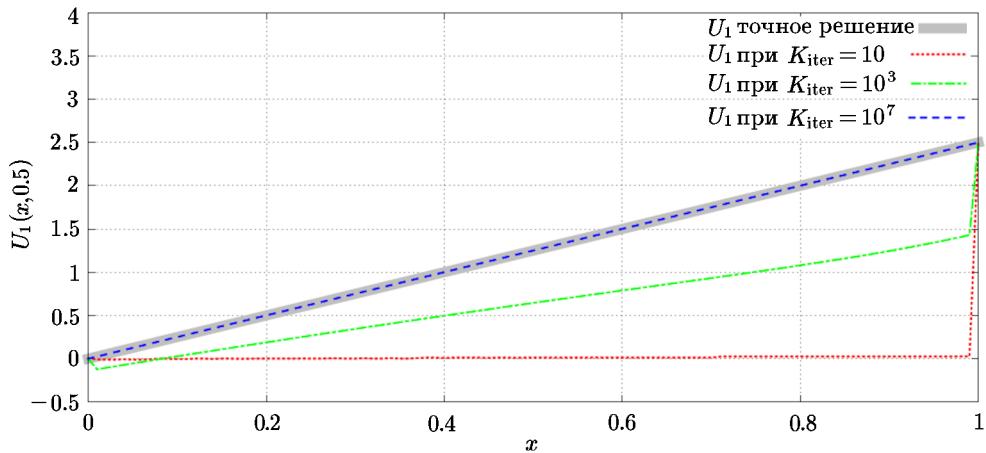
$$u_2(0, y) = -3y^2, \quad u_2(x, 0) = 4x^2, \quad u_2(L_x, y) = 4L_x^2 - 3y^2, \quad u_2(x, L_y) = 4x^2 - 3L_y^2. \quad (47)$$

В методе фундаментальных решений точки коллокации на сторонах прямоугольника выбирались равномерно, с шагами  $h_x$  и  $h_y$ , так что общее число точек коллокации  $M = 2[(N_x - 3) + (N_y - 1)]$ , где  $N_x = \frac{L_x}{h_x}$ ,  $N_y = \frac{L_y}{h_y}$ . Источники помещались в точках, которые располагались во внешности к прямоугольнику на расстоянии  $5h_x$  или  $5h_y$  от каждой точки коллокации по внешней нормали к соответствующим границам прямоугольника. Общее число источников  $N = 2[(N_x - 1) + (N_y - 1)]$ .

В стохастическом итерационном проекционном методе для решения СЛАУ начальная итерация задавалась нулевой.

В первом тестовом примере выбраны единичный квадрат  $L_x = L_y = 1$  и равные шаги разбиения  $h_x = h_y = 0.01$ .

На рисунке 1 представлены результаты расчетов для решения  $u_1(x, 0.5)$  стохастическим итерационным методом: линия, помеченная точками, — расчет с количеством итераций  $K_{\text{iter}} = 10$ , штрихпунктирная —  $K_{\text{iter}} = 10^3$  и штриховая —  $K_{\text{iter}} = 10^7$ . Сплошная жирная линия соответствует точному решению.



**Рис. 1.** Результаты расчетов для решения  $u_1(x, 0.5)$  стохастическим итерационным методом: линия, помеченная точками, — расчет с количеством итераций  $K_{\text{iter}} = 10$ , штрихпунктирная —  $K_{\text{iter}} = 10^3$ , и штриховая —  $K_{\text{iter}} = 10^7$ , сплошная линия — точное решение

В таблице 1 представлены значения относительной погрешности для разного количества итераций при одинаковом количестве коллокационных точек и источников. Относительная погрешность в процентах вычисляется в евклидовой норме по формуле

$$\varepsilon_{L_2} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_x-1} \sum_{j=1}^{N_y-1} (u(x_i, y_j) - \tilde{u}(x_i, y_j))^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_x-1} \sum_{j=1}^{N_y-1} (u(x_i, y_j))^2}} \cdot 100\%,$$

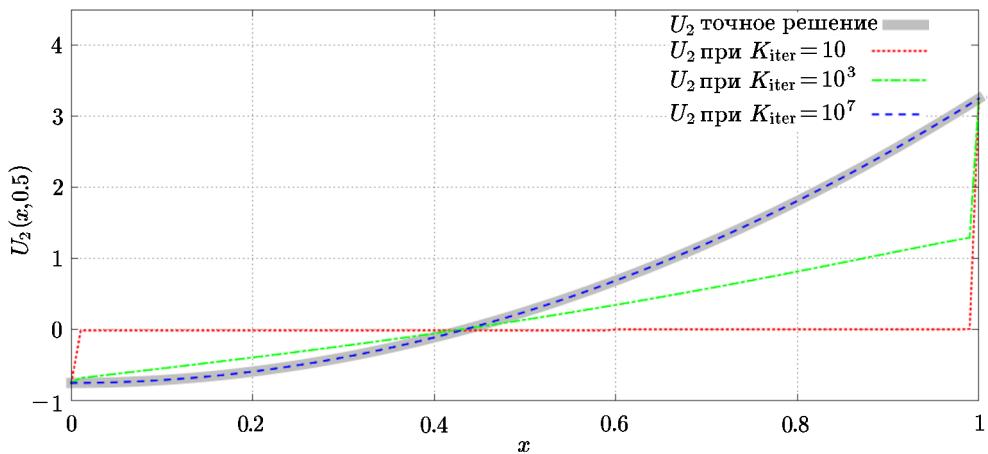
где  $\tilde{u}(x_i, y_j)$  — вычисленные значения одной из компонент решения,  $u(x_i, y_j)$  — ее точные значения.

**Таблица 1.** Относительная погрешность в процентах для расчетов теста 1

$K_{\text{iter}}$	$\varepsilon_{L_2}$ для $u_1$	$\varepsilon_{L_2}$ для $u_2$
10	98.9%	99.3 %
$10^3$	48.3%	48.6 %
$10^5$	1.6%	1.5 %
$10^7$	0.1%	0.1 %

Как видно из таблицы, относительная погрешность в полтора процента достигается уже при  $10^5$ .

На рис. 2 представлена вторая компонента решения  $u_2(x, 0.5)$  при тех же параметрах.



**Рис. 2.** Результаты расчетов для решения  $u_2(x, 0.5)$  стохастическим итерационным методом: линия, помеченная точками, — расчет с количеством итераций  $K_{\text{iter}} = 10$ , штрихпунктирная —  $K_{\text{iter}} = 10^3$  и штриховая —  $K_{\text{iter}} = 10^7$ , сплошная линия — точное решение

В следующем тестовом примере расчеты сделаны также для единичного квадрата с тем же расположением коллокационных точек и соответствующих позиций источников, но для разного числа этих точек.

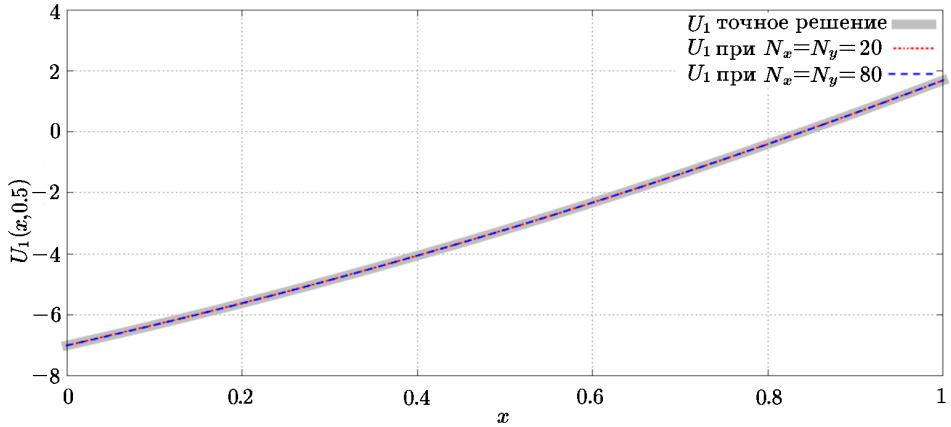
**Тест 2.** Выберем точное решение уравнения Ламе в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= 6x + 6y - 10 + xe^x \sin y + xe^y \sin x, \\ u_2 &= (x+2)e^x \cos y - 2e^y \sin x - 3y - xe^y \cos x. \end{aligned} \quad (48)$$

Этому решению соответствуют граничные условия:

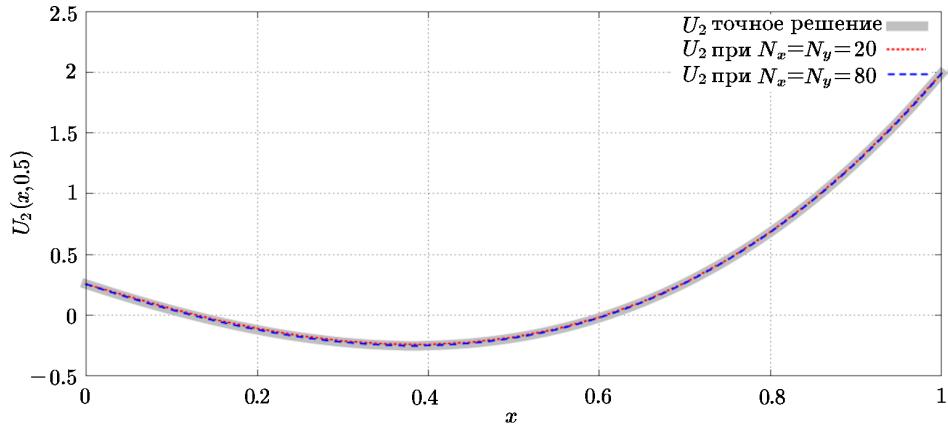
$$\begin{aligned} u_1(0, y) &= 6y - 10, \quad u_1(x, 0) = 6x - 10 + xs \sin x, \\ u_1(L_x, y) &= 6L_x + 6y - 10 + L_x e^{L_x} \sin y + L_x e^y \sin L_x, \\ u_1(x, L_y) &= 6x + 6L_y - 10 + xe^x \sin L_y + xe^{L_y} \sin x, \\ u_2(0, y) &= 2 \cos y - 3y, \quad u_2(x, 0) = (x+2)e^x - 2 \sin x - x \cos x, \\ u_2(L_x, y) &= (L_x + 2)e^{L_x} \cos y - 2e^y \sin L_x - 3y - L_x e^y \cos L_x, \\ u_2(x, L_y) &= (x+2)e^x \cos L_y - 2e^{L_y} \sin x - 3L_y - xe^{L_y} \cos x. \end{aligned} \quad (49)$$

На рис. 3 представлены расчеты для решения  $u_1(x, 0.5)$  стохастическим итерационным методом при количестве итераций  $K_{\text{iter}} = 10^7$  для различного числа точек коллокации: кривая при  $N_x = N_y = 20$  отмечена точками, при  $N_x = N_y = 80$  — штрихами. Как видно из рисунка, кривые практически совпадают с точным решением (сплошная).



**Рис. 3.** Результаты расчетов для решения  $u_1(x, 0.5)$  стохастическим итерационным методом при количестве итераций  $K_{\text{iter}} = 10^7$  для различного числа точек коллокации: кривая при  $N_x = N_y = 20$  отмечена точками, при  $N_x = N_y = 80$  — штрихами, точное решение — сплошная линия

На рис. 4 показан график решений  $u_2(x, 0.5)$ , все параметры те же, что и для рис. 3.



**Рис. 4.** Результаты расчетов для решения  $u_2(x, 0.5)$  стохастическим итерационным методом при количестве итераций  $K_{\text{iter}} = 10^7$ .

В табл. 2 представлены значения относительной погрешности в процентах для различного количества точек коллокации и источников при одинаковом количестве итераций.

**Таблица 2.** Относительная погрешность в процентах для расчетов теста 2

$N_x = N_y$	$\varepsilon_{L_2}$ для $u_1$	$\varepsilon_{L_2}$ для $u_2$
20	0.29%	0.60%
40	0.14%	0.26%
80	0.10%	0.23%
160	0.15%	0.28%

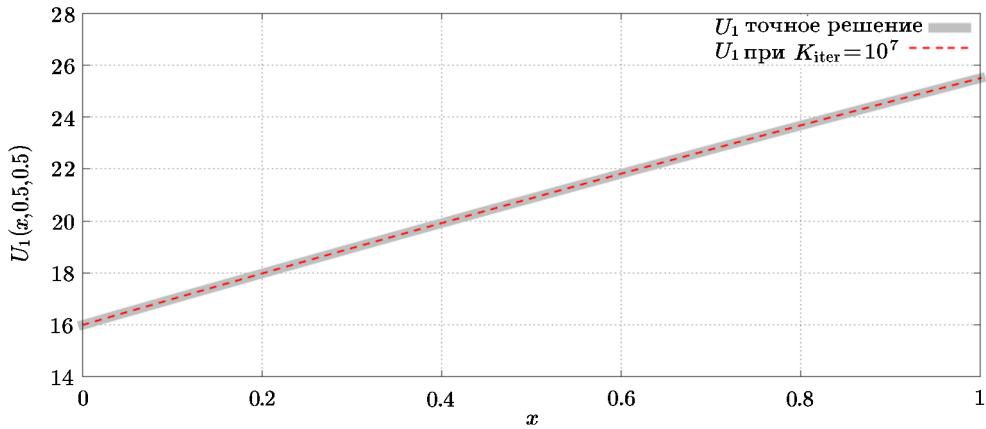
В следующем тесте решалась трехмерная задача в единичном кубе. Выбрано точное решение уравнения Ламе вида

$$\begin{aligned} u_1 &= 9x + 20y + 24z - 6 - (x - 2)xz, \\ u_2 &= 5xyz + y(2z - 3), \\ u_3 &= 10x^2 - 5y^2 - (x + 3)z^2 - 3z. \end{aligned} \tag{50}$$

В методе фундаментальных решений задавалось  $\left(N_x = \frac{L_x}{h_x}, N_y = \frac{L_y}{h_y}, N_z = \frac{L_z}{h_z}\right)$  коллокационных точек, расположенных на равномерной сетке на каждой грани куба, всего таких точек  $M = 2((N_x - 1)(N_y - 1) + (N_x - 1)(N_z - 1) + (N_y - 1)(N_z - 1))$ . Источники располагались, как и в двумерном случае, во внешности куба на расстоянии  $5h$  по нормали к соответствующей грани. Общее количество источников  $N = 2((N_x + 1)(N_y + 1) + (N_x + 1)(N_z + 1) + (N_y + 1)(N_z + 1))$ .

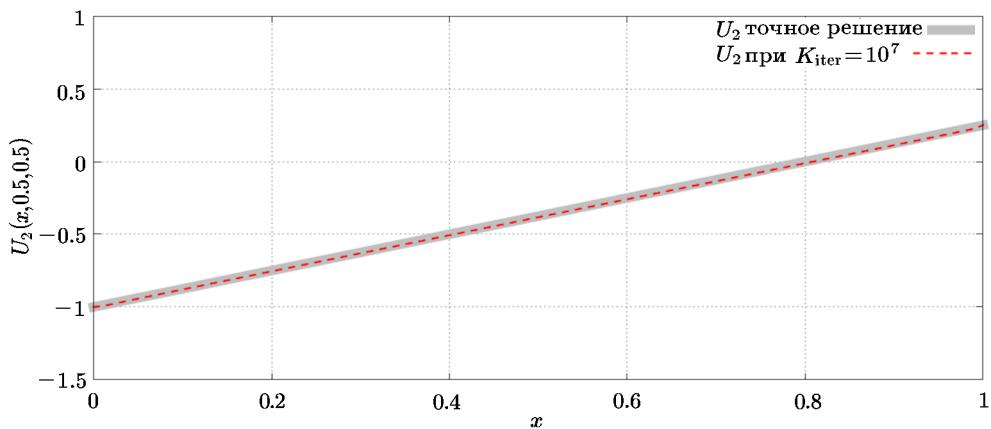
В стохастическом итерационном проекционном методе для решения СЛАУ начальная итерация задавалась нулевой.

На рис. 5 показаны результаты расчетов для решения  $u_1(x, 0.5, 0.5)$  стохастическим итерационным методом при количестве итераций  $K_{\text{iter}} = 10^7$ : штрихами показано вычисленное решение, сплошная линия — точное решение; шаг сетки задавался равномерный,  $h_x = h_y = h_z = 10^{-2}$ .

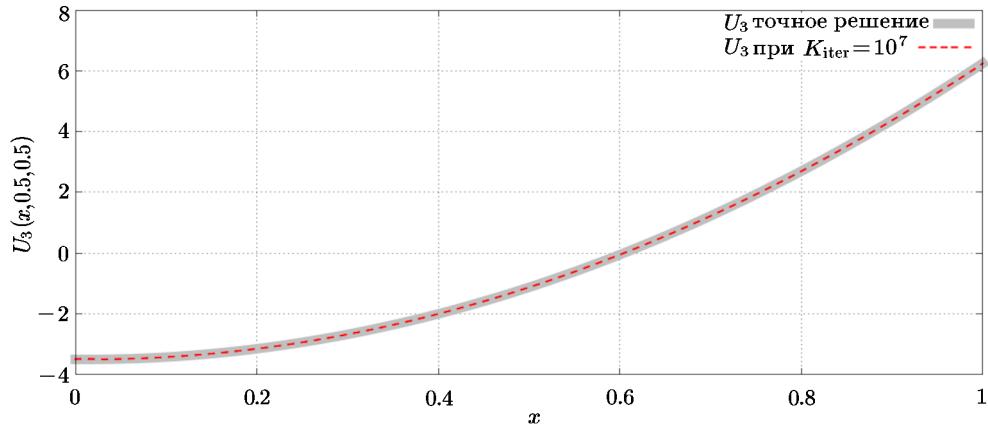


**Рис. 5.** Результаты расчетов для решения  $u_1(x, 0.5, 0.5)$  стохастическим итерационным методом при количестве итераций  $K_{\text{iter}} = 10^7$ : штрихами показано вычисленное решение, сплошная линия — точное решение; шаг сетки задавался равномерный,  $h_x = h_y = h_z = 10^{-2}$

На рисунках 6 и 7 показаны результаты того же расчета, что и на рис. 5, но для второй и третьей компонент решения соответственно. В данном примере была достигнута относительная погрешность  $\varepsilon_{L_2} = 0.04\%$  для  $u_1$ ,  $\varepsilon_{L_2} = 1.07\%$  для  $u_2$  и  $\varepsilon_{L_2} = 0.20\%$  для  $u_3$ .



**Рис. 6.** Результаты того же расчета, что и на рис. 5, но для второй компоненты решения  $u_2(x, 0.5, 0.5)$



**Рис. 7.** Результаты того же расчета, что и на рис. 5, но для третьей компоненты решения  $u_3(x, 0.5, 0.5)$

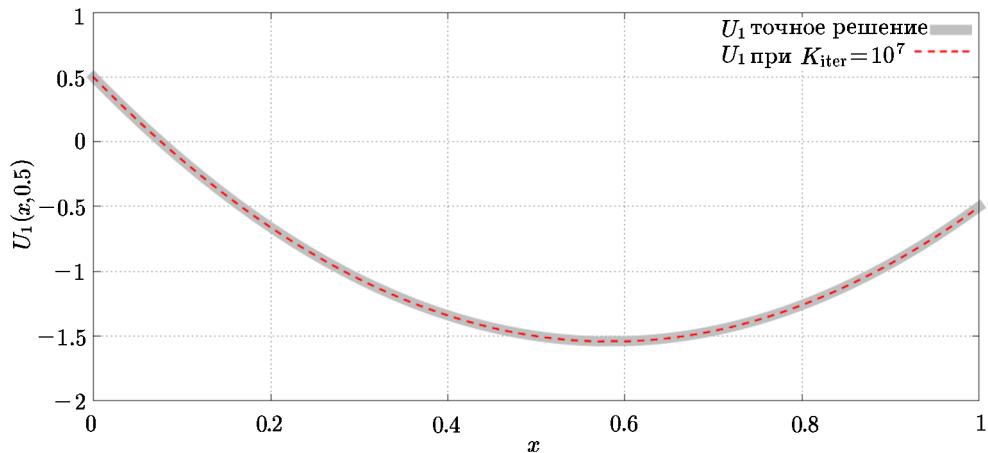
Приведем еще один пример решения системы уравнений Ламе, в котором, в отличие от приведенных выше тестов, граничные условия не были заранее согласованы с граничными условиями для гармонических функций  $\mathbf{w}$ .

**Тест 3.** В единичном квадрате выбрано точное решение уравнение Ламе при  $\lambda = \mu = 4$  вида

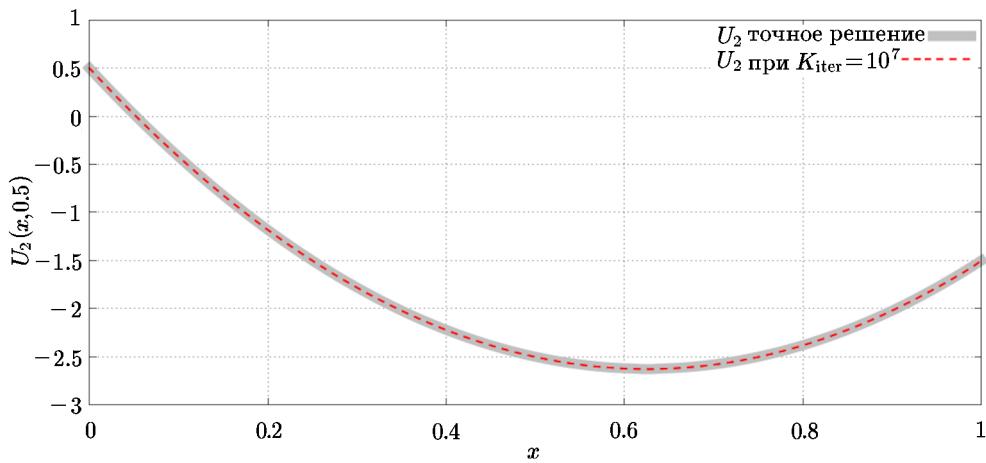
$$u_1 = 6x^2 - 14xy + 2y^2, \quad u_2 = 8x^2 - 20xy + 2y^2.$$

Границные функции для первой краевой задач определяются значениями решений  $u_1$  и  $u_2$  на границах квадрата. Выбор коллокационных точек и позиций источников в методе фундаментальных решений выбирались, как и в двумерных тестах, приведенных выше. Количество коллокационных точек  $M = 2((N_x - 3) + (N_y - 1))$ , количество источников  $N = 2((N_x - 1) + (N_y - 1))$ . В стохастическом итерационном проекционном методе для решения СЛАУ начальная итерация задавалась нулевой.

На рис. 8 расчет для решения  $u_1(x, 0.5)$  показан штриховой линией, количество итераций  $K_{\text{iter}} = 10^7$ . Точное решение представлено сплошной линией, шаг сетки на границе задавался равномерным,  $h_x = h_y = 10^{-2}$ . На рис. 9 показаны результаты того же расчета для второй компоненты решения  $u_2(x, 0.5)$ .



**Рис. 8.** Результаты расчетов для решения  $u_1(x, 0.5)$  (штриховая линия), количество итераций  $K_{\text{iter}} = 10^7$ . Точное решение представлено сплошной линией



**Рис. 9.** Результаты того же расчета, что и на рис. 8, но для второй компоненты решения  $u_2(x, 0.5)$

В данном примере достигнута следующая относительная погрешность:  $\varepsilon_{L_2} = 0.53\%$  для  $u_1$ ,  $\varepsilon_{L_2} = 0.34\%$  для  $u_2$ .

## 9. Выводы

Предложенный метод стохастического моделирования для решения двух- и трехмерных задач эластостатики включает в себя четыре основных шага: (1) решение уравнения Ламе ищется в виде представления Слободянского, куда входят только неизвестные гармонические функции и их производные, (2) гармонические функции в методе фундаментальных решений приближаются в виде конечной суммы фундаментальных решений уравнения Лапласа с неизвестными коэффициентами, (3) после подстановки этих конечных сумм в представление Слободянского и согласования с заданными граничными функциями мы приходим к системе линейных алгебраических уравнений на неизвестные коэффициенты, (4) полученная система линейных уравнений решается с помощью стохастического проекционного метода. Замечательным свойством такого метода является то, что вычислив один раз эти неизвестные коэффициенты, мы имеем представление вектора решений в произвольном множестве внутренних точек области. Метод не требует введения сеток внутри области, а лишь на ее границе, что является преимуществом перед конечно-разностными методами. Кроме того, предложенный метод прост в реализации и является весьма экономичным.

## Литература

1. Аксюк И.А., Киреева А.Е., Сабельфельд К.К., Смирнов Д.Д. Алгоритмы стохастического моделирования для итерационного решения уравнения Ламе // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2023. — Т. 26, № 4. — С. 357–377.
2. Алексидзе М.А. О приближенном решении одной смешанной граничной задачи теории гармонических функций // Дифф. уравнения. — 1966. — Т. 2, № 7. — С. 988–994.
3. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. 2-е изд., доп. — М.: Наука, 1982.

4. Купрадзе В.Д., Алексидзе М.А. Метод функциональных уравнений для приближенного решения некоторых граничных задач // Журн. вычисл. матем. и мат. физики.—1964.—Т. 4, № 4.—С. 683–715.
5. Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи теории упругости.—М.: Наука, 1976.
6. Лурье А.И. Теория упругости.—М.: Наука, 1970.
7. Михайлов Г.А., Чешкова А.Ф. Решение разностной задачи Дирихле для многомерного уравнения Гельмгольца методом Монте-Карло // Журн. вычисл. матем. и мат. физики.—1998.—Т. 38, № 1.—С. 99–106.
8. Polyanin A.D., Lychev S.A. Decomposition methods for coupled 3D equations of applied mathematics and continuum mechanics: Partial survey, classification, new results, and generalizations // Appl. Math. Modelling.—2016.—Vol. 40.—P. 3208–3324.
9. Sabelfeld K.K. A new randomized vector algorithm for iterative solution of large linear systems // Appl. Math. Letters.—2022.—Vol. 126.—Article № 107830.—DOI: 10.1016/j.aml.2021.107830.
10. Sabelfeld K.K. Monte Carlo Methods in Boundary Value Problems.—Berlin: Springer, 1991.
11. Sabelfeld K., Kireeva A. A global random walk on spheres algorithm for calculating the solution and its derivatives of drift-diffusion-reaction equations // Mathematical Methods in the Applied Sciences.—2022.—Vol. 45, № 3.—P. 1420–1431.—DOI: 10.1002/MMA.7861.
12. Sabelfeld K., Loshina N. Stochastic iterative projection methods for large linear systems // Monte Carlo Methods and Applications.—2010.—Vol. 16, iss. 3-4.—P. 343–359.
13. Sabelfeld K.K., Mozartova N.S. Stochastic boundary collocation and spectral methods for solving PDEs // Monte Carlo Methods and Applications.—2012.—Vol. 18, iss. 3.—P. 217–263.
14. Sabelfeld K.K., Shalimova I.A. Spherical and Plane Integral Operators for PDEs: Construction, Analysis, and Applications.—Berlin: Walter de Gruyter, 2013.
15. Shalimova I., Sabelfeld K. Development and implementation of a branching random walk on spheres process for solving the 2D Lamé equation // Monte Carlo Methods and Applications.—2023.—Vol. 29, iss. 1.—P. 79–93.—DOI: 10.1515/mcma-2022-2131.
16. Sabelfeld K., Smirnov D. A global random walk on grid algorithm for second order elliptic equations // Monte Carlo Methods and Applications.—2021.—Vol. 27, iss. 3.—P. 211–225.
17. Sabelfeld K.K., Talay D. Integral formulation of boundary value problems and the method of random walk on spheres // Monte Carlo Methods and Applications.—1995.—Vol. 1, № 1.—P. 1–34.
18. Slobodianskii M.G. General and complete solutions of the equations of elasticity // J. Applied Mathematics and Mechanics.—1959.—Vol. 23, № 3.—P. 666–685.
19. Strohmer T., Vershynin R. A randomized Kaczmarz algorithm with exponential convergence // J. Fourier Analysis and Applications.—2007.—Vol. 15.—P. 262–278.
20. Walker A.J. New fast method for generating discrete random numbers with arbitrary frequency distributions // Electr. Lett.—1974.—Vol. 10, iss. 8.—P. 127–128.

Поступила в редакцию 13 февраля 2024 г.  
После исправления 20 февраля 2024 г.  
Принята к печати 4 марта 2024 г.

## Литература в транслитерации

1. Aksyuk I.A., Kireeva A.E., Sabelfeld K.K., Smirnov D.D. Algoritmy stokhasticheskogo modelirovaniya dlya iteracionnogo resheniya uravneniya Lame // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2023. — T. 26, № 4. — S. 357–377.
2. Aleksidze M.A. O priblizhennom reshenii odnoi smeshannoj granichnoi zadachi teorii garmonicheskikh funkciy // Diff. uravneniya. — 1966. — T. 2, № 7. — S. 988–994.
3. Ermakov S.M., Mikhailov G.A. Statisticheskoe modelirovanie. 2-e izd., dop. — M.: Nauka, 1982.
4. Kupradze V.D., Aleksidze M.A. Metod funkcionalykh uravnenii dlya priblizhennogo resheniya nekotorykh granichnykh zadach // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1964. — T. 4, № 4. — S. 683–715.
5. Kupradze V.D., Gegelia T.G., Basheleishvili M.O., Burchuladze T.V. Trekhmernye zadachi teorii uprugosti. — M.: Nauka, 1976.
6. Lur'e A.I. Teoriya uprugosti. — M.: Nauka, 1970.
7. Mikhailov G.A., Cheshkova A.F. Reshenie raznostnoi zadachi Dirikhle dlya mnogomernogo uravneniya Gel'mgol'ca metodom Monte-Karla // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1998. — T. 38, № 1. — S. 99–106.
8. Polyanin A.D., Lychev S.A. Decomposition methods for coupled 3D equations of applied mathematics and continuum mechanics: Partial survey, classification, new results, and generalizations // Appl. Math. Modelling. — 2016. — Vol. 40. — P. 3208–3324.
9. Sabelfeld K.K. A new randomized vector algorithm for iterative solution of large linear systems // Appl. Math. Letters. — 2022. — Vol. 126. — Article № 107830. — DOI: 10.1016/j.aml.2021.107830.
10. Sabelfeld K.K. Monte Carlo Methods in Boundary Value Problems. — Berlin: Springer, 1991.
11. Sabelfeld K., Kireeva A. A global random walk on spheres algorithm for calculating the solution and its derivatives of drift-diffusion-reaction equations // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2022. — Vol. 45, № 3. — P. 1420–1431. — DOI: 10.1002/mma.7861.
12. Sabelfeld K., Loshina N. Stochastic iterative projection methods for large linear systems // Monte Carlo Methods and Applications. — 2010. — Vol. 16, iss. 3-4. — P. 343–359.
13. Sabelfeld K.K., Mozartova N.S. Stochastic boundary collocation and spectral methods for solving PDEs // Monte Carlo Methods and Applications. — 2012. — Vol. 18, iss. 3. — P. 217–263.
14. Sabelfeld K.K., Shalimova I.A. Spherical and Plane Integral Operators for PDEs: Construction, Analysis, and Applications. — Berlin: Walter de Gruyter, 2013.
15. Shalimova I., Sabelfeld K. Development and implementation of a branching random walk on spheres process for solving the 2D Lamé equation // Monte Carlo Methods and Applications. — 2023. — Vol. 29, iss. 1. — P. 79–93. — DOI: 10.1515/mcma-2022-2131.
16. Sabelfeld K., Smirnov D. A global random walk on grid algorithm for second order elliptic equations // Monte Carlo Methods and Applications. — 2021. — Vol. 27, iss. 3. — P. 211–225.
17. Sabelfeld K.K., Talay D. Integral formulation of boundary value problems and the method of random walk on spheres // Monte Carlo Methods and Applications. — 1995. — Vol. 1, № 1. — P. 1–34.
18. Slobodianskii M.G. General and complete solutions of the equations of elasticity // J. Applied Mathematics and Mechanics. — 1959. — Vol. 23, № 3. — P. 666–685.
19. Strohmer T., Vershynin R. A randomized Kaczmarz algorithm with exponential convergence // J. Fourier Analysis and Applications. — 2007. — Vol. 15. — P. 262–278.
20. Walker A.J. New fast method for generating discrete random numbers with arbitrary frequency distributions // Electr. Lett. — 1974. — Vol. 10, iss. 8. — P. 127–128.